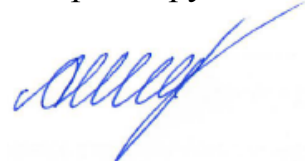


Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И
ТЕХНОЛОГИЙ ИМЕНИ АКАДЕМИКА М.Ф. РЕШЕТНЕВА»

На правах рукописи



Антропов Никита Романович

**ЯДЕРНЫЕ АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ С ПАМЯТЬЮ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ
ИНФОРМАЦИИ**

2.3.1 – Системный анализ, управление и обработка информации

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, доцент
Агафонов Евгений Дмитриевич

Красноярск – 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1 Идентификация нелинейных дискретных динамических объектов	12
1.1 История развития методов идентификации нелинейных динамических объектов	12
1.2 Общие сведения о задаче идентификации нелинейных динамических объектов	16
1.3 Рекуррентный ядерный алгоритм идентификации для нелинейных дискретных динамических объектов.....	29
1.4 Численное исследование ядерного алгоритма идентификации.....	37
Выводы по первой главе.....	45
2 Управление нелинейными дискретными динамическими объектами	47
2.1 Общие сведения о задаче управления нелинейными динамическими объектами.....	47
2.2 Рекуррентный ядерный алгоритм управления для нелинейных дискретных динамических объектов.....	55
2.3 Численное исследование ядерного алгоритма дуального управления нелинейными объектами с памятью	58
2.4 Управление нелинейными динамическими объектами с хаотическим поведением.....	64
Выводы по второй главе.....	68
3 Методы оценки параметров ядерных моделей при наличии ограничений на вычислительные ресурсы	70
3.1 Выбор ядра и учет априорной информации об объекте	70
3.2 Вычислительно-эффективные методы оценки параметров ядерных моделей нелинейных объектов	78
3.3 Алгоритм оценки параметров ядерных моделей с использованием низкоранговой аппроксимации.....	83

3.4 Численное исследование ядерных алгоритмов идентификации при наличии ограничений на вычислительные ресурсы	89
Выводы по третьей главе.....	95
4 Управление магистральным насосным агрегатом.....	97
4.1 Краткие технологические сведения о насосных агрегатах.....	97
4.2 Предлагаемая схема управления магистральным насосным агрегатом....	100
4.3 Численное исследование системы управления.....	105
Выводы по четвертой главе	111
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	112
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	114

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Подавляющее большинство производственных и технологических объектов, например, таких как насосные агрегаты нефтеперекачивающих станций, обладают признаками или проявляют себя как сложные нелинейные, нестационарные и динамические объекты, модельное описание которых отсутствует или крайне затруднено. Вместе с тем построение моделей сложных нелинейных объектов с памятью необходимо для эффективного решения задач прогнозирования, оптимизации, управления и принятия решений. Под объектами с памятью будем понимать динамические объекты, текущее состояние которых зависит не только от входных воздействий, но и от некоторого набора их предыдущих состояний. Модели указанных объектов, как правило, основываются на наблюдениях, а их построение осуществляется с помощью методов идентификации.

Выбор того или иного метода идентификации определяется уровнем априорной информации о моделируемом объекте. На практике, характер априорных сведений об исследуемом объекте в большинстве случаев является неполным, вследствие чего классические методы управления для таких объектов неприменимы. Существующие интеллектуальные и ядерные методы идентификации и управления для нелинейных объектов с памятью являются требовательными к объемам вычислительных ресурсов. Вычислительная сложность указанных методов зависит от объема выборки, а накопление наблюдений, в свою очередь, с течением времени приводит к превышению допустимых лимитов вычислительных ресурсов.

Для решения проблемы необходима разработка новых алгоритмов идентификации и управления для нелинейных объектов с памятью, позволяющих учитывать наличие ограничений на вычислительные ресурсы и, в тоже время, обеспечивающих заданное качество решения задач идентификации и управления. Разработка соответствующих алгоритмов в особенности актуальна для производственных систем, имеющих распределенную и разветвленную структуру,

не позволяющую осуществлять централизованный мониторинг и управление технологическими режимами работы системы с привлечением больших вычислительных мощностей. К системам с указанными особенностями относятся, в частности, системы трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов, состоящие из множества подсистем, технологического оборудования и объектов, включающих насосные агрегаты, резервуарные парки и так далее.

Степень разработанности темы. Для решения задач идентификации и управления нелинейными объектами с памятью в настоящее время применяются интеллектуальные методы, например нейронные сети [59], модели на основе нечеткой логики [112], другие подходы, включая ряды Вольтерра [100], модели Винера и Гаммершейна [20, 57, 58]. Перечисленные методы являются требовательными к объемам вычислительных ресурсов, в связи с этим широкое распространение получили ядерные методы [82] которые являются результатом обобщения метода потенциальных функций [47], основанного на ядерных функциях, задающих скалярное произведение в пространстве высокой размерности [101]. Линейные методы оценки параметров, в частности, такие как метод наименьших квадратов и метод стохастической аппроксимации, при построении оценок используют скалярное произведение. При замене скалярных произведений на ядерные функции может быть получен ядерный аналог исходного линейного алгоритма оценки параметров. Оценивание параметров ядерных моделей осуществляется путем решения систем линейных алгебраических уравнений, методы решения которых могут быть представлены в рекуррентном виде. Считается, что впервые описанный подход был применен к методу опорных векторов для задачи классификации [117].

Впоследствии с применением ядерного подхода было получено множество алгоритмов идентификации и управления. В частности, разработан ядерный алгоритм наименьших квадратов [99], рекуррентный ядерный алгоритм наименьших квадратов [65], рекуррентный ядерный алгоритм наименьшей среднеквадратической ошибки [81], а также их различные модификации [97, 116].

Предложен дисперсионный ядерный алгоритм управления [84], ядерный алгоритм адаптивного и дуального управления [48], ядерный алгоритм управления с идентификатором [61] и другие. Существенным недостатком ядерных алгоритмов является необходимость решения систем линейных уравнений, размерность которых зависит от объема выборки. В условиях активного накопления информации это обстоятельство с течением времени приводит к превышению лимита доступных вычислительных ресурсов. На сегодняшний день, исчерпывающего подхода к решению указанной проблемы не предложено.

Таким образом, несмотря на большое разнообразие существующих методов, разработка и совершенствование ядерных алгоритмов, позволяющих повысить эффективность решения задач идентификации и управления применительно к нелинейным дискретным объектам с памятью, функционирующим в условиях неполной информации и ограниченных вычислительных ресурсов, является **актуальной научно-технической задачей.**

Целью диссертационной работы является повышение эффективности ядерных алгоритмов идентификации и управления для нелинейных дискретных объектов с памятью в условиях неполной информации и ограниченных вычислительных ресурсов.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи:**

1. Провести анализ существующих методов и алгоритмов идентификации и управления нелинейными дискретными объектами с памятью в условиях активного накопления информации и наличии ограничений на вычислительные ресурсы.

2. Сформулировать требования к синтезу алгоритмов идентификации и управления для нелинейных дискретных объектов с памятью в условиях активного накопления информации и наличии ограничений на вычислительные ресурсы.

3. Разработать алгоритм оценки параметров ядерных моделей нелинейных дискретных объектов с памятью с использованием аппроксимации обратной матрицы системы фиксированной размерности.

4. Разработать рекуррентный ядерный алгоритм идентификации для нелинейных дискретных объектов с памятью в условиях неполной информации на базе рекуррентной процедуры построения разложения матрицы системы и адаптивной процедуры формирования выборки наблюдений.

5. Разработать ядерный алгоритм дуального управления для нелинейных дискретных объектов с памятью в условиях неполной информации с использованием метода стохастического градиентного спуска с добавлением коэффициента нечувствительности.

6. Исследовать эффективность разработанных алгоритмов по критериям эффективности при решении различных задач идентификации и управления применительно к нелинейным дискретным объектам с памятью.

7. Решить практическую задачу идентификации и управления давлением магистрального насосного агрегата НМ 2500-230 нефтеперекачивающей станции Кемчуг-І.

Объект и предмет исследования. В качестве объекта исследования в диссертационной работе выступают нелинейные дискретные объекты с памятью, такие как магистральные насосные агрегаты в системах трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов. Предметом исследования являются ядерные методы идентификации и управления для указанных объектов.

Научная новизна результатов диссертационной работы заключается в следующем:

1. Разработан новый алгоритм оценки параметров ядерных моделей нелинейных дискретных объектов с памятью, отличающийся жадной процедурой вычисления обратной матрицы системы с использованием низкоранговой аппроксимации фиксированной размерности, позволяющий обеспечить

эффективное по точности решение задачи идентификации при заданных ограничениях на вычислительные ресурсы.

2. Разработан новый рекуррентный ядерный алгоритм идентификации для нелинейных дискретных объектов с памятью, отличающийся от аналогичных рекуррентным оцениванием параметров модели на основе разложения матрицы системы и адаптивной процедурой формирования выборки наблюдений, позволяющий повысить вычислительную эффективность решения задач идентификации в сравнении с аналогичными алгоритмами.

3. Предложен новый рекуррентный ядерный алгоритм дуального управления с идентификатором для нелинейных дискретных объектов с памятью, отличающийся итерационной процедурой вычисления управляющих воздействий на основе метода стохастического градиента, позволяющий оценивать управляющее воздействие при наличии ограничений на вычислительные ресурсы.

Теоретическая значимость. В работе рассмотрены методы идентификации и управления нелинейными объектами с памятью. Выявлены недостатки существующих методов и алгоритмов идентификации и управления для нелинейных динамических объектов. Информация о структуре моделей указанных объектов, как правило, отсутствует, вследствие чего классические методы управления для таких объектов неприменимы. Для решения проблемы в работе предложены новые ядерные алгоритмы идентификации и управления для нелинейных объектов с памятью, которые являются более эффективными по критерию вычислительной сложности в сравнении с аналогичными методами и позволяют настраивать вычислительные ресурсы, используемые в ходе идентификации и управления. Результаты проведенного исследования способствуют развитию теории управления нелинейными и динамическими объектами в условиях неполной информации и ограниченных вычислительных ресурсов.

Практическая значимость результатов диссертационной работы состоит в разработке новых вычислительно-эффективных алгоритмов идентификации и

управления для нелинейных дискретных объектов с памятью в условиях неполной информации. Результаты диссертационного исследования получены в ходе выполнения гранта РФФИ № 19-37-90040 «Адаптивные алгоритмы построения прогнозных моделей нелинейных динамических систем в условиях нестационарности» в 2019-2021 гг. в Сибирском государственном университете науки и технологий им. акад. М.Ф. Решетнёва.

Разработанные в ходе диссертационного исследования алгоритмы могут быть использованы в автоматизированных системах управления и мониторинга технологических процессов в трубопроводах на предприятиях нефтегазового комплекса. Практическая значимость результатов исследования подтверждена на предприятии АО «Транснефть – Западная Сибирь», где предложенные алгоритмы были успешно применены для решения задачи идентификации и управления магистральным насосным агрегатом НМ 2500-230 нефтеперекачивающей станции Кемчуг-I.

Методология и методы исследования включают методы системного анализа, линейной алгебры, теории идентификации, оптимизации, теории адаптивных и обучающихся систем, теории непараметрических систем, теории дуального управления, теории сложности вычислений, а также методы теории вероятности и математической статистики.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие положения:

1. Разработанный алгоритм оценки параметров ядерных моделей нелинейных дискретных объектов с памятью, отличающийся жадной процедурой вычисления обратной матрицы системы с использованием низкоранговой аппроксимации фиксированной размерности, позволяет обеспечить эффективное по точности решение задачи идентификации при заданных ограничениях на вычислительные ресурсы.

2. Разработанный рекуррентный ядерный алгоритм идентификации для нелинейных дискретных объектов с памятью, отличающийся от аналогичных

рекуррентным оцениванием параметров модели на основе разложения матрицы системы и адаптивной процедурой формирования выборки наблюдений, требует меньше вычислительных операций и памяти в сравнении с аналогичными алгоритмами при одинаковых объемах выборки.

3. Предложенный рекуррентный ядерный алгоритм дуального управления с идентификатором для нелинейных дискретных объектов с памятью, отличающийся от аналогичных итерационной процедурой вычисления управляющих воздействий на основе стохастического градиента, позволяет оценивать управляющее воздействие при наличии ограничений на вычислительные ресурсы.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность защищаемых научных положений и выводов диссертационного исследования обеспечивается применением формальных математических методов, непротиворечивостью результатов исследования известным данным, а также результатами численных исследований, подтверждающих близость полученных прогнозных значений моделей, построенных с использованием предложенных алгоритмов, к результатам измерений и экспериментальным данным. Результаты численных экспериментов подтверждают соответствие полученных значений оценок управляющих воздействий и желаемых значений выходных переменных как для тестовых объектов, в качестве которых выступают нелинейные разностные уравнения, так и для существующих производственных объектов нефтегазового комплекса, в качестве которого рассматривается магистральный насосный агрегат НМ-2500-230 нефтеперекачивающей станции Кемчуг-I.

Основные результаты работы представлялись на следующих конференциях: международной научно-практической конференции «Решетневские чтения» (г. Красноярск, 2014-2021 гг.), на научно-технической конференции «Молодежь и наука» (г. Красноярск, 2014-2015 гг.), на научно-технической конференции «Перспектив свободный» (г. Красноярск, 2016-2017 гг.), на конференции «Молодежь, общество, современная наука, техника и инновации» (г. Красноярск,

2015, 2018, 2019 гг.), на научно технической конференции «Молодежь. Техника. Космос» (г. Санкт-Петербург, 2018 г.), на международной конференции «Applied Methods of Statistical Analysis» (г. Красноярск, 2017 г.; г. Новосибирск, 2019 г.), на II международной научно-технической конференции молодежи ПАО «Транснефть» и организаций - членов Международной ассоциации транспортировщиков нефти (г. Омск, 2016 г.), на международном семинаре «Advanced Technologies in Material Science, Mechanical and Automation Engineering» - “MIP: Engineering - 2019”, (г. Красноярск, 2019 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 18 работ, из них 5 публикации в журналах из перечня ВАК и 4 публикации, индексируемых в международных базах Web of Science и Scopus. Получено 1 свидетельство о регистрации программы для ЭВМ в Роспатенте.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 123 наименования.

1 Идентификация нелинейных дискретных динамических объектов

1.1 История развития методов идентификации нелинейных динамических объектов

На сегодняшний день, проблемам построения моделей нелинейных динамических систем посвящено значительное количество работ. Одним из первых подходов к построению моделей нелинейных динамических систем считается метод Вольтера [49], который предполагает построение модели посредством суммы интегралов свертки. Недостатками данного подхода являются неопределенность выбора количества используемых членов ряда и необходимость проведения дополнительных экспериментов по снятию реакции системы на различные тестовые входные воздействия, что требует достаточно много материальных и вычислительных ресурсов.

Последующие работы в данном направлении посвящены построению так называемых моделей Винера и Гаммерштейна [20, 21, 26] представляющих собой последовательное соединение линейного динамического элемента и нелинейного статического элемента. Данный подход позволяет повысить полноту использования информации при построении модели. Среди недостатков данных моделей необходимо выделить их принадлежность к классу параметрических, следовательно, эти алгоритмы не позволяют решить проблему неопределенности в выборе структуры модели, в рамках которой необходимо производить оценку параметров.

С развитием вычислительной техники и увеличением вычислительных мощностей, для решения задач идентификации нелинейных объектов стали применяться более ресурсоемкие методы, включающие, например, ядерные методы [82] и методы нейросетевого моделирования [106]. С развитием данных методов стало возможным решение проблемы неопределенности при определении структуры модели нелинейных динамических систем. Вместе с тем, одним из ключевых вопросов стал не выбор структуры модели, а выбор и оценка

параметров алгоритмов, позволяющих обеспечить приемлемую точность моделирования. Несмотря на существенное увеличение вычислительных мощностей, решение задач идентификации в условиях активного накопления информации, когда обучающая выборка не фиксирована, а постоянно пополняется, при применении данных методов с ростом объема выборки приводит к превышению лимита вычислительных ресурсов. Вследствие этого, зависимость вычислительной сложности данных методов от объема выборки стало одним из основных препятствий на пути их практического применения.

Один из подходов к решению проблемы высокой вычислительной сложности заключается в разработке методов адаптивной ядерной фильтрации [65, 56], в рамках которых построение модели осуществляется итерационно, с использованием на каждом шаге информации с предыдущего шага. В то же время, решению данной проблемы способствует интенсивное развитие идеи построения компактных и репрезентативных обучающих выборок, позволяющих обеспечивать компромисс между точностью и вычислительной сложностью. Эти идеи впоследствии нашли свое воплощение в методах обучения признакам и методах словарного обучения, в настоящее время широко применяемых для решения задачи повышения вычислительной эффективности ядерных методов идентификации [98].

Другой подход к повышению вычислительной эффективности ядерных методов состоит в применении итерационных методов оптимизации к оценке параметров ядерных методов. В частности, с использованием метода стохастического градиента в работе [81] был предложен ядерный алгоритм наименьших средних квадратов, который обеспечивает более высокую вычислительную эффективность, но обладающий более низкой точностью и скоростью сходимости. В дальнейшем, в работе [60] был предложен модифицированный алгоритм, обеспечивающий более высокую точность и скорость сходимости в сравнении с исходным алгоритмом. На сегодняшний день,

повышение вычислительной эффективности ядерных методов является одним из основных направлений исследований [111].

В таблице 1.1 представлены существующие подходы к построению моделей нелинейных процессов, включая их возможности моделирования и оценку вычислительную сложности [82].

Таблица 1.1 – Сравнение различных алгоритмов идентификации

Алгоритм	Возможности моделирования	Вычислительная сложность
Линейные фильтры	только линейный	очень простая
Модели Гаммерштейна и Винера	ограничено нелинейный	простая
Ряды Вольтерра	универсальный	очень большая
Нейронные сети	универсальный	средняя
Рекуррентные нейронные сети	универсальный	большая
Ядерные алгоритмы	универсальный	средняя
Рекуррентное Байесовское оценивание	универсальный	очень большая

Необходимо отметить, что большинство реальных нелинейных динамических систем функционируют в условиях нестационарности, вызванной меняющимися во времени условиями и параметрами функционирования, связанными с переключением режимов работы, влиянием неконтролируемых внешних воздействий, изменением условий эксплуатации и параметров функционирования нелинейной динамической системы и так далее [15, 109]. В связи с этим, в настоящее время одной из важнейших задач совершенствования ядерных методов идентификации нелинейных динамических систем является разработка подходов, позволяющих отслеживать изменение и дрейф параметров

нелинейных динамических систем, функционирующих в условиях нестационарности.

Считается, что первый алгоритм по решению данной задачи был предложен в работе [80], основная идея которого заключается в добавлении в модель так называемого параметра забывания, определяющего вес каждого измерения в обучающей выборке. Параметр определен таким образом, что наибольший вес получают самые актуальные измерения. По мере поступления новых измерений, вес предыдущих измерений в обучающей выборке понижается. Несмотря на теоретическую обоснованность такого подхода, данный алгоритм имеет ряд недостатков, ограничивающих его практическое применение. Так, получаемые с помощью данного алгоритма оценки по мере накопления измерений становятся всё более нестабильными, что приводит к снижению точности идентификации. Недостатки данного алгоритма были устранены в работе [113], в которой приводится теоретическое и экспериментальное исследование алгоритма, основанного на применении Байесовского подхода [93]. Успешность данного алгоритма способствовала развитию идей применения вероятностных подходов в методах идентификации нелинейных динамических систем в условиях нестационарности. В частности, вероятностный подход позволил разработать модификацию ядерного алгоритма метода наименьших средних квадратов для нестационарных систем [118], который позволил повысить степень адаптивности исходного алгоритма.

Таким образом, ядерные методы идентификации в настоящее время является одним из перспективных подходов к идентификации нелинейных динамических объектов. На данный момент, актуальными задачами развития ядерных методов идентификации является повышение их робастности [16], вычислительной эффективности [94], а также степени их адаптивности [118].

1.2 Общие сведения о задаче идентификации нелинейных динамических объектов

Большое количество различных технологических и производственных объектов функционируют в режиме реального времени. Управление такими объектами, как правило, осуществляется с помощью адаптивных систем управления, способных подстраиваться к изменяющимся условиям функционирования объекта [37, 38].

В основе большинства адаптивных систем лежит модель, которая строится на основании входных и выходных переменных объекта [32]. Построение модели объекта на основании наблюдений его входных и выходных переменных является задачей идентификации [28]. Модель представляется в виде функциональной зависимости между выходными и входными переменными объекта:

$$\hat{y}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n) + \varepsilon_n, \quad (1.1)$$

где $f(\cdot)$ – некоторая функциональная зависимость.

Общая схема задачи идентификации одномерного объекта представлена на рисунке 1.1 [28].

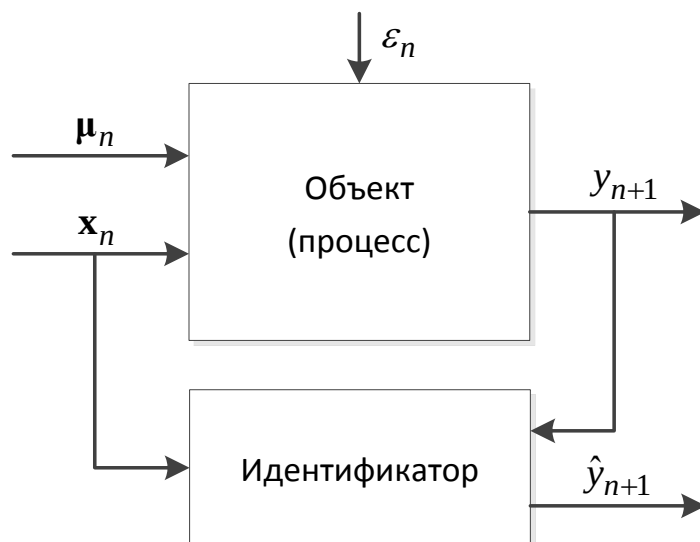


Рисунок 1.1 – Общая схема идентификации объекта (процесса)

На рисунке 1.1 приняты следующие обозначения: μ_n – вектор неконтролируемых входных воздействий; x_n – вектор контролируемых входных воздействий; y_n – выходная переменная; $\hat{y}_n$ – оценка (прогноз) выходной переменной y_n при входном воздействии x_{n-1} ; ε_n – случайная помеха, действующая на объект.

Формализовано, задача идентификации может быть сформулирована следующим образом [25]. Имеется объект, в процессе нормального функционирования которого синхронно могут быть измерены входные x_n и выходная y_n переменные. По результатам измерения вектора входных переменных x_n и выходной переменной y_n необходимо построить модель объекта, т.е. найти оператор (функцию), ставящий в соответствие выходную y_n переменную и вектор входных переменных x_n . В зависимости от объекта результаты измерений выходной и входных переменных могут быть представлены в непрерывном или дискретном виде [35].

При известном уравнении, описывающем объект, задача идентификации сводится к оценке параметров этого уравнения. В этом случае говорят о задаче идентификации в «узком» смысле. Если уравнение, описывающее объект, неизвестно, то в этом случае говорят о задаче идентификации в «широком смысле» [36]. В первом случае речь идет о достаточно хорошо изученных объектах, в то время как во втором случае априорной информации об объекте значительно меньше, что соответствует более сложной постановке задачи идентификации. Очевидно, что выбор алгоритма решения задачи идентификации исследуемого объекта или процесса напрямую зависит от имеющейся априорной информации.

Априорная и текущая информация.

Алгоритм построения модели определяется исходя из исходной априорной информации об объекте. В общем случае выделяют следующие уровни априорной информации [24, 25]:

1. Байесов уровень с максимально возможной информацией. Информация о модели исследуемого процесса и случайных помехах дана полностью. Точно известны модель процесса, а также статистические характеристики помех, включая значения параметров их распределений.

2. Байесов уровень. Информация о случайных помехах и модели процесса дана с точностью до набора параметров, но неизвестны численные значения параметров плотностей вероятностей случайных помех и модели. Входные и выходные переменные объекта наблюдаются в виде статистических выборок конечного или бесконечного объема из генеральной совокупности независимых, одинаково распределенных случайных величин, плотность распределения которых также задана с точностью до набора параметров.

3. Уровень параметрической неопределенности. Информация о структуре модели, описывающей процесс, известна с точностью до набора параметров, а сведения о законе распределения помех отсутствуют. Входные и выходные переменные наблюдаются в виде статистических выборок из генеральной совокупности независимых, одинаково распределенных случайных величин, плотность распределения которых неизвестна.

4. Уровень непараметрической неопределенности. На этом уровне информация о структуре модели, которая описывает объект, отсутствуют, но известны некоторые качественные свойства объекта (например, статический объект или динамический). Сведения о законе распределения случайных помех также не известны, входные и выходные наблюдения объекта осуществляются аналогично третьему пункту.

Первые два уровня априорной информации практически не встречаются на практике, поскольку при наличии полной информации об объекте необходимость в его моделировании отсутствует. Третий уровень априорной информации встречается при идентификации достаточно хорошо изученных объектов, которые, как правило, являются линейными. В связи с тем, что большинство существующих процессов и объектов являются нелинейными, множество

различных математических форм описания которых является бесконечным, наиболее распространенными на практике являются четвертый уровень априорной информации, либо комбинированный уровень [12], при котором априорная информация об объекте одновременно относится к нескольким уровням [50].

Текущая информация об исследуемом объекте формируется из имеющихся наблюдений, полученных в результате измерений входных и выходных переменных объекта. В зависимости от контрольно-измерительной системы и характера наблюдения за переменными объекта, задачи идентификации и управления могут быть условно разделены на задачи с фиксированной выборкой и задачи с активным накоплением информации [32]. В первом случае построение модели и управление объектом осуществляется на основании обучающей выборки, которая была получена на основании наблюдений входных и выходных переменных объекта на заданном временном интервале. Во втором случае, построение модели и управление осуществляется по наблюдениям, которые поступают последовательно с некоторой периодичностью, по одному или нескольким наблюдениям в один такт времени.

Вычислительная сложность алгоритмов.

Вычислительная сложность является одной из важнейших характеристик алгоритма, определяющей функцию зависимости объема работы алгоритма от размера входных данных. Объем работы алгоритма обычно измеряется в количестве используемых байт информации и вычислительных операций с плавающей точкой в секунду или за одну итерацию алгоритма (англ. floating-point operations per second, сокр. FLOPs). При этом в первом случае говорят о так называемой пространственной сложности алгоритма, в то время как во втором случае говорят о временной сложности алгоритма. Вычислительную сложность обычно обозначают как $O(N)$, где N указывает на размер входных данных алгоритма [105]. Выражение $O(N)$ обозначает асимптотическую сложность, которая имеет линейный порядок, при котором удвоение объема входных данных

приведет к удвоению времени работы алгоритма. При вычислительной сложности $O(N^2)$ удвоение размера входных данных приведет к четырехкратному увеличению времени работы алгоритма и так далее. Асимптотическая сложность $O(\cdot)$ обозначается без учета констант и слагаемых более низких порядков, присутствующих в точном выражении времени работы алгоритма. Вычислительная сложность алгоритмов зависит не только от объема входных данных, но и от их структуры. Для исключения влияния структуры входных данных на вычислительную сложность алгоритма при расчетах рассматривается наихудший вариант представления входных данных. На практике, вычислительная сложность в зависимости от целей исследования может рассчитываться в наихудшем, наилучшем и усредненном случаях [27].

Формализация требований к алгоритмам идентификации.

На сегодняшний день, одними из главных недостатков большинства современных подходов к построению моделей, препятствующих их внедрению на практике, являются их высокая вычислительная сложность. Современные производственные, технологические и технические системы, зачастую, являются сложными системами, относящимися к классу нелинейных динамических систем, функционирующих в условиях нестационарности. Анализ и моделированию таких систем сопутствуют ограничения вычислительных ресурсов, включающие ограничения на время вычислений, используемые объемы памяти, количество вычислительных операций и так далее [15].

Учитывая указанные особенности функционирования производственных объектов, в качестве основных требований к разработке алгоритмов идентификации и управления для нелинейных динамических объектов в условиях активного накопления информации можно выделить [15]:

1. Алгоритмы должны обеспечивать приемлемую точность идентификации нелинейных динамических систем;
2. Алгоритмы должны обеспечивать обработку непрерывного потока измерительной информации;

3. Алгоритмы должны иметь механизм или параметры, позволяющие настраивать количество вычислительных ресурсов, используемых в процессе решения задачи.

Указанные требования соответствуют имеющейся априорной информации о существующих производственных процессах, проходящих, например, при перекачке нефти и нефтепродуктов по магистральным трубопроводам [1-4, 8 -11]. Время вычисления управляющих воздействий и оценки параметров модели для таких процессов не должен превышать период измерения входных и выходных переменных, так как это может привести к рассогласованию процесса управления. Существующие требования к синтезу алгоритмов и соответствующие им постановки задачи идентификации и управления [68, 119] напрямую не позволяют учитывать наличие указанных ограничений. Поэтому для уточнения требований к синтезу алгоритмов идентификации предлагается следующая постановка задачи идентификации нелинейных дискретных динамических объектов в условиях активного накопления информации.

Постановка задачи идентификации.

Рассмотрим нелинейный объект, который описывается нелинейным разностным уравнением вида:

$$y_{n+1} = f(\mathbf{x}_n) + \varepsilon_n, \quad (1.2)$$

где $y_{n+1} \in \mathbb{R}$ – выходная переменная, $\mathbf{x}_n = [u_n, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-d-1}] \in \mathbb{R}^m$ – вектор входных переменных, d – порядок разностного уравнения.

Схема исследуемого класса объектов представлена на рисунке 1.2.

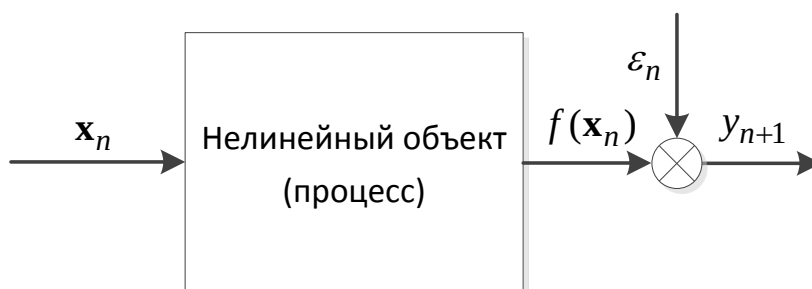


Рисунок 1.2 – Схема исследуемого нелинейного объекта

На вход объекта поступает контролируемое входное воздействие u_n . Переменные объекта u_n и y_n измеряются в дискретные моменты времени $n=1,2,\dots$ с некоторой постоянной периодичностью Δt . Известно, что выходная переменная y_n зависит как от контролируемой входной переменной u_n , так и от некоторого набора предыдущих значений выходных переменных $y_{n-1}, \dots, y_{n-d-1}$. Порядок разностного уравнения d считается известным по результатам его оценки или исходя из имеющейся априорной информации. Выходная переменная y_n подвержена влиянию независимых и нормально распределенных случайных помех $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Известно, что объект описывается зависимостью вида (1.2), но структура зависимости, заданная с точностью до параметров, неизвестна.

Критерий качества идентификации представляет собой среднее квадрата отклонения выходной переменной y_{n+1} от прогнозного значения выходной переменной $\hat{y}_{n+1}$, вычисленного моделью.

Объем памяти и количество вычислительных операций с плавающей точкой, используемых на каждом шаге $n=1,2,\dots$, являются ограниченными. Для учета ограничений алгоритмы идентификации и управления должны иметь параметры, позволяющие настраивать максимальное количество вычислительных ресурсов.

Необходимо, на основании наблюдений $\{\mathbf{x}_n, y_n\}$, поступающих в дискретные моменты времени $n=1,2,\dots$ осуществлять рекуррентную оценку параметров модели в соответствии с заданным критерием.

Предложенная постановка задачи идентификации и управления, в отличие от аналогичных [37, 38] позволяет учитывать наличие ограничений на вычислительные ресурсы, включающие ограничения на количество вычислительных операций и объемы памяти. Для учета ограничений вводится требование к алгоритмам идентификации, выраженное в наличии параметров, которые позволяют настраивать количество используемых вычислительных ресурсов [15].

Критерии оценки эффективности решения задач идентификации.

Для оценки эффективности качества решения задач идентификации применяются различные меры близости полученных прогнозных значений моделей, построенных с использованных предложенных алгоритмов, к экспериментальным данным, которые были неизвестны моделям.

В частности, рассматриваются следующие критерии [46]:

- среднеквадратическая ошибка

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (y_n - \hat{y}_n)^2. \quad (1.3)$$

- среднеквадратическое отклонение

$$\text{RMSE} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{n=1}^N (y_n - \hat{y}_n)^2}. \quad (1.4)$$

- средняя абсолютная ошибка

$$\text{MAE} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |y_n - \hat{y}_n|. \quad (1.5)$$

- средняя относительная среднеквадратическая ошибка

$$\text{MRSE} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (y_n - \hat{y}_n)^2}{\sum_{n=1}^N y_n^2}}, \quad (1.6)$$

где y_n - измерение, $\hat{y}_n$ - оценка выходной переменной.

Существует и другие критерии оценки качества моделей, которые помимо оценок выходных переменных используют, в частности, оценки дисперсии, что позволяет учитывать уровень неопределенности оценки. Более полный перечень критериев оценки эффективности решения задач идентификации приведен в [46].

Критерии линейности и нелинейности.

Одним из важнейших вопросов, возникающих при идентификации, является степень или мера нелинейности исследуемого объекта [31]. Несмотря на то, что

большинство существующих производственных и технологических объектов в той или иной степени являются нелинейными, информация о степени нелинейности объекта может быть использована для определения возможности применения линейных моделей или ядерных моделей с линейным ядром, которые являются значительно более простыми в эксплуатации и менее требовательными к вычислительным мощностям.

Сущность большинства существующих критериев оценки степени нелинейности состоит в проверке выполнения принципа суперпозиции [34]:

$$y_n(K\mathbf{x}_n) = Ky_n(\mathbf{x}_n), \quad (1.7)$$

$$y_n(\mathbf{x}_n^1 + \mathbf{x}_n^2) = y_n(\mathbf{x}_n^1) + y_n(\mathbf{x}_n^2), \quad (1.8)$$

где K – некоторая константа, $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{x}_n^1$, $\mathbf{x}_n^2$ – некоторые входные воздействия, $y_n(\cdot)$ – реакция объекта на соответствующее входное воздействие.

В частности, на основании принципа суперпозиции [34] могут быть сформированы следующие критерии нелинейности:

$$W_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(y_n(K \cdot 1_n) - K \cdot h_n \right)^2, \quad (1.9)$$

$$W_2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(y_n(\mathbf{x}_n^1 + \mathbf{x}_n^2) - y_n(\mathbf{x}_n^1) - y_n(\mathbf{x}_n^2) \right)^2, \quad (1.10)$$

где 1_n – единичное входное воздействие, h_n – реакция объекта на единичное входное воздействие (переходная функция).

Недостатками критериев (1.9) и (1.10) является необходимость подачи на объект единичного входного воздействия, что не всегда возможно.

В этом случае может применяться критерий на основе модели нелинейного динамического объекта в виде интеграла Дюамеля [7]:

$$W_3 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(y_n(\mathbf{x}_n) - \hat{y}_n(\mathbf{x}_n) \right)^2, \quad (1.11)$$

где $y_n(\mathbf{x}_n)$ – реакция объекта на тестовое входное воздействие $\mathbf{x}_n$, $\hat{y}_n(\mathbf{x}_n)$ – реакция модели в виде интеграла Дюамеля на идентичное тестовое входное воздействие $\mathbf{x}_n$.

Недостатком критерия (1.11) является его чувствительность к случайным помехам. В целях повышения помехоустойчивости критерия (1.10) реакция модели может быть предварительно сглажена. Другие известные критерии оценки степени нелинейности включают относительную меру нелинейности [35] и её различные модификации [5, 7].

Краткие сведения о ядерных методах идентификации.

Ядерные методы являются обобщением линейных методов оценки параметров. Построение ядерной модели и вычисление ее оценок начнем с рассмотрения задачи гребневой регрессии. Пусть $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times m}$ – матрица наблюдений входных переменных, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ – вектор наблюдений выходной переменной. Задача гребневой регрессии состоит в оценке вектора $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^m$

модели $\hat{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^m \beta_j x_n^j$, минимизирующего следующий критерий [99]:

$$R = \min_{\boldsymbol{\beta}} \sum_{i=1}^N \left(y_i - \sum_{j=1}^m \beta_j x_i^j \right)^2 + r \sum_{j=1}^m \beta_j^2 = \min_{\boldsymbol{\beta}} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\|^2 + r \|\boldsymbol{\beta}\|^2, \quad (1.12)$$

где $r > 0$ – коэффициент регуляризации.

Условие стационарности:

$$\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 2\mathbf{X}^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + 2r\boldsymbol{\beta} = 0, \quad (1.13)$$

откуда оценка вектора параметров $\boldsymbol{\beta}$ принимает вид:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + r\mathbf{E})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}, \quad (1.14)$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица размерности $m \times m$.

Из условия $2\mathbf{X}^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + 2r\boldsymbol{\beta} = 0$ можно показать, что

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{r} \mathbf{X}^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}). \quad (1.15)$$

Обозначив $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\alpha}$, где $\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{r}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$, критерий качества (1.12) может быть представлен в виде:

$$R = \min_{\boldsymbol{\alpha}} \left\| \mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{X}^T \boldsymbol{\alpha} \right\|^2 + r \left\| \mathbf{X}^T \boldsymbol{\alpha} \right\|^2. \quad (1.16)$$

Условие стационарности примет вид:

$$\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = 2\mathbf{X}^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{X}^T \boldsymbol{\alpha}) + 2r\mathbf{X}^T \boldsymbol{\alpha} = 0, \quad (1.17)$$

откуда следует, что критерий качества (1.16) достигает минимума при

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\mathbf{X}\mathbf{X}^T + r\mathbf{E})^{-1} \mathbf{y}, \quad (1.18)$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица размерности $N \times N$.

Матрица $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ в выражении (1.18) представляет собой матрицу Грама:

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_N^T \mathbf{x}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_N & \dots & \mathbf{x}_N^T \mathbf{x}_N \end{bmatrix}, \quad (1.19)$$

где $\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j$ – скалярное произведение векторов $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{x}_j$.

Основная идея ядерных методов состоит в замене скалярных произведений $\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j$ в матрице $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ на ядерные функции, удовлетворяющие условию [47]:

$$\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \varphi(\mathbf{x}_i)^T \varphi(\mathbf{x}_j), \quad (1.20)$$

где $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{H}$ – спрямляющее отображение.

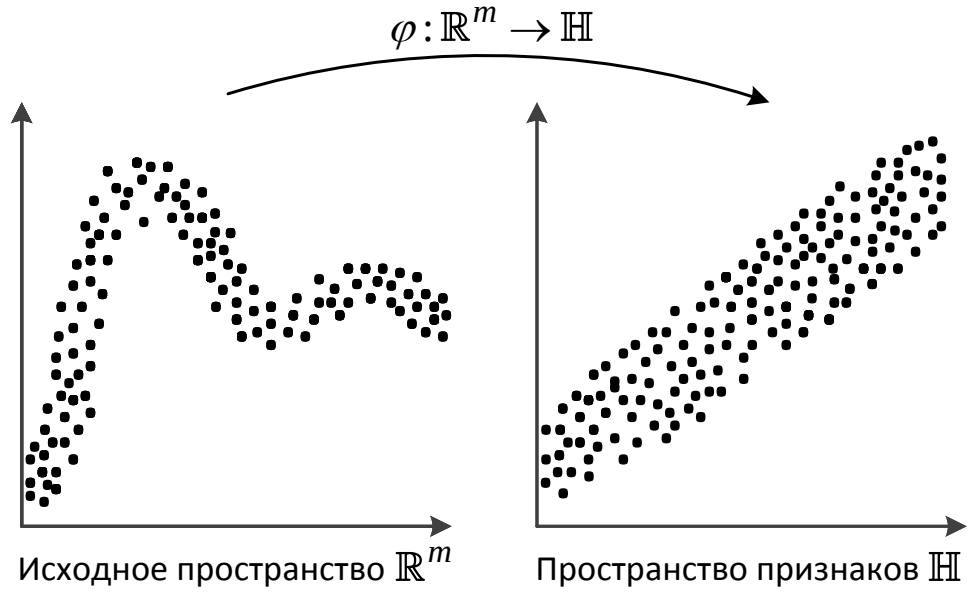


Рисунок 1.3 – Схематичное представление спрямляющего отображения

Для получения ядерного аналога гребневой регрессии рассмотрим оценку вектора параметров α , в которой к матрице $\mathbf{X}$ применено спрямляющее отображение φ :

$$\hat{\alpha} = \left(\varphi(\mathbf{X})\varphi(\mathbf{X})^T + r\mathbf{E} \right)^{-1} \mathbf{y}, \quad (1.21)$$

где матрица $\varphi(\mathbf{X})\varphi(\mathbf{X})^T$ имеет вид:

$$\varphi(\mathbf{X})\varphi(\mathbf{X})^T = \begin{bmatrix} \varphi(\mathbf{x}_1)^T \varphi(\mathbf{x}_1) & \dots & \varphi(\mathbf{x}_N)^T \varphi(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(\mathbf{x}_1)^T \varphi(\mathbf{x}_N) & \dots & \varphi(\mathbf{x}_N)^T \varphi(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

После замены скалярных произведений в выражении (1.22) на ядерные функции $\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ и обозначения $\mathbf{K} = \varphi(\mathbf{X})\varphi(\mathbf{X})^T$, оценка вектора параметров α примет вид:

$$\hat{\alpha} = (\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1} \mathbf{y}, \quad (1.23)$$

где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \kappa(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & \dots & \kappa(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_N) & \dots & \kappa(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_N) \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

Полученная в выражении (1.23) оценка вектора $\mathbf{a}$ соответствует модели, представляющей собой линейную комбинацию ядерных функций в точках обучающей выборки [99]:

$$\hat{y}_{n+1} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_n) = \mathbf{k}^T \mathbf{a}, \quad (1.25)$$

где $\mathbf{a} = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]^T$, $\mathbf{k}^T = [\kappa(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n), \dots, \kappa(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_n)]^T$.

Практическая реализация оценок параметров $\hat{\mathbf{a}}$ связана с необходимостью решения системы линейных уравнений $(\mathbf{K} + r\mathbf{E})\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{y}$. Учитывая тот факт, что матрица $\mathbf{K} + r\mathbf{E}$ является положительно определенной, одним из наиболее стабильных и эффективных в вычислительном плане методов решения системы уравнений $(\mathbf{K} + r\mathbf{E})\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{y}$ является разложение Холецкого или так называемый метод квадратного корня. Сущность метода квадратного корня состоит в разложении матрицы системы в виде произведения двух треугольных матриц [69]:

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{K} + r\mathbf{E}, \quad (1.26)$$

где $\mathbf{L}$ – нижняя треугольная матрица.

При известной матрице $\mathbf{L}$ решение системы уравнений $(\mathbf{K} + r\mathbf{E})\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{y}$ сводится к решению системы линейных уравнений $\mathbf{L}\mathbf{w} = \mathbf{y}$ методом прямой подстановки и решению системы $\mathbf{L}^T \mathbf{a} = \mathbf{w}$ методом обратной подстановки.

Алгоритм 1.1 Алгоритм вычисления матрицы $\mathbf{L}$

вход: матрица $\mathbf{K} + r\mathbf{E}$, N – размерность матрицы $\mathbf{K} + r\mathbf{E}$.

$\mathbf{A} = \mathbf{K} + r\mathbf{E}$, $\mathbf{L} = 0$,

для каждого $i = 1 \dots N$

 для каждого $j = 1 \dots i - 1$

$s_1 = 0$

 для каждого $k = 1 \dots j - 1$

$s_1 = s_1 + \mathbf{L}_{j,k} \mathbf{L}_{i,k}$

конец цикла

$\mathbf{L}_{i,j} = (\mathbf{A}_{i,j} - s_1) / \mathbf{L}_{j,j}$

конец цикла

$s_2 = 0$

 для каждого $k = 1 \dots j - 1$

$s_2 = s_2 + \mathbf{L}_{i,k} \mathbf{L}_{i,k}$

конец цикла

$\mathbf{L}_{i,i} = \sqrt{\mathbf{A}_{i,i} - s_2}$

конец цикла

выход: нижняя треугольная матрица $\mathbf{L}$.

Вычислительная сложность метода квадратного корня составляет $O(N^3)$, но при этом она несколько ниже других аналогичных методов на некоторую константную величину.

1.3 Рекуррентный ядерный алгоритм идентификации для нелинейных дискретных динамических объектов

Большое количество существующих объектов относятся к классу нелинейных и динамических объектов, эффективность функционирования которых напрямую зависит от применяемых методов моделирования и управления. В настоящее время, для решения этих задач широко применяются

методы нейросетевого моделирования [106], методы нечеткой логики [112], а также методы адаптивной ядерной идентификации [82]. Применительно к задачам адаптивной идентификации и управления, наиболее широкое применение получили ядерные методы. Ядерные методы являются развитием метода потенциальных функций [47], который основан на применении ядерных функций, задающих скалярное произведение между векторами в пространстве высокой размерности. В связи с тем, что большинство линейных методов при построении оценок используют скалярное произведение, замена последних на ядерные функции позволяет получить так ядерный аналог исходного линейного алгоритма оценки параметров. С помощью такого подхода в последние годы было получено множество различных ядерных алгоритмов [65, 79, 81, 99, 117]. Ключевая особенность ядерных алгоритмов заключается в том, что указанные алгоритмы позволяют использовать линейные рекуррентные алгоритмы оценки параметров для построения моделей нелинейных объектов. Платой за это является существенное увеличение размерности задачи, которая зависит от количества наблюдений в обучающей выборке, что является большим препятствием на пути их практического применения. В данной главе предлагается новый ядерный алгоритм идентификации нелинейных дискретных динамических объектов, позволяющий ограничить рост вычислительной сложности алгоритма при сохранении приемлемого качества идентификации. Предлагаемый алгоритм позволяет настраивать максимальный объем выборки, используемый в процессе идентификации.

Одной из главных проблем построения рекуррентных алгоритмов идентификации, основанных на моделях вида (1.25), является увеличение размерности системы уравнений (1.23) с увеличением количества наблюдений N в обучающей выборке. Это обстоятельство приводит к повышению вычислительной сложности алгоритма идентификации с течением времени. Для решения данной проблемы предлагается новый рекуррентный ядерный алгоритм

наименьших квадратов с фиксированным размером выборки, требующий $O(N^2)$ операций на каждом шаге.

Обозначим $\mathcal{D}_n = \{\mathbf{x}_n, y_n\}$, $n = \overline{1, N}$ в качестве выборки наблюдений на n шаге работы алгоритма. Представим модель (1.25) в рекуррентной виде:

$$\hat{y}_{n+1} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_n) = \mathbf{k}_n^T \mathbf{a}_{n-1}, \quad (1.27)$$

где $\mathbf{a}_{n-1} = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]^T$, $\mathbf{k}_n^T = [\kappa(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n), \dots, \kappa(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_n)]^T$.

Схема задачи идентификации нелинейного объекта при использовании рекуррентных ядерных алгоритмов представлена на рисунке 1.4 [89].

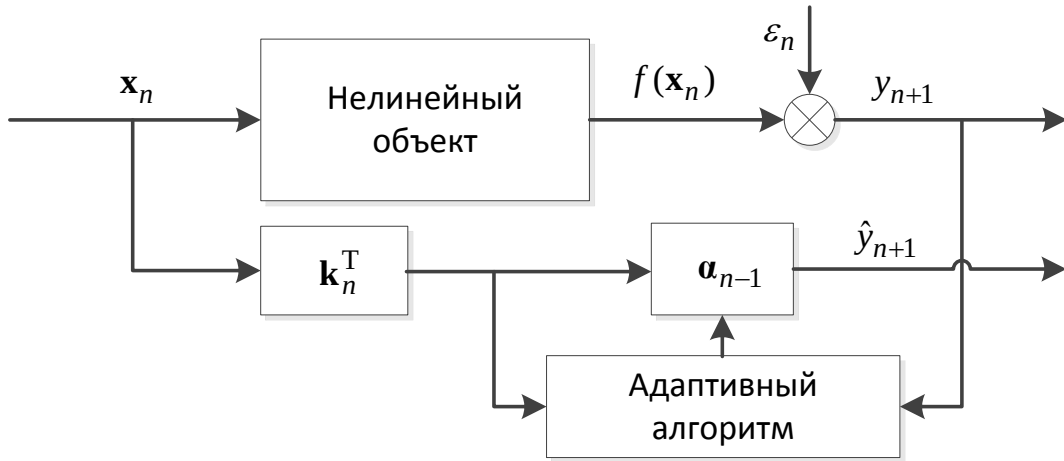


Рисунок 1.4 – Схема идентификации нелинейного объекта

В связи с тем, что матрица $\mathbf{K}_n + r\mathbf{E}$ является положительно определенной, она допускает описание в виде [69]:

$$\mathbf{K}_n + r\mathbf{E} = \mathbf{L}_n \mathbf{L}_n^T, \quad (1.28)$$

где $\mathbf{L}_n$ – это нижняя треугольная матрица.

Для построения рекуррентных оценок параметров $\mathbf{a}_n$ предлагается алгоритм, основанный на рекуррентной процедуре построения матричного разложения $\mathbf{K}_n + r\mathbf{E} = \mathbf{L}_n \mathbf{L}_n^T$.

Предположим, что на некотором шаге n известно матричное разложение $\mathbf{K}_n + r\mathbf{E} = \mathbf{L}_n \mathbf{L}_n^T$. Поставим задачу таким образом, что используя матрицу $\mathbf{L}_{n-1}$,

необходимо вычислить параметры $\mathbf{a}_n$ после поступления новой пары наблюдений $\{\mathbf{x}_n, y_n\}$. При добавлении нового наблюдения $\mathbf{x}_n$ матрица $\mathbf{K}_n + r\mathbf{E}$ примет вид:

$$\mathbf{K}_n + r\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{n-1} & \mathbf{k}_n \\ \mathbf{k}_n^T & \kappa(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n) + r \end{bmatrix}, \quad (1.29)$$

где $\mathbf{k}_n^T = [\kappa(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n), \dots, \kappa(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_n)]^T$.

Представив разложение $\mathbf{K}_n + r\mathbf{E} = \mathbf{L}_n \mathbf{L}_n^T$ в блочном виде, можно записать следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{n-1} & \mathbf{k}_n \\ \mathbf{k}_n^T & \kappa(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n) + r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{n-1} & 0 \\ \mathbf{l}_n^T & l_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{n-1} & 0 \\ \mathbf{l}_n^T & l_n \end{bmatrix}^T \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{n-1} & \mathbf{k}_n \\ \mathbf{k}_n^T & \kappa(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n) + r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{n-1} \mathbf{L}_{n-1}^T & \mathbf{L}_{n-1} \mathbf{l}_n \\ \mathbf{l}_n^T \mathbf{L}_{n-1}^T & \mathbf{l}_n^T \mathbf{l}_n + l_n^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{L}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{l}_n^T & l_n \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

откуда $\mathbf{l}_n = \mathbf{L}_{n-1}^{-1} \mathbf{k}_n$, $l_n = \sqrt{\kappa(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n) + r - \mathbf{l}_n^T \mathbf{l}_n}$.

Учитывая, что матрица $\mathbf{L}_{n-1}$ является нижней треугольной матрицей, вычисление вектора $\mathbf{l}_n$ осуществляется тривиально с помощью метода прямой подстановки, который требует $O(N^2)$ вычислительных операций.

При известной матрице $\mathbf{L}_n$ вычисление вектора $\mathbf{a}_n$ осуществляется следующим образом:

$$\mathbf{a}_n = (\mathbf{K}_n + r\mathbf{E})^{-1} \mathbf{y}_n = (\mathbf{L}_n \mathbf{L}_n^T)^{-1} \mathbf{y}_n = \mathbf{L}_n^{-T} (\mathbf{L}_n^{-1} \mathbf{y}_n), \quad (1.31)$$

что соответствует решению системы уравнений $\mathbf{L}_n \mathbf{w} = \mathbf{y}_n$ методом прямой подстановки и последующему решению системы уравнений $\mathbf{L}_n^T \mathbf{a}_n = \mathbf{w}$ методом обратной подстановки.

Для того чтобы ограничить рост вычислительной сложности алгоритма идентификации с ростом n предлагается следующая процедура. До достижения n некоторого фиксированного значения M , на каждом шаге n осуществляется подстройка матрицы $\mathbf{L}_n$ и параметров α_n в соответствии с выражениями (1.30) и (1.31), после чего поступившая пара наблюдений $\{\mathbf{x}_n, y_n\}$ добавляется в выборку:

$$\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_{n-1} \cup \{\mathbf{x}_n, y_n\}. \quad (1.32)$$

При достижении n некоторого фиксированного M , пара наблюдений, которой соответствует наименьшее абсолютное значение параметра α_i , исключается из выборки, полученной на $n-1$ шаге:

$$\mathcal{D}_{n-1} = \mathcal{D}_{n-1} \setminus \{\mathbf{x}_i, y_i\}, \text{ где } i = \arg \min |\alpha_i|. \quad (1.33)$$

После чего производится обновление матрицы $\mathbf{L}_n$ и параметров α_n . Обновление осуществляется следующим образом.

Представим разложение $\mathbf{K}_n + r\mathbf{E} = \mathbf{L}_n \mathbf{L}_n^T$ в блочном виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{k}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{k}_{12}^T & \kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) + r & \mathbf{k}_{23}^T \\ \mathbf{K}_{13}^T & \mathbf{k}_{23} & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{l}_{12}^T & l_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{13}^T & \mathbf{l}_{23}^T & \mathbf{L}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{l}_{12}^T & l_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{13}^T & \mathbf{l}_{23}^T & \mathbf{L}_{33} \end{bmatrix}^T. \quad (1.34)$$

При исключении i -го столбца и строки из матрицы $\mathbf{K}_n + r\mathbf{E}$, разложение $\mathbf{K}_n + r\mathbf{E} = \mathbf{L}_n \mathbf{L}_n^T$ примет вид:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{13}^T & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{13}^T & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{L}}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{13}^T & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{L}}_{33} \end{bmatrix}^T, \quad (1.35)$$

откуда $\bar{\mathbf{L}}_{33} \bar{\mathbf{L}}_{33}^T = \mathbf{L}_{33} \mathbf{L}_{33}^T + \mathbf{l}_{23} \mathbf{l}_{23}^T$.

Из полученного соотношения (1.25) видно, что при исключении i -го столбца и строки из матрицы $\mathbf{K}_n + r\mathbf{E}$ в соответствующей матрице $\mathbf{L}_n$ меняется только матрица $\mathbf{L}_{33}$. Алгоритм вычисления матрицы $\bar{\mathbf{L}}_{33}$ имеет следующий вид [108].

Алгоритм 1.2 Алгоритм вычисления матрицы $\bar{\mathbf{L}}_{33}$

вход: матрица $\mathbf{L}_{33}$, вектор $\mathbf{l}_{23}$, N – размерность вектора $\mathbf{l}_{23}$.

$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{33}$, $\mathbf{l} = \mathbf{l}_{23}$

для каждого $i = 1 \dots N$

$$r = \sqrt{\mathbf{L}_{i,i}^2 + \mathbf{l}_i^2}$$

$$c = r / \mathbf{L}_{i,i}$$

$$s = \mathbf{l}_i / \mathbf{L}_{i,i}$$

$$\mathbf{L}_{i,i} = r$$

если $i < N$

$$\mathbf{L}_{i+1:N,i} = (\mathbf{L}_{i+1:N,i} + s\mathbf{l}_{i+1:N}) / c$$

$$\mathbf{l}_{i+1:N} = c\mathbf{l}_{i+1:N} - s\mathbf{L}_{i+1:N,i}$$

конец если

конец цикла

$$\bar{\mathbf{L}}_{33} = \mathbf{L}$$

выход: нижняя треугольная матрица $\bar{\mathbf{L}}_{33}$.

В приведенном алгоритме индексами $i+1:N$ обозначается множество элементов от $i+1$ до N . Вычисление матрицы $\bar{\mathbf{L}}_{33}$ при известной матрице требует $O((N-i-1)^2)$ вычислительных операций.

Таким образом, предлагаемый рекуррентный ядерный алгоритм наименьших квадратов имеет следующий вид.

Алгоритм 1.3 Рекуррентный ядерный алгоритм наименьших квадратов с фиксированным объемом выборки (CH-KRLS)

вход: ядро κ , параметр регуляризации r , максимальный объем выборки M .

начало

Добавить наблюдение $\{\mathbf{x}_1, y_1\}$ в выборку $\mathcal{D}_1 = \{\mathbf{x}_1, y_1\}$.

Вычислить $\mathbf{L}_1 = \sqrt{\kappa(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) + r}$ и $\alpha_1 = \mathbf{L}_1^{-T} (\mathbf{L}_1^{-1} y_1)$.

для каждого $n = 2, 3, \dots$

если количество наблюдений в выборке $\mathcal{D}_{n-1} > M$

Найти индекс наименее значимого наблюдения $i = \arg \min |\alpha_i|$.

Исключить i -ое наблюдение из выборки $\mathcal{D}_{n-1} = \mathcal{D}_{n-1} \setminus \{\mathbf{x}_i, y_i\}$.

Вычислить матрицу $\mathbf{L}_n$ после исключения i -го наблюдения.

конец если

Добавить наблюдение $\{\mathbf{x}_n, y_n\}$ в выборку $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_{n-1} \cup \{\mathbf{x}_n, y_n\}$.

Вычислить вектор $\mathbf{k}_n^T = [\kappa(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n), \dots, \kappa(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_n)]^T$.

Вычислить вектор $\mathbf{l}_n = \mathbf{L}_{n-1}^{-1} \mathbf{k}_n$.

Вычислить матрицу $\mathbf{L}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{l}_n^T & \sqrt{\kappa(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n) + r - \mathbf{l}_n^T \mathbf{l}_n} \end{bmatrix}$.

Вычислить вектор $\alpha_n = \mathbf{L}_n^{-T} (\mathbf{L}_n^{-1} y_n)$.

конец цикла

выход: вектор оценок параметров α_n .

Вычислительная сложность алгоритма наименьших квадратов CH-KRLS составляет $O(M^2)$ операций, где M – максимальный объем выборки. Предложенный алгоритм CH-KRLS относится к классу алгоритмов локальной аппроксимации и является непараметрическим. В связи с этим, необходимо отметить некоторые особенности алгоритма, которые являются важными для понимания границ его применимости.

Во-первых, построение модели нелинейного динамического объекта с помощью предложенного алгоритма CH-KRLS осуществляется не на всем множестве входных и выходных переменных, а только на некотором окне

множества наблюдений объема M , которые в соответствии с критерием (1.23) являются наиболее информативными для оценки текущего состояния.

Во-вторых, качество модели, получаемой с помощью алгоритма CH-KRLS, зависит как максимального объема выборки M , так и от выбранной ядерной функции $\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$, значений параметров ядерной функции $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m]$ и коэффициента регуляризации r . Для обеспечения наибольшей эффективности алгоритма необходимо осуществлять настройку этих параметров.

В-третьих, при формировании выборки в качестве меры информативности наблюдений используется выражение $\arg \min |\alpha_i|$. На практике, эта мера не является оптимальной в терминах кросс-проверки. Как показано в работе [63], ошибка модели после исключения i -го наблюдения из выборки e_i рассчитывается следующим образом:

$$e_i = \frac{\alpha_i}{\left[(\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1} \right]_{i,i}}, \quad (1.36)$$

где обозначение $[\mathbf{A}]_{i,i}$ – i -ый диагональный элемент матрицы $\mathbf{A}$.

Поэтому оптимальным в терминах кросс-проверки является следующий критерий:

$$\arg \min \left| \frac{\alpha_i}{\left[(\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1} \right]_{i,i}} \right|. \quad (1.37)$$

Для вычисления критерия (1.37) требуется обратная матрица $(\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1}$, вычисление которой в предложенном алгоритме CH-KRLS избегается ввиду достаточно высокой вычислительной сложности. Тем не менее, как показано в работах [63, 97], а также в приведенных результатах вычислительных экспериментов, разница между критериями (1.33) и (1.37), в особенности для достаточно больших объемов выборок, не является существенной.

1.4 Численное исследование ядерного алгоритма идентификации

Тестирование предложенного алгоритма осуществлялось для различных задач идентификации по результатам 100 независимых запусков предложенного алгоритма CH-KRLS в сравнении с алгоритмом FB-KRLS [116] и алгоритмом KRLS-T [113]. В качестве ядра в ходе проведения численных экспериментов использовалось квадратичное экспоненциальное ядро:

$$\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^T \mathbf{P}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)\right) + r\delta_{ij},$$

где $\mathbf{P} = \text{diag}(\boldsymbol{\theta}^{-1})$, $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m]$ – вектор параметров ядерной функции.

Вычислительные эксперименты проводились следующим образом. Структура уравнения модели не известна, доступны только обучающие и тестовые выборки вида $\mathcal{D} = \{\mathbf{x}_n, y_n\}, n = \overline{1, N}$, где $\mathbf{x}_n = [u_n, y_n, \dots, y_{n-d}]$ это составной вектор. Глубина памяти модели d соответствует фактическому значению порядка разностного уравнения. Выборочные значения выходной переменной y_n подвергались воздействию случайной аддитивной помехи $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Перед началом экспериментов была произведена настройка вектора параметров $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m]$ и коэффициента регуляризации r для каждого алгоритма по обучающей выборке объемом $N=1000$ с помощью метода сопряженных градиентов в соответствии с критерием максимального правдоподобия. Полученные параметры использовались для обучения моделей по выборке объемом $N=2500$, в ходе которой производилось оценка затраченных вычислительных операций (FLOPs), времени работы (T), количества байт памяти (Bytes). На каждом шаге обучения производилось вычисление прогнозных значений модели по тестовой выборке объемом $N=1000$. Результаты полученных прогнозных значений использовались для вычисления среднеквадратической ошибки (MSE). С учетом того, что количество используемых вычислительных операций (FLOPs) и объемов памяти (Bytes) существенным образом зависит от

реализации алгоритмов, их оценка осуществлялась аналитически с помощью DSPKM-Toolbox [114].

Эксперимент 1. Рассмотрим объект, заданный нелинейным разностным уравнением вида [85]:

$$y_n = \frac{y_{n-1}y_{n-2}(y_{n-1} + 2.5)}{1 + y_{n-1}^2 + y_{n-2}^2} + u_{n-1},$$

где входное воздействие $u_n = \sin(2\pi n/25)$. Случайная помеха $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 0.29)$.

На рисунке 1.5 представлены результаты экспериментов, отображающие максимальное время работы алгоритмов (T), максимальное количество вычислительных операций (FLOPs), максимальное количество используемых байт памяти (Bytes), а также средние значения среднеквадратической ошибки идентификации (MSE) для различных значений максимального объема выборки M .

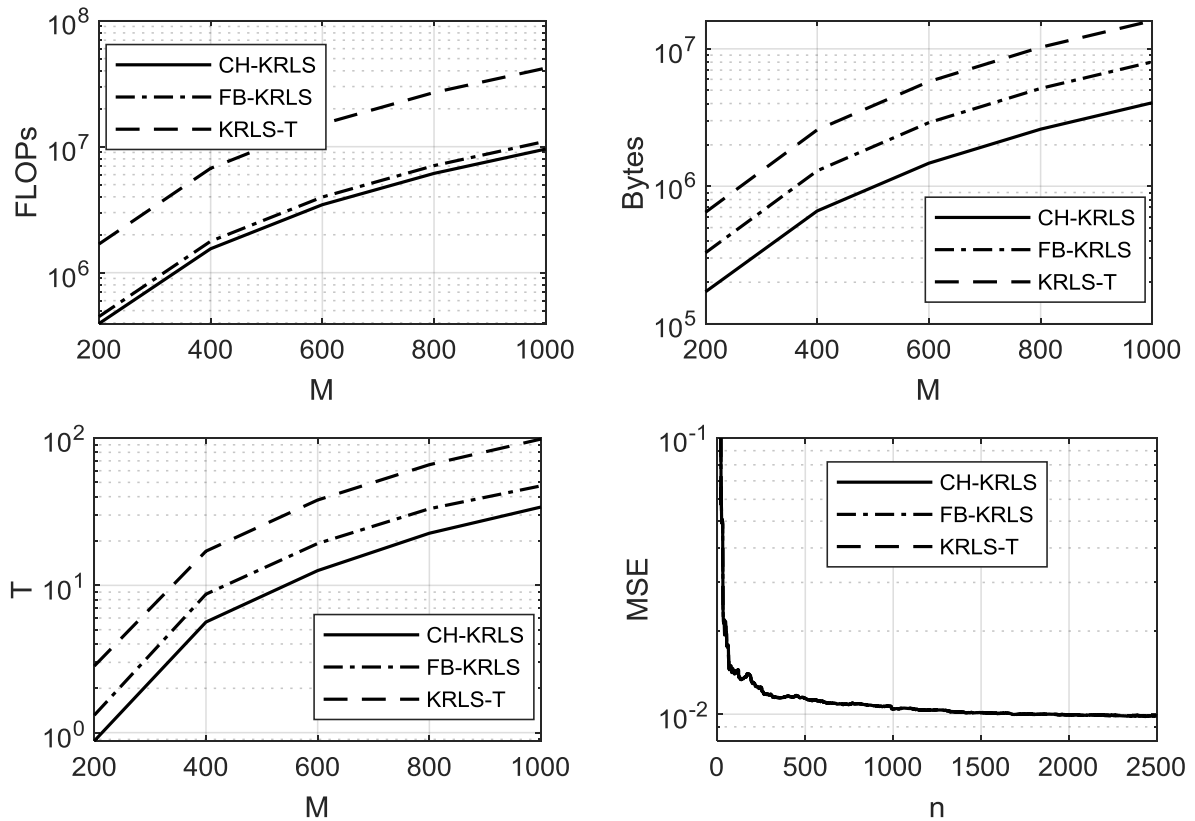


Рисунок 1.5 – Результаты численных экспериментов для первого объекта при случайной помехе $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 0.29)$

Эксперимент 2. Рассмотрим объект, заданный нелинейным разностным уравнением вида [68]:

$$y_n = \frac{y_{n-1}}{1 + y_{n-1}^2} + u_{n-1}^3,$$

где входное воздействие $u_n = \sin(2\pi n/25) + \sin(2\pi n/10)$, случайная помеха $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 0.65)$.

На рисунке 1.6 представлены результаты экспериментов, отображающие максимальное время работы алгоритмов (T), максимальное количество вычислительных операций (FLOPs), максимальное количество используемых байт памяти (Bytes), а также средние значения среднеквадратической ошибки идентификации (MSE) для различных значений максимального объема выборки M .

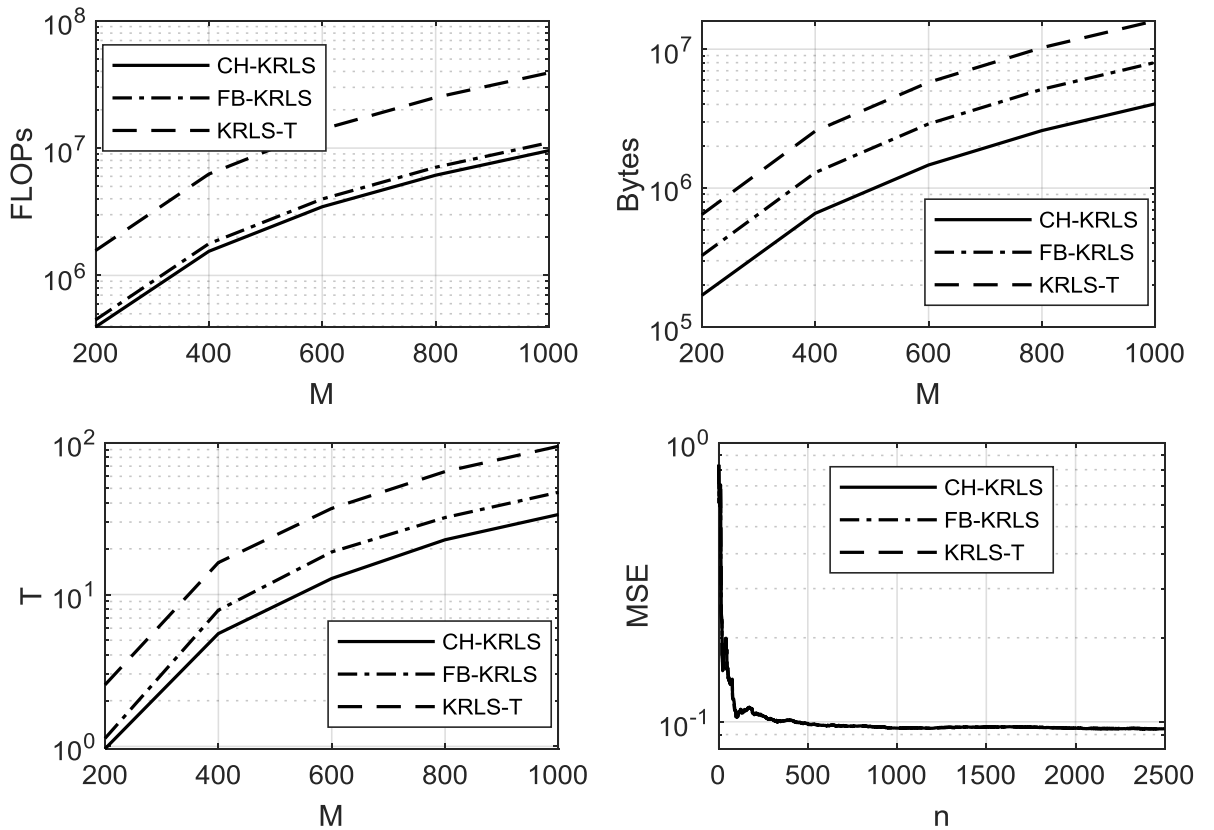


Рисунок 1.6 – Результаты численных экспериментов для второго объекта при случайной помехе $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 0.65)$

Эксперимент 3. Рассмотрим объект, заданный нелинейным разностным уравнением вида [68]:

$$y_n = \frac{y_{n-1}y_{n-2}y_{n-3}u_{n-2}(y_{n-3}-1) + u_{n-1}}{1 + y_{n-2}^2 + y_{n-3}^2},$$

где входное воздействие $u_n = \sin(2\pi n/250)$, помеха $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 0.18)$.

На рисунке 1.7 представлены результаты экспериментов, отображающие максимальное время работы алгоритмов (T), максимальное количество вычислительных операций (FLOPs), максимальное количество используемых байт памяти (Bytes), а также средние значения среднеквадратической ошибки идентификации (MSE) для различных значений максимального объема выборки M .

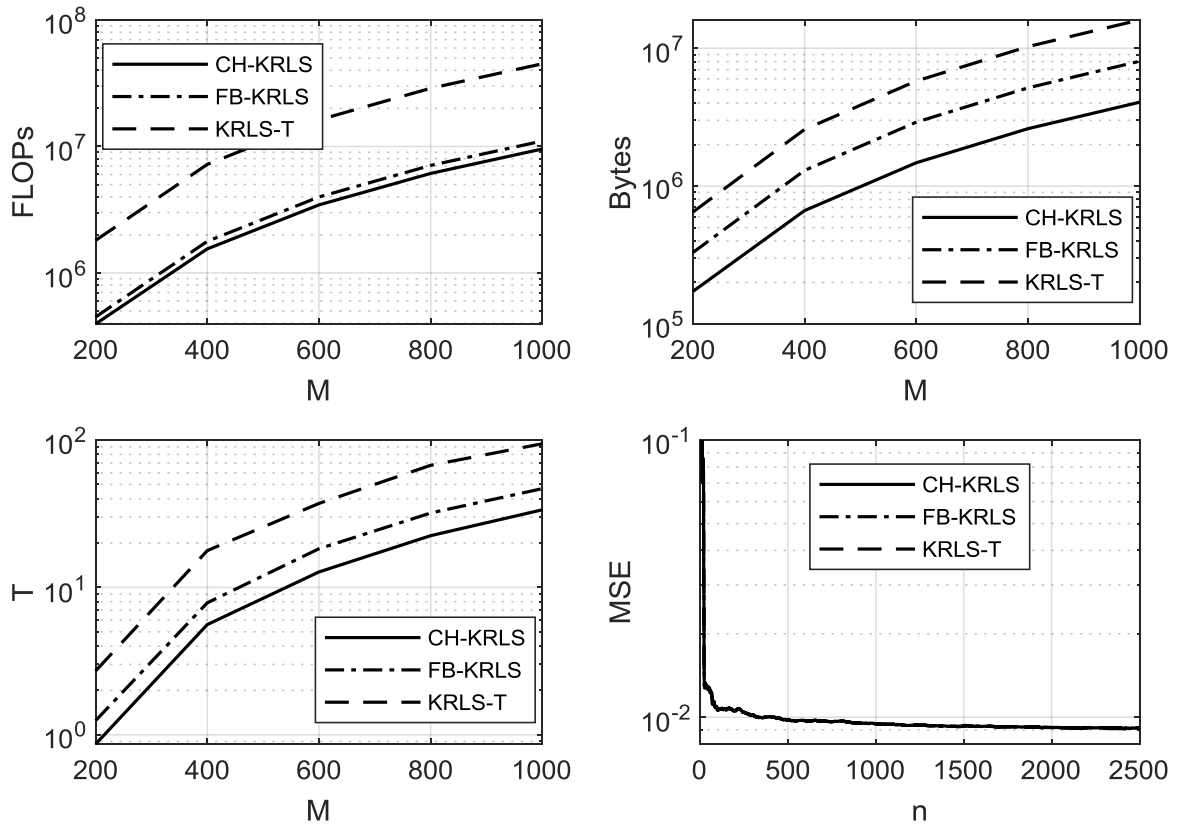


Рисунок 1.7 – Результаты численных экспериментов для третьего объекта при случайной помехе $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 0.18)$

Эксперимент 4. Рассмотрим объект, заданный нелинейным разностным уравнением вида:

$$y_n = \frac{y_{n-1}y_{n-2}(y_{n-1} + 2.5)}{1 + y_{n-1}^2 + y_{n-2}^2} + u_{n-1} + \mu_{n-1},$$

где входное воздействие $u_n = \sin(2\pi n/25)$, неконтролируемое входное воздействие $\mu_n = 0.1\sin(2\pi n/250)$, случайная помеха $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 0.29)$.

На рисунке 1.8 представлены результаты экспериментов, отображающие максимальное время работы алгоритмов (T), а также средние значения среднеквадратической ошибки идентификации (MSE) для различных значений максимального объема выборки M .

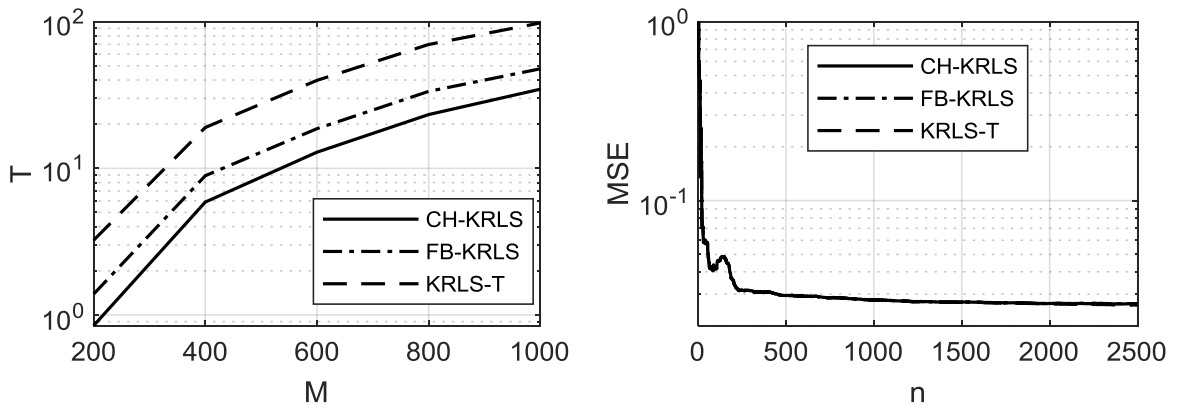


Рисунок 1.8 – Результаты численных экспериментов для четвертого объекта при случайной помехе $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 0.29)$

В таблице 1.2 приводятся результаты вычисления среднеквадратической ошибки идентификации (MSE) для различных тестовых объектов. В качестве объектов выступают нелинейные алгебраические и трансцендентные разностные уравнения. Схема настройки параметров ядерных функций идентичная предыдущим экспериментам. Для настройки параметров ядерных функций использовалась выборка объемом $N=1000$. Объем обучающей выборки алгоритма идентификации $N=1000$, объем тестовой выборки $N=500$. В качестве алгоритма идентификации использовался алгоритм CH-KRLS. Объем выборки в алгоритме

СН-KRLS ограничен величиной $M=200$. Управляющее воздействие для всех объектов $u_n = 0.25\sin(2\pi n/25) + 1.5$, случайная помеха $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0,0.1)$.

Таблица 1.2 – Среднеквадратические ошибки идентификации для различных нелинейных разностных уравнений

№	Вид уравнения	MSE
I. Нелинейные алгебраические разностные уравнения		
1	$y_n = \frac{y_{n-1}y_{n-2}(y_{n-1} + 2.5)}{1 + y_{n-1}^2 + y_{n-2}^2} + u_{n-1}$	0.0011
2	$y_n = 0.2y_{n-1} - 0.3y_{n-2} + 0.4\sqrt{y_{n-3}} + 1.5u_{n-1}$	0.0014
3	$y_n = 0.2y_{n-1} - 0.3y_{n-2}^2 + 0.4y_{n-3} + 1.5u_{n-1}$	0.0040
4	$y_n = \frac{y_{n-1}}{1 + y_{n-1}^2} + u_{n-1}^3$	0.0018
5	$y_n = \frac{y_{n-1}y_{n-2}y_{n-3}u_{n-2}(y_{n-3} - 1) + u_{n-1}}{1 + y_{n-2}^2 + y_{n-3}^2}$	0.0016
6	$y_n = 0.8y_{n-1} + u_{n-1}(u_{n-1} - 0.8)(u_{n-1} + 0.5)$	0.0024
II. Нелинейные трансцендентные разностные уравнения		
7	$y_n = 0.2\cos(y_{n-1}) - 0.3y_{n-2} + 0.4y_{n-3} + 1.5u_{n-1}$	0.0015
8	$y_n = 0.2\exp(y_{n-1}) - 0.3y_{n-2} + 0.4y_{n-3} - 1.5u_{n-1}$	0.0011
9	$y_n = 0.2\cos(y_{n-1}) - 0.3y_{n-2} + 0.4\sin(y_{n-3}) + 1.5u_{n-1}$	0.0013
10	$y_n = 0.3y_{n-1} + 0.6y_{n-2} + 0.3\sin(3\pi u_{n-1}) + 0.1\sin(5\pi u_{n-1})$	0.0017
11	$y_n = y_{n-1} - 0.5\tanh(y_{n-1} + u_{n-1}^3)$	0.0014
12	$y_n = 0.2\cos(y_{n-1}) - 0.3y_{n-2} + 0.4\sin(y_{n-3}) + 1.5u_{n-1}^2$	0.0023

На рисунке 1.9 представлен иллюстрация изменения среднеквадратической ошибки идентификации (MSE) по мере изменения такта идентификации (n). В связи с тем, что графики изменения среднеквадратической ошибки для различных уравнений из таблицы 1.2 практически идентичны, иллюстрация на рисунке 1.9 для наглядности представлена только для последнего разностного уравнения.

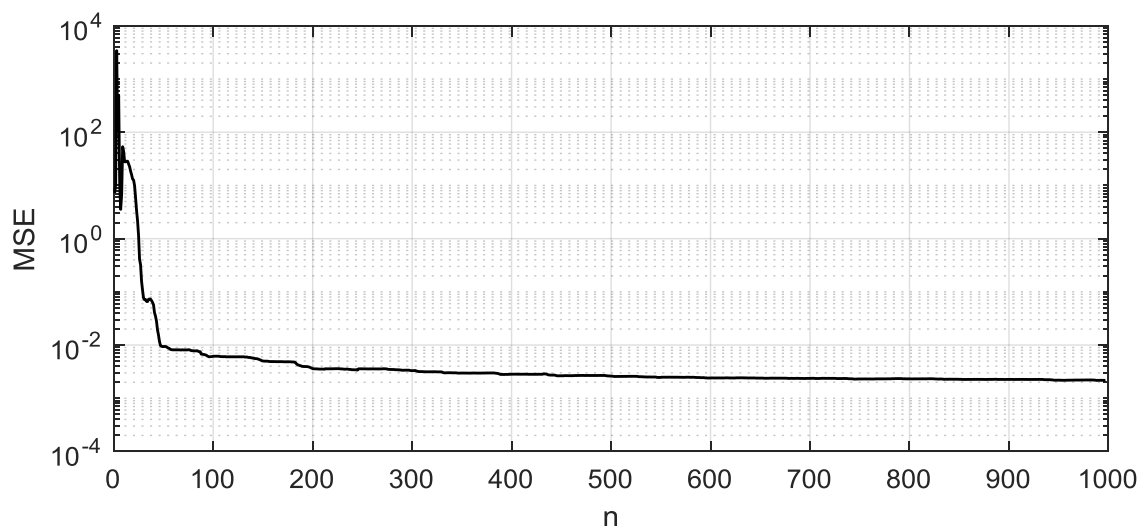


Рисунок 1.9 – Иллюстрация изменения среднеквадратической ошибки идентификации по мере изменения такта идентификации

На рисунке 1.9 видно, что с ростом такта идентификации ошибка снижается, достигая установившихся значений после обработки приблизительно 500 наблюдений из обучающей выборки. В соответствии с представленными в таблице 1.2 результатами вычисления среднеквадратической ошибки идентификации на представительном множестве нелинейных разностных уравнений можно сделать вывод, что предложенный алгоритм CN-KRLS обеспечивает решение задачи идентификации нелинейных дискретных объектов с памятью при использовании оптимальных параметров ядерных функций.

В таблице 1.3 приведены результаты численных экспериментов, включающее максимальное время работы алгоритмов в секундах (T), максимальное количество вычислительных операций (FLOPs), максимальное количество используемых байт памяти (Bytes), а также значения среднеквадратической ошибки идентификации

(MSE) для различных значений максимального объема выборки M . Так как полученные результаты для различных объектов являются практически идентичными, в таблице приводятся результаты только для первого объекта.

Таблица 1.3 – Сравнение вычислительной эффективности алгоритмов

Алгоритм	M	FLOPs	Bytes	T	MSE
CH-KRLS	200	394386	170448	1.0278	0.0139
	400	1548686	660848	7.0391	0.0133
	600	3447371	1471248	16.540	0.0131
	800	6116471	2601648	26.329	0.0131
	1000	9532583	4052048	37.426	0.0130
FB-KRLS	200	448054	328000	1.7138	0.0138
	400	1776054	1296000	10.175	0.0132
	600	3984054	2904000	21.911	0.0131
	800	7072054	5152000	37.475	0.0131
	1000	11040054	8040000	57.968	0.0130
KRLS-T	200	1687284	646416	3.7890	0.0136
	400	6734484	2572816	17.916	0.0131
	600	15141684	5779216	42.260	0.0130
	800	26908884	10265616	71.407	0.0130
	1000	42036084	16032016	101.20	0.0130

В соответствии с представленными в таблице 1.3 результатами можно сделать вывод о том, что предложенный алгоритм CH-KRLS требует в среднем на 15% меньше вычислительных операций и в 2 раза меньше памяти по сравнению с аналогичными алгоритмами. При этом результаты вычисления среднеквадратических ошибок идентификации для представительного множества нелинейных разностных уравнений свидетельствуют об отсутствии различий в качестве идентификации между алгоритмами, что подтверждается U-тестом Манна-Уитни с уровнем значимости $\alpha = 0.01$.

Таким образом, по результатам проведенных вычислительных экспериментов и результатам проверки статистической значимости полученных результатов можно сделать вывод о том, что предложенный алгоритм идентификации СН-KRLS позволяет повысить вычислительную эффективность в сравнении с аналогичными алгоритмами без существенной потери качества идентификации.

Выводы по первой главе

В первой главе приведены общие сведения о задаче идентификации, роли априорной информации при построении моделей на основании наблюдений входных и выходных переменных объекта, а также рассмотрены основные принципы управления. Проведен анализ ключевых требований к синтезу алгоритмов идентификации и управления для нелинейных динамических объектов при активном накоплении наблюдений в условиях неполной информации. По результатам анализа сформулирована формализованная постановка задачи идентификации и управления для нелинейных дискретных динамических объектов, которая позволяет уточнить требования к синтезу алгоритмов. Указанные требования включают приемлемое качество решения задачи, способность обработать большие объемы информации и возможность настройки количества вычислительных ресурсов, используемых в процессе идентификации и управления, позволяющей учитывать наличие ограничений на вычислительные ресурсы, такие как ограничения на время вычислений, объемы памяти и так далее.

Проведен сравнительный анализ основных методов и алгоритмов идентификации нелинейных динамических объектов. По результатам анализа установлено, что одним из ключевых недостатков существующих алгоритмов является высокая их вычислительная сложность и отсутствие параметров, позволяющих без существенной потери качества идентификации настраивать количество вычислительных ресурсов, которые используются в процессе идентификации. Для решения данной проблемы предложен новый рекуррентный

ядерный алгоритм идентификации для нелинейных дискретных динамических процессов. Проведено численное исследование алгоритма в сравнении с аналогичными алгоритмами на различных тестовых задачах идентификации нелинейных объектов. Результаты численных экспериментов показывают, что предложенный алгоритм позволяет повысить вычислительную эффективность решения задачи идентификации по количеству вычислительных операций и объемам памяти. При этом статистически потеря в качестве идентификации при использовании предложенного алгоритма в сравнении с аналогичными алгоритмами не является существенной, что подтверждается U-тестом Манна-Уитни с уровнем значимости $\alpha = 0.01$.

2 Управление нелинейными дискретными динамическими объектами

2.1 Общие сведения о задаче управления нелинейными динамическими объектами

В общем виде, задача управления состоит в определении управляющего воздействия (или последовательности управляющих воздействий), которое обеспечивает приведение выходной переменной объекта к желаемому значению [19]. Общая схема управления объектом приведена на рисунке 2.1.

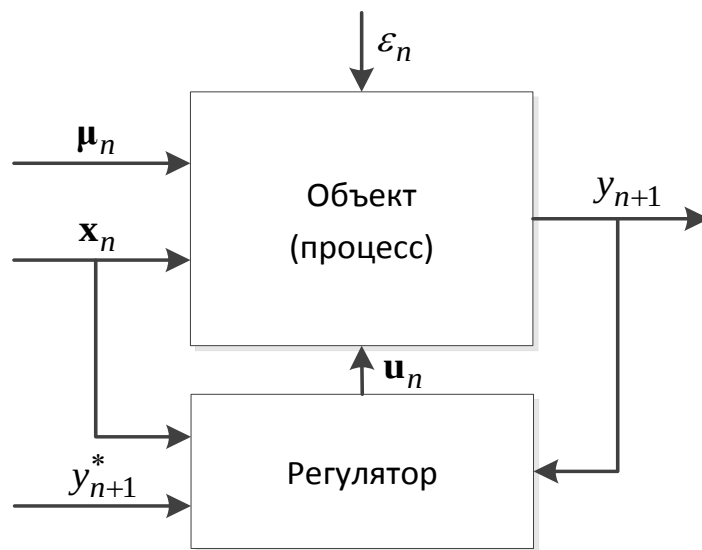


Рисунок 2.1 – Общая схема управления объектом (процессом)

На рисунке 2.1 приняты следующие обозначения: μ_n – вектор неконтролируемых входных воздействий; x_n – вектор контролируемых входных воздействий; u_n – вектор управляющих воздействий; y_n – выходная переменная; y_n^* – задающее воздействие; ε_n – случайная помеха, действующая на объект.

Постановка задачи управления.

На вход объекта (1.1) поступает контролируемое входное воздействие u_n . Переменные объекта u_n и y_n измеряются в дискретные моменты времени $n=1,2,\dots$ с некоторой постоянной периодичностью Δt . Известно, что выходная переменная y_n зависит как от контролируемой входной переменной u_n , так и от

некоторого набора предыдущих значений выходных переменных $y_{n-1}, \dots, y_{n-d}$. Порядок разностного уравнения d считается известным по результатам его оценки или исходя из имеющейся априорной информации. Выходная переменная y_n подвержена влиянию независимых и нормально распределенных случайных помех $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Известно, что объект описывается зависимостью вида (1), но структура зависимости, заданная с точностью до параметров, неизвестна.

Критерий качества идентификации представляет собой среднее квадрата отклонения выходной переменной y_{n+1} от прогнозного значения выходной переменной $\hat{y}_{n+1}$, вычисленного моделью.

Объемы памяти и количество вычислительных операций с плавающей точкой, используемых на каждом шаге $n=1, 2, \dots$, являются ограниченными. Для учета ограничений алгоритмы идентификации и управления должны иметь параметры, позволяющие настраивать максимальное количество вычислительных ресурсов.

Необходимо, на основании наблюдений $\{x_n, y_n\}$, поступающих в дискретные моменты времени $n=1, 2, \dots$ осуществлять оценку контролируемой входной переменной u_n , обеспечивающей приведение выходной переменной объекта y_{n+1} к заданному значению y_{n+1}^* .

Основные принципы управления.

Прежде всего, необходимо отметить, что классическая теория управления, включающая теорию оптимального управления, теорию автоматического регулирования, а также теорию адаптивного управления, первоначально разрабатывалась для решения задач управления линейными динамическими объектами, а большинство существующих на сегодняшний день алгоритмов управления нелинейными динамическими объектами базируются на идее линеаризации. На практике, такие методы не всегда позволяют обеспечить приемлемое качество управления нелинейными динамическими системами [32].

Задачи управления нелинейными объектами встречаются во многих областях науки и техники, и от качества их решения зависит эффективность и надежность функционирования таких процессов и объектов. В связи с этим, разработка и исследование новых методов и алгоритмов управления для нелинейных динамических объектов является актуальной задачей.

В основе любого алгоритма управления лежат один или несколько фундаментальных принципов управления. В общем случае, выделяют следующие фундаментальные принципы управления [17]:

1. Принцип разомкнутого управления.

Основная идея данного принципа заключается в оценке управляющих воздействий на основании модели объекта, определяющей функциональную зависимость между входными и выходными переменными, при этом фактические значения управляемой величины не контролируются.

Схематичное представление данного принципа изображено на рисунке 2.2.

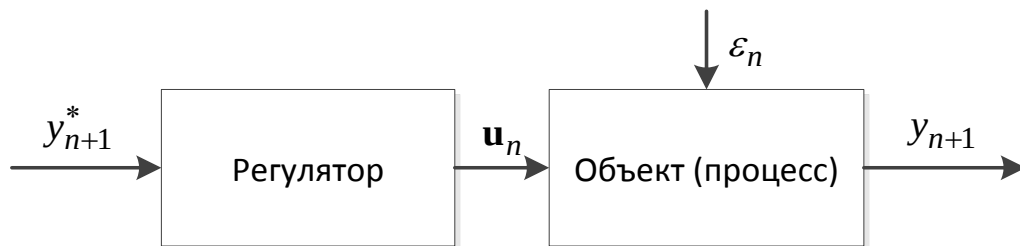


Рисунок 2.2 – Разомкнутая схема управления

Стабильность работы разомкнутой схемы управления обеспечивается жестким соответствием управляющего воздействия u_n и управляемой переменной y_n . На практике, разомкнутая схема управления работает только при отсутствии внешних входных воздействий и существенных случайных помех.

2. Принцип обратной связи.

Данный принцип основан на формировании управляющего воздействия по отклонению фактического значения выходной переменной y_n и задающего воздействия y_n^* . Схема управления на основе принципа обратной связи представлена на рисунке 2.3.

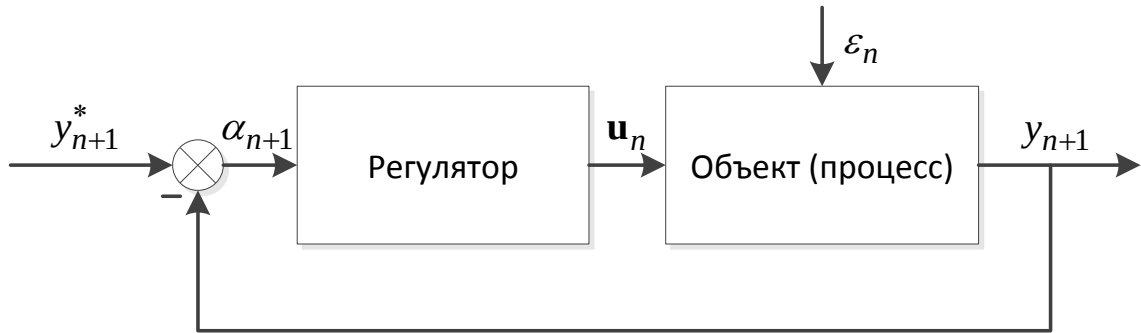


Рисунок 2.3 – Схема управления по отклонению

На рисунке 2.3 отклонение $\alpha_n = L(y_n - y_n^*)$, где L – функция, определяющая закон управления. Принцип управления по отклонению (принцип обратной связи) является универсальным принципом, который встречается во многих существующих природных, технических и социальных процессах.

3. Принцип управления по возмущению.

При формировании управляющего воздействия u_n на основе принципа обратной связи используется только отклонение задающего воздействия y_n^* от управляемой переменной y_n . На практике, на объект могут влиять внешние контролируемые входные воздействия z_n . Принцип управления по возмущению заключается в компенсации внешних входных воздействий z_n и отклонения α_n . Общая схема управления по возмущению представлена на рисунке 2.4.

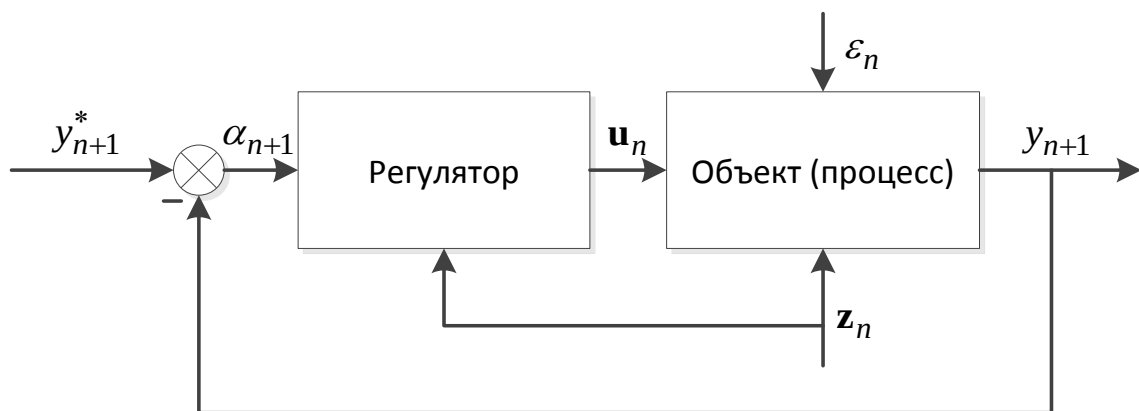


Рисунок 2.4 – Схема управления по возмущению

В схеме управления по возмущению, представленной на рисунке 2.4, управляющее воздействие u_n формируется как на основании отклонения α_n , так и на основании возмущающего воздействия z_n .

Существующие подходы к решению задачи управления нелинейными динамическими объектами можно условно разделить на следующие группы:

1. Регуляторы с планированием усиления [77, 95, 96].

Данный класс регуляторов основан на использовании наблюдений входных и выходных переменных объекта для настройки параметров типовых регуляторов (П, ПИ, ПИД) на некотором предварительно заданном множестве режимов работы объекта. Когда объект переходит в один из заданных режимов, параметры регулятора изменяются на новый набор оптимальных параметров, определенных по некоторой обучающей выборке, полученной в результате наблюдений за входными и выходными переменными в заданном режиме работы. Процедура построения таких регуляторов базируется на том, что нелинейный объект может быть представлен в виде совокупности линейных объектов, параметры которых зависят от времени и заданного режима работы объекта. Указанный подход является одним из самых распространенных подходов к управлению нелинейными динамическими объектами в ситуации, когда отсутствуют неконтролируемые внешние воздействия, влияющие на нелинейный объект, и при этом известны все возможные режимы работы объекта.

2. Управление с использованием обратной модели объекта [86, 87].

Сущность подхода состоит во включении обратной модели управляемого объекта в разомкнутую схему управления. Этот подход базируется на идее о том, что если известна модель, заданная в виде некоторого оператора, и известна обратная модель, то при их последовательном включении в разомкнутую схему управления выход объекта будет соответствовать задающему воздействию. На практике, такой подход работает только при отсутствии неконтролируемых внешних воздействий, отсутствии колебаний и существенных случайных помех, влияющих на объект. При этом оператор и обратный оператор объекты должны

быть оценены достаточно точно, в противном случае, из-за отсутствия обратной связи, такой регулятор может быть нестабильным.

3. Оптимальное управление [70].

Основная идея оптимального управления состоит в построении некоторого функционала качества управления и его оптимизации, позволяющей оценить функцию управления, которая обеспечивает желаемую траекторию движения объекта. В качестве модели нелинейного объекта или процесса используется модель в виде дифференциальных или разностных уравнений, заданных в пространстве состояний, начальные условия и время являются известными. Недостатками данного подхода являются необходимость наличия известной модели нелинейного объекта в виде дифференциального или разностного уравнения, а также наличие информации о начальных условиях.

4. Управление с идентификатором [91, 103].

Сущность данного подхода заключается в следующем. Предположим, что известна модель нелинейного динамического объекта, на основании которой можно вычислить некоторый набор будущих значений выходной переменной объекта. Используя модель и сформировав некоторый критерий качества управления, можно вычислить набор управляющих воздействий, которые минимизируют (максимизируют) заданный критерий качества при условии, что выход объекта принимает желаемые значения. Полученные значения оценок управляющего воздействия подаются на вход объекта, после чего регистрируется значение выходной переменной и производится уточнение управляющих воздействий согласно описанной выше процедуре.

5. Адаптивное и дуальное управление [44, 48, 66].

Рассматривая различные задачи управления и методы их решения, можно заключить, что высокое качество их решения с использованием описанных выше подходов обеспечивается только при наличии достаточно точной модели исследуемого нелинейного динамического объекта или процесса. В случае если происходит изменение условий эксплуатации объекта, условий окружающей

среды, либо изменение структуры объекта, цель управления в виду изменения модели такого объекта достигаться не будет. При этом такие условия достаточно часто соответствуют фактическому уровню априорной информации, имеющейся об объекте. Для решения задачи управления в данных условиях необходимо построение систем управления, которые могут адаптироваться к изменениям внешних воздействий и условий окружающей среды. Для адаптации таких систем управления управляющее воздействие формируется не только для достижения цели управления, но и для изучения управляемого объекта. Эта идея лежит в основе принципа дуального управления, предложенного А.А. Фельдбаумом [44]. Адаптация к условиям функционирования объекта достигается с помощью моделей, основанных на наблюдениях входных и выходных переменных, которые являются непосредственным носителем информации о текущем состоянии объекта. Изменения в условиях эксплуатации, окружающей среды, либо изменения структуры объекта приводит к изменениям в состоянии объекта, которые могут быть зафиксированы с помощью наблюдений входных и выходных переменных.

Необходимо отметить, что алгоритм управления нелинейным объектом может быть основан на некоторой комбинации из описанных выше подходов.

Устойчивость нелинейных динамических систем.

Устойчивость является одним из важнейших свойств нелинейной системы, определяющих её способность возвращаться в равновесное состояние или к циклическим колебаниям после внешнего возмущения [73, 107]. Большинство существующих методов анализа устойчивости нелинейных динамических систем основаны на теории устойчивости Ляпунова [17, 29, 30, 45].

В терминах теории устойчивости Ляпунова под устойчивостью понимается способность системы удерживаться в некоторой окрестности начала координат при начальных условиях, находящихся в указанной окрестности [29]. Если траектория системы сходится к началу координат, то говорят об асимптотической

устойчивости, а если траектория системы сходится к началу координат быстрее экспоненциальной функции, то говорят об экспоненциальной устойчивости [29].

В общем случае различают локальную и глобальную устойчивость. При локальной устойчивости поведение системы вблизи равновесного состояния практически соответствует её линеаризованной аппроксимации. Глобальная устойчивость системы обозначает асимптотическую или экспоненциальную устойчивость для любых начальных условий [29].

Для анализа устойчивости исследуемой системы в теории Ляпунова используются прямой и непрямой методы [29]. Прямой метод состоит в построении так называемой функции Ляпунова, которая отображает изменение энергии системы с течением времени. Прямой метод используется для анализа глобальной устойчивости системы. Непрямой метод Ляпунова используется для анализа локальной устойчивости системы и состоит в применении линеаризованной аппроксимации нелинейной системы для определения её устойчивости с помощью аналитических методов.

В совокупности, существующие методы анализа устойчивости нелинейных систем базируются на наличии системы нелинейных дифференциальных уравнений, заданной аналитически, и последующем анализе свойств данной системы для различных начальных условий и внешних входных воздействий.

На практике, такой уровень априорной информации об исследуемом объекте соответствует уровню параметрической неопределенности или байесовскому уровню. Таким образом, в условиях отсутствия информации о структуре нелинейного объекта анализ устойчивости может осуществляться только с помощью численных экспериментов на моделях [30].

Критерии оценки качества управления нелинейными объектами.

Критерии оценки качества управления во многом схожи с критериями, которые используются для оценки качества модели. Для оценки качества решения задач управления используются различные меры близости значений выходной переменной и задающего воздействия. Как правило, используются

среднеквадратическая ошибка (MSE), абсолютная ошибка (MAE) или среднеквадратическое отклонение (RMSE).

При наличии переходных функций для оценки качества управления также используются так называемые прямые оценки качества управления, включающие время регулирования (t_p), перерегулирование (Δh), время достижения первого максимума ($t_{\max}$), частота колебаний (ω), количество колебаний и так далее [19].

2.2 Рекуррентный ядерный алгоритм управления для нелинейных дискретных динамических объектов

Рассмотрим задачу управления нелинейным дискретным объектом с памятью, которая состоит в определении управляющего воздействия u_n , обеспечивающего приведение выходной переменной объекта y_{n+1} к заданному значению y_{n+1}^* . На рисунке 2.5 представлена схема решения задачи управления нелинейным дискретным объектом с памятью с использованием ядерной модели (2).

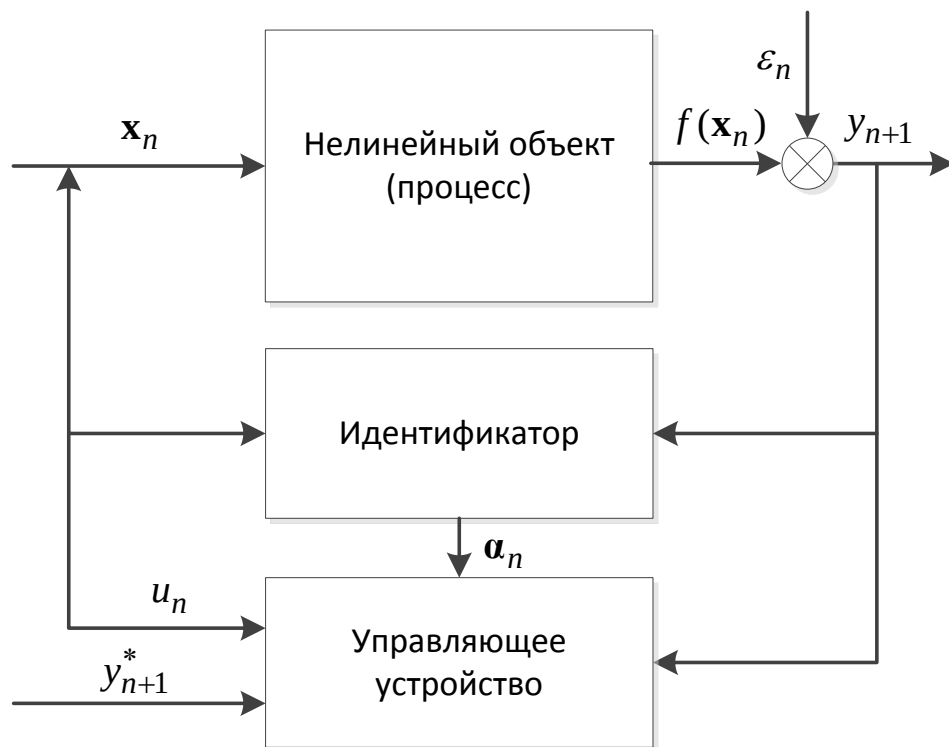


Рисунок 2.5 – Схема идентификации и управления нелинейным объектом

На рисунке 2.5 вектор входных переменных $\mathbf{x}_n = [u_n, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-d-1}]$.

Рекуррентный ядерный алгоритм дуального управления.

Рассмотрим следующий квадратичный критерий качества управления:

$$R = \mathbf{M} \left\{ e_{n+1}^2 \right\} \rightarrow \min_{u_n}, \quad e_{n+1}^2 = (y_{n+1}^* - \hat{y}_{n+1})^2, \quad (2.1)$$

где y_{n+1}^* – задающее воздействие, $\hat{y}_{n+1}$ – прогнозное значение выходной переменной.

Запишем частную производную $\partial R / \partial u_n$:

$$\frac{\partial R}{\partial u_n} = \mathbf{M} \left\{ \frac{\partial e_{n+1}^2}{\partial u_n} \right\} = \mathbf{M} \left\{ -2(y_{n+1}^* - \hat{y}_{n+1}) \frac{\partial \hat{y}_{n+1}}{\partial u_n} \right\}. \quad (2.2)$$

Для ядерной модели (1.17) производная $\partial \hat{y}_{n+1} / \partial u_n$ имеет вид:

$$\frac{\partial \hat{y}_{n+1}}{\partial u_n} = \frac{\partial \mathbf{k}_n^T}{\partial u_n} \mathbf{a}_{n-1}, \quad \frac{\partial \mathbf{k}_{n+1}^T}{\partial u_n} = \left[\frac{\partial \kappa(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{n+1})}{\partial u_n}, \frac{\partial \kappa(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_{n+1})}{\partial u_n}, \dots, \frac{\partial \kappa(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_{n+1})}{\partial u_n} \right]^T. \quad (2.3)$$

Для произвольной дифференцируемой по u_n ядерной функции $\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$, выражение (2.3) является неразрешимым относительно u_n , что не позволяет представить управляющее воздействие u_n в явном виде. Для решения этой проблемы предлагается в качестве алгоритма оценки управляющего воздействия $\hat{u}_{n+1}$ использовать следующую итерационную процедуру:

$$\hat{u}_{n+1} = \hat{u}_n - d_n \left(\frac{\eta}{2} \frac{\partial e_{n+1}^2}{\partial u_n} - \Delta \hat{u}_n \right), \quad (2.4)$$

где η – длина шага, d_n – коэффициент нечувствительности.

Коэффициент нечувствительности d_n позволяет ограничить изменение управляющего воздействия $\hat{u}_{n+1}$, вызванное влиянием случайной помехи, вблизи задающего воздействия y_{n+1}^* .

Коэффициент нечувствительности d_n может быть задан следующим образом:

$$d_n = \begin{cases} 1, & \text{если } |y_n^* - y_n| \geq \delta \\ 0, & \text{если } |y_n^* - y_n| < \delta \end{cases}, \quad (2.5)$$

где δ – ширина зоны нечувствительности.

Подставив полученные оценки производной критерия (2.2) и (2.3) в выражение (2.4) получим следующее рекуррентное соотношение:

$$\hat{u}_{n+1} = \hat{u}_n + d_n \left(\eta(y_{n+1}^* - \hat{y}_{n+1}) \frac{\partial \mathbf{k}_n^T}{\partial u_n} \mathbf{a}_{n-1} + \Delta \hat{u}_n \right). \quad (2.6)$$

Итоговый алгоритм управления нелинейными дискретными объектами имеет следующий вид.

Алгоритм 2.1 Ядерный алгоритм управления нелинейными дискретными объектами с памятью с коэффициентом нечувствительности (KRDC)

вход: ядро κ , длина шага η , задающее значение y_{n+1}^* , оценка выходной переменной $\hat{y}_{n+1}$, входная u_n и выходная y_n переменные, вектор оценок параметров $\mathbf{a}_n$, ширина зоны нечувствительности δ , объем выборки M .

начало

Использовать текущее значение $\hat{u}_1 = u_1$.

для каждого $n = 2, 3, \dots$

если $|y_n^* - y_n| \geq \delta$, то

Вычислить прогноз выхода $\hat{y}_{n+1} = \mathbf{k}_n^T \mathbf{a}_{n-1}$.

Вычислить поисковый шаг $\Delta \hat{u}_n = \gamma(y_n^* - y_n)$.

Вычислить $\hat{u}_{n+1} = \hat{u}_n + \eta(y_{n+1}^* - \hat{y}_{n+1}) \frac{\partial \mathbf{k}_n^T}{\partial u_n} \mathbf{a}_{n-1} + \Delta \hat{u}_n$.

иначе

Использовать предыдущую оценку $\hat{u}_{n+1} = \hat{u}_n$.

конец если

конец цикла

выход: оценка управляющего воздействия $\hat{u}_{n+1}$.

Предложенный алгоритм KRDC относится к классу алгоритмов управления с идентификатором. Вычислительная сложность алгоритма KRDC составляет $O(M)$ вычислительных операций, где M – максимальный объем выборки. Настройку параметров η , δ и γ алгоритма KRDC осуществляется после оптимизации параметров ядерной функции $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m]$ и коэффициента регуляризации r . Более подробная информация о методах настройки параметров предложенного ядерного алгоритма идентификации CH-KRLS и ядерного алгоритма дуального управления KRDC приводится в третьей главе настоящей работы.

2.3 Численное исследование ядерного алгоритма дуального управления нелинейными объектами с памятью

Численное исследование предложенного ядерного алгоритма дуального управления KRDC осуществлялось в условиях малых объемов выборок, наличия случайных помех и неконтролируемых входных воздействий. В качестве ядра в ходе проведения численных экспериментов использовалось квадратичное экспоненциальное ядро:

$$\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^T \mathbf{P}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)\right) + r\delta_{ij},$$

где $\mathbf{P} = \text{diag}(\boldsymbol{\theta}^{-1})$ – диагональная матрица, $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m]$ – вектор параметров ширины ядра для m входных переменных.

Вычислительные эксперименты проводились следующим образом. Структура модели объекта, заданная с точностью до параметров, не известна, доступны только наблюдения входной $\mathbf{x}_n = [u_n, u_n, \dots, u_{n-d}]$ и выходной y_n переменных. Глубина памяти модели d соответствует фактическому значению порядка разностного уравнения. Выборочные значения выходной переменной y_n подвергались воздействию случайной аддитивной помехи $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

В качестве алгоритма идентификации использовался алгоритм CH-KRLS. Максимальный объем выборки $M=200$ для всех экспериментов. Перед началом

экспериментов производилась настройка вектора параметров ширины ядерной функции $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m]$ и коэффициента регуляризации r по обучающей выборке объемом $N=1000$ с помощью метода сопряженных градиентов в соответствии с критерием максимального правдоподобия. Предварительное обучение модели не производилось, т.е. модель обучалась в процессе управления.

Эксперимент 1. Рассмотрим объект, заданный нелинейным разностным уравнением вида [85]:

$$y_n = \frac{y_{n-1}y_{n-2}(y_{n-1} + 2.5)}{1 + y_{n-1}^2 + y_{n-2}^2} + u_{n-1}.$$

На рисунках 2.6 и 2.7 представлены примеры управления нелинейным дискретным объектом с памятью для различных уровней случайной помехи.

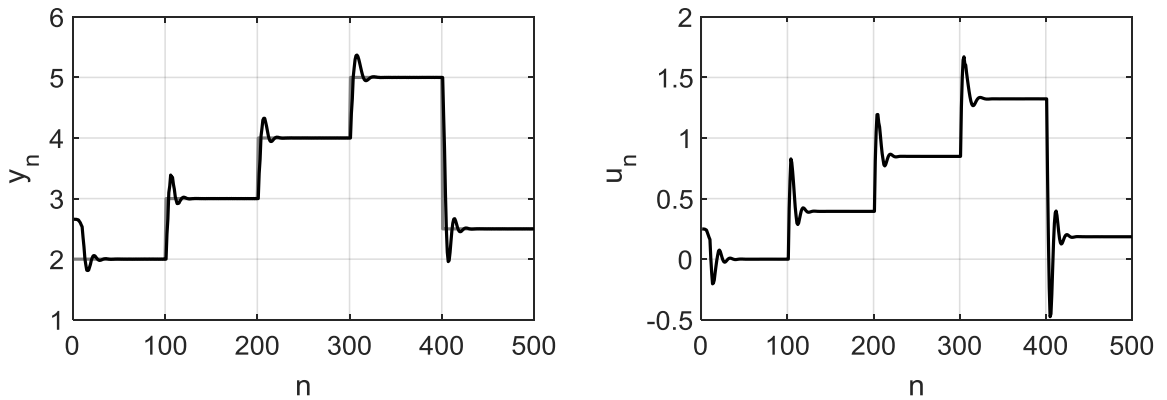


Рисунок 2.6 – Иллюстрация работы ядерного алгоритма дуального управления при помехе $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 0.001)$, параметры $\delta = 0.001$, $\eta = 0.01$, $\gamma = 0.001$

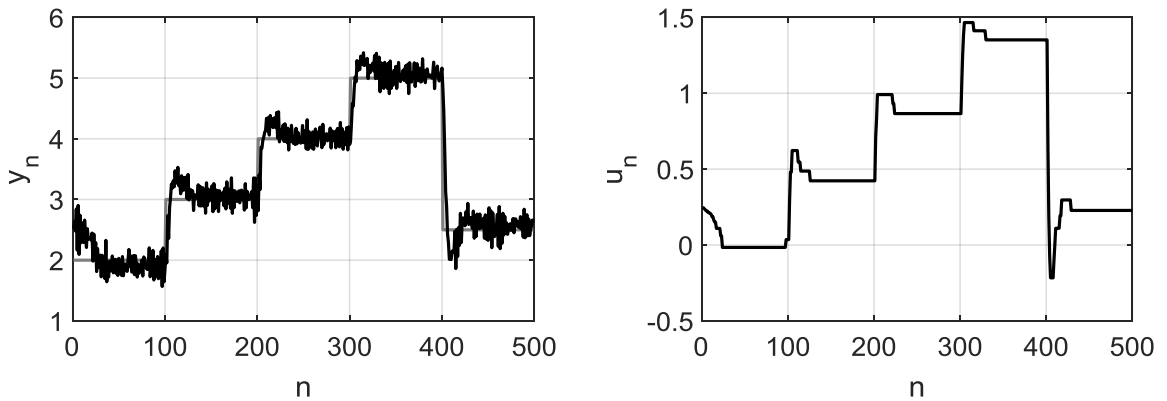


Рисунок 2.7 – Иллюстрация работы ядерного алгоритма дуального управления при помехе $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 0.29)$, параметры $\delta = 0.4$, $\eta = 0.01$, $\gamma = 0.01$

На рисунке 2.8 представлены графики изменения изучающих шагов Δu_n в зависимости от такта управления n . Наибольшие значения изучающих шагов приходятся на такты, в которых происходит изменение требуемого значения выходной переменной. По мере изучения объекта и приведения значения выходной переменной к требуемому значению, поисковые шаги уменьшаются.

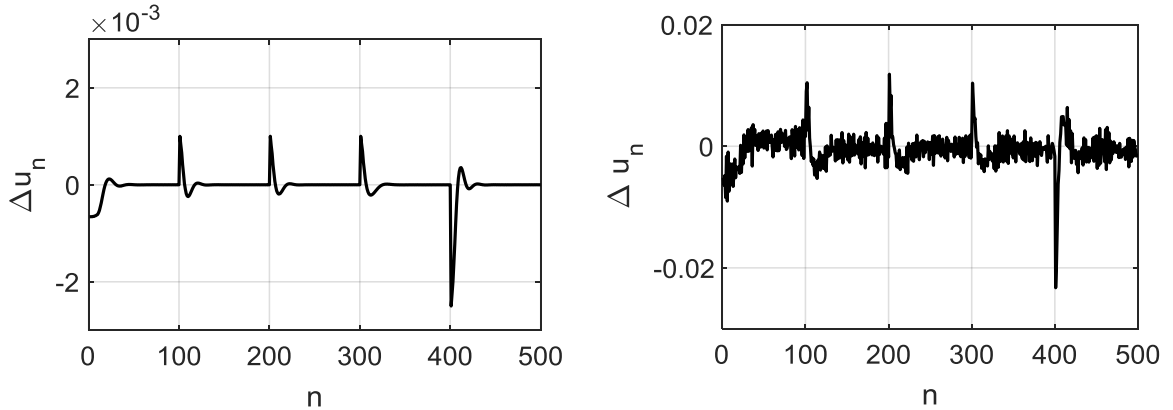


Рисунок 2.8 – Изучающая добавка Δu_n при $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 0.001)$ (слева) и $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 0.29)$ (справа)

Эксперимент 2. Рассмотрим объект, заданный нелинейным разностным уравнением вида [85]:

$$y_n = \frac{y_{n-1}}{1 + y_{n-1}^2} + u_{n-1}^3.$$

На рисунках 2.9 и 2.10 представлены примеры управления нелинейным дискретным объектом с памятью для различных уровней случайной помехи.

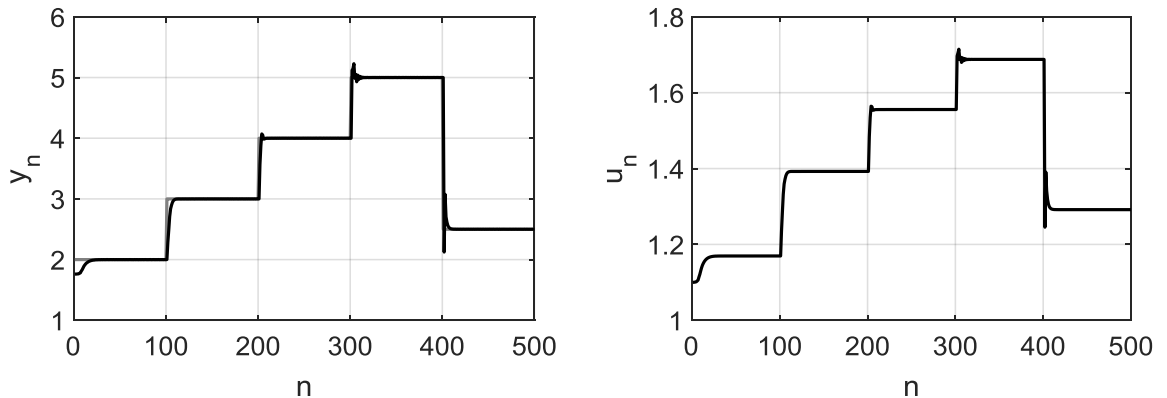


Рисунок 2.9 – Иллюстрация работы ядерного алгоритма дуального управления при помехе $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 0.001)$, параметры $\delta = 0.001$, $\eta = 0.01$, $\gamma = 0.001$

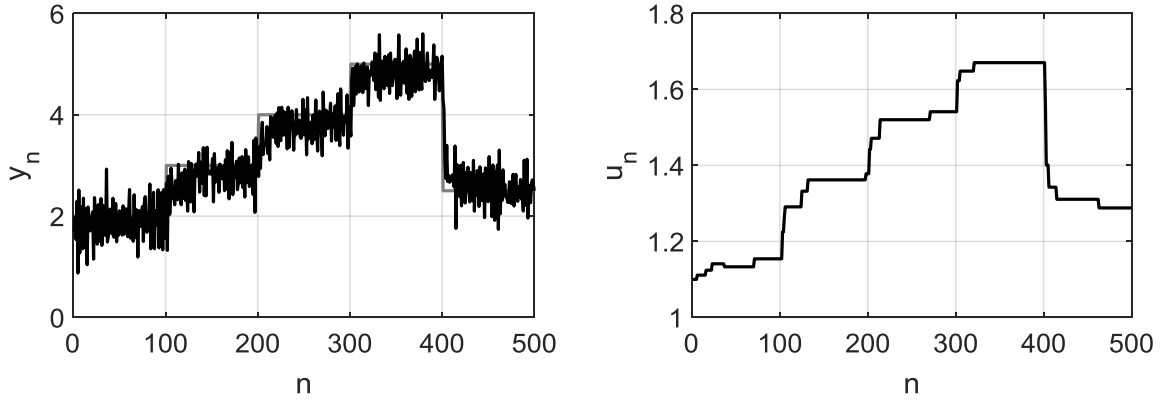


Рисунок 2.10 – Иллюстрация работы ядерного алгоритма дуального управления при помехе $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 0.65)$, параметры алгоритма $\delta = 0.8$, $\eta = 0.01$, $\gamma = 0.1$

Эксперимент 3. Рассмотрим объект, заданный нелинейным разностным уравнением вида [68]:

$$y_n = \frac{y_{n-1}y_{n-2}y_{n-3}u_{n-2}(y_{n-3} - 1) + u_{n-1}}{1 + y_{n-2}^2 + y_{n-3}^2}.$$

На рисунках 2.11 и 2.12 представлены примеры управления нелинейным дискретным объектом с памятью для различных уровней случайной помехи.

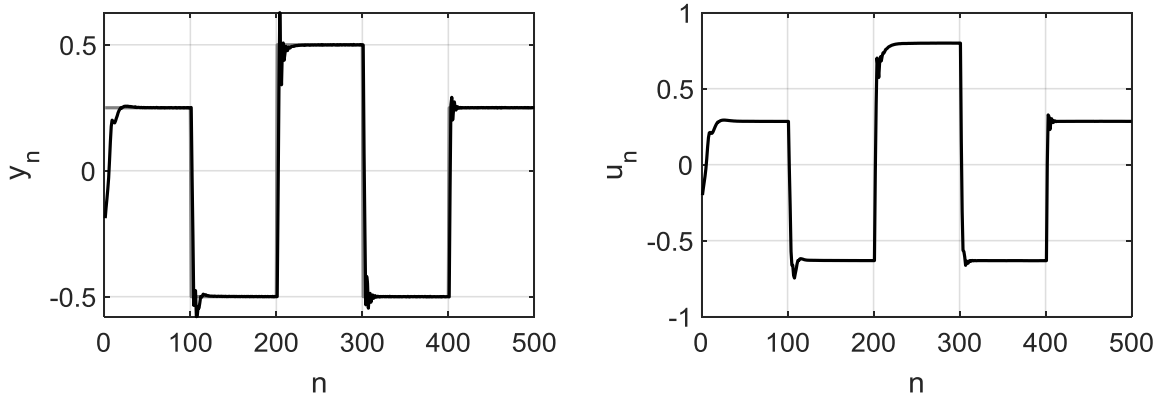


Рисунок 2.11 – Иллюстрация работы ядерного алгоритма дуального управления при случайной помехе $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 0.001)$, параметры алгоритма $\delta = 0.001$, $\eta = 0.1$, $\gamma = 0.1$

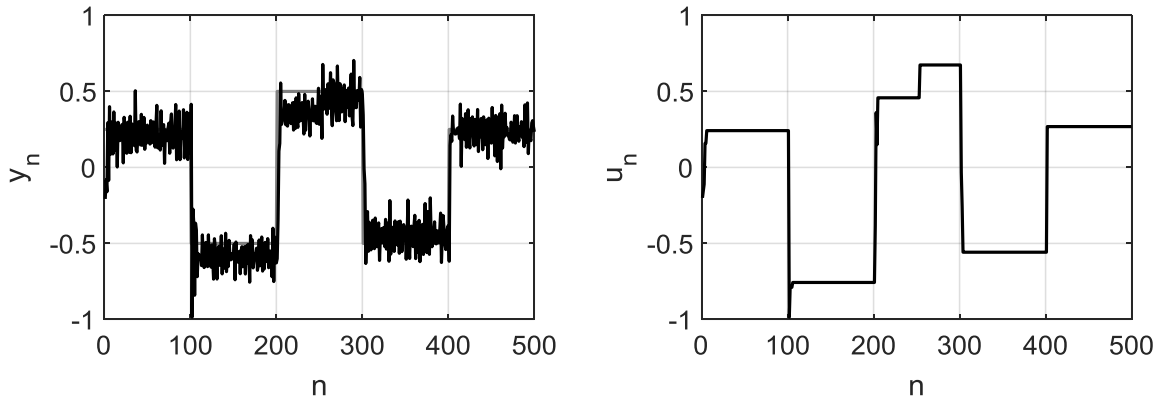


Рисунок 2.12 – Иллюстрация работы ядерного алгоритма дуального управления при случайной помехе $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 0.001)$, параметры алгоритма $\delta = 0.3$, $\eta = 0.6$, $\gamma = 0.1$

Эксперимент 4. Рассмотрим объект, заданный нелинейным разностным уравнением вида:

$$y_n = \frac{y_{n-1}y_{n-2}(y_{n-1} + 2.5)}{1 + y_{n-1}^2 + y_{n-2}^2} + u_{n-1} + \mu_{n-1},$$

где неконтролируемое входное воздействие $\mu_n = 0.1\sin(2\pi n/250)$.

На рисунках 2.13 и 2.14 представлены примеры управления нелинейным дискретным объектом с памятью для различных уровней случайной помехи.

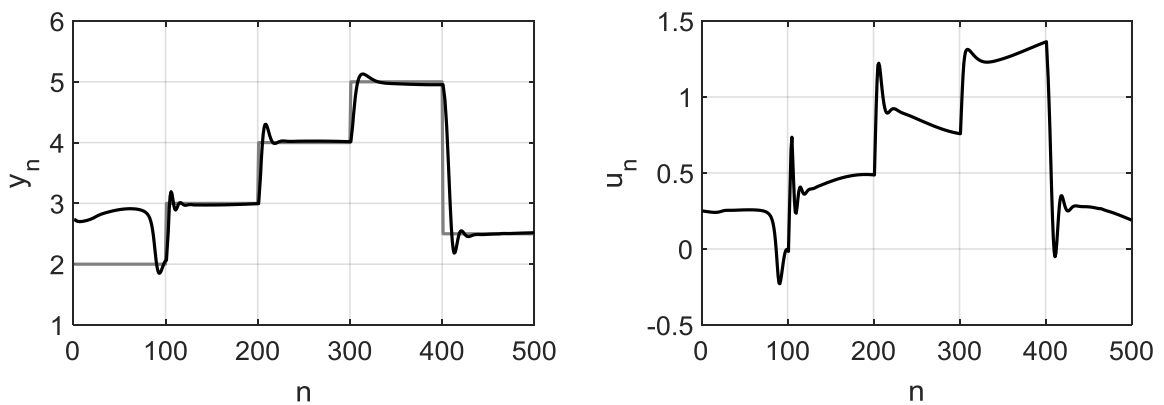


Рисунок 2.13 – Иллюстрация работы ядерного алгоритма дуального управления при помехе $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 0.001)$, параметры $\delta = 0.001$, $\eta = 0.01$, $\gamma = 0.001$

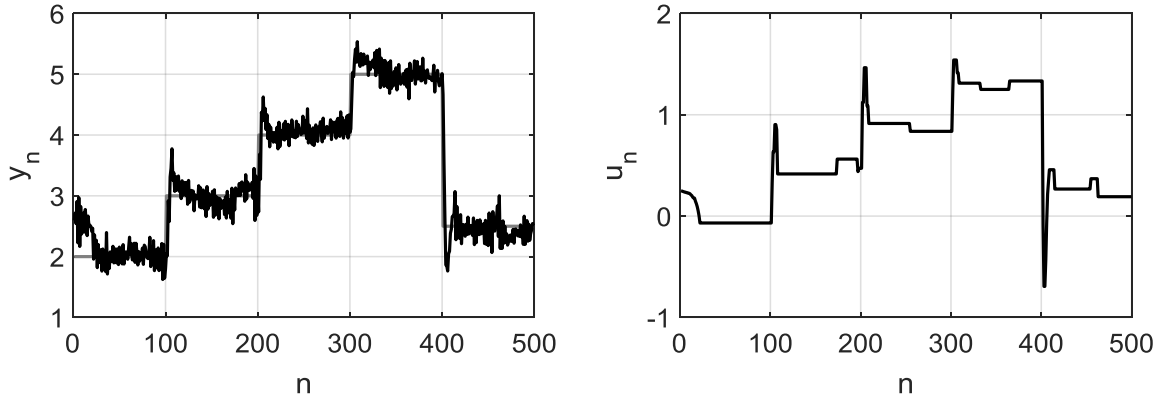


Рисунок 2.14 – Иллюстрация работы ядерного алгоритма дуального управления при помехе $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 0.29)$, параметры $\delta = 0.4$, $\eta = 0.005$, $\gamma = 0.005$

На рисунке 2.15 представлены графики изменения изучающих шагов Δu_n в зависимости от такта управления n .

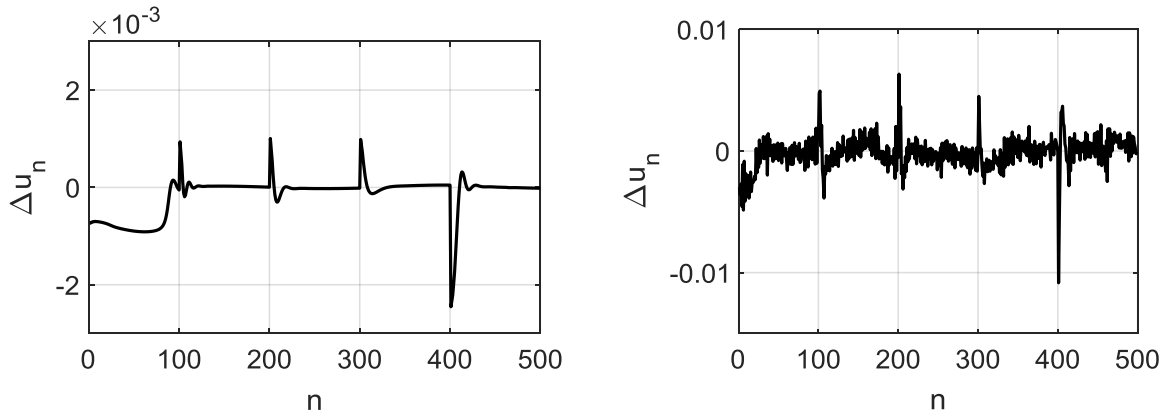


Рисунок 2.15 – Изучающая добавка Δu_n при помехе $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 0.001)$ (слева) и $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 0.29)$ (справа).

Исходя из полученных результатов численных экспериментов, можно сделать вывод, что предложенный алгоритм управления KRDC позволяет оценивать управляющее воздействие для нелинейных дискретных объектов с памятью при отсутствии информации о структуре модели в условиях влияния существенной аддитивной помехи и неконтролируемых входных воздействий. Кроме того, результаты вычислительных экспериментов показывают, что предложенный алгоритм может осуществлять управление нелинейным

дискретным объектом в условиях малых выборок, даже при большой случайной помехе. Немаловажной особенностью предложенного алгоритма управления является возможность его работы в условиях непрерывного поступления новых наблюдений.

2.4 Управление нелинейными динамическими объектами с хаотическим поведением

Некоторые нелинейные динамические системы в определенных условиях демонстрируют хаотическое поведение. Несмотря на то, что такие системы являются детерминированными и подчиняющимися определенным строгим законам, поведение таких систем кажется случайным и непредсказуемым. Хаотические системы характеризуются наличием одного или нескольких аттракторов, притягивающих все траектории движения системы в некоторой окрестности [122]. Примером хаотического процесса являются турбулентные потоки нефти в трубопроводах, которые возникают при нагнетании давления насосными агрегатами. Учитывая сложный характер функционирования хаотических процессов, управление нелинейными объектами с хаотическим поведением представляет существенный интерес. В частности, одним из актуальных вопросов является принципиальная возможность управления хаотическими процессами с помощью предложенных ядерных алгоритмов идентификации и управления.

Эксперимент 5. Рассмотрим применение ядерного алгоритма дуального управления на следующем нелинейном дифференциальном уравнении [83]:

$$\frac{dy_n}{dn} = -by_n + \frac{ay_{n-\tau}}{1 + y_{n-\tau}^{10}} + u_n, \quad (2.7)$$

где $a = 0.2$, $b = 0.1$, $\tau = 30$.

На рисунке 2.16 приведен график траектории движения системы (2.7) при начальном условии $y_0 = 1.2$. Решение дифференциального уравнения (2.7) осуществлялось методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом $\Delta n = 1$.

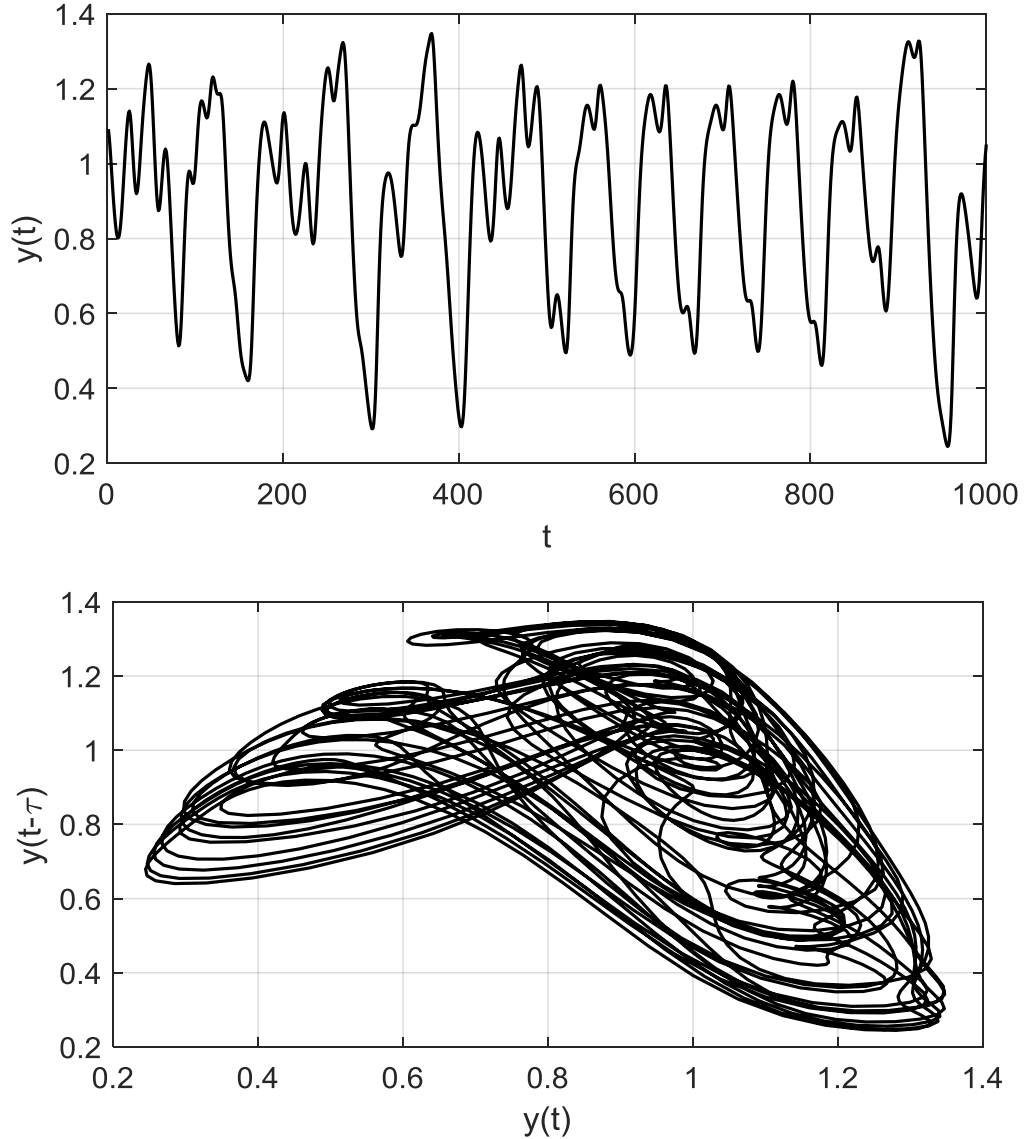


Рисунок 2.16 – Траектория хаотического процесса с несколькими аттракторами.

В ходе эксперимента в качестве алгоритма идентификации использовался алгоритм CH-KRLS, в качестве алгоритма управления алгоритм KRDC. Случайная помеха $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 0.001)$. Максимальный объем выборки $M=250$. Глубина памяти модели $d=30$. Настройка параметров ядерной функции $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m]$ и коэффициента регуляризации r осуществлялось по обучающей выборке объемом $N=2000$ методом сопряженных градиентов в соответствии с критерием максимального правдоподобия. Предварительное обучение модели не производилось, т.е. модель обучалась в процессе управления. Параметры ядерного алгоритма дуального управления $\delta = 0.001$, $\eta = 0.001$, $\gamma = 0.01$.

На рисунке 2.17 приведен пример управления с задающим воздействием в виде ступенчатой функции. Задающее воздействие в ходе эксперимента находится вне зоны притяжения аттрактора.

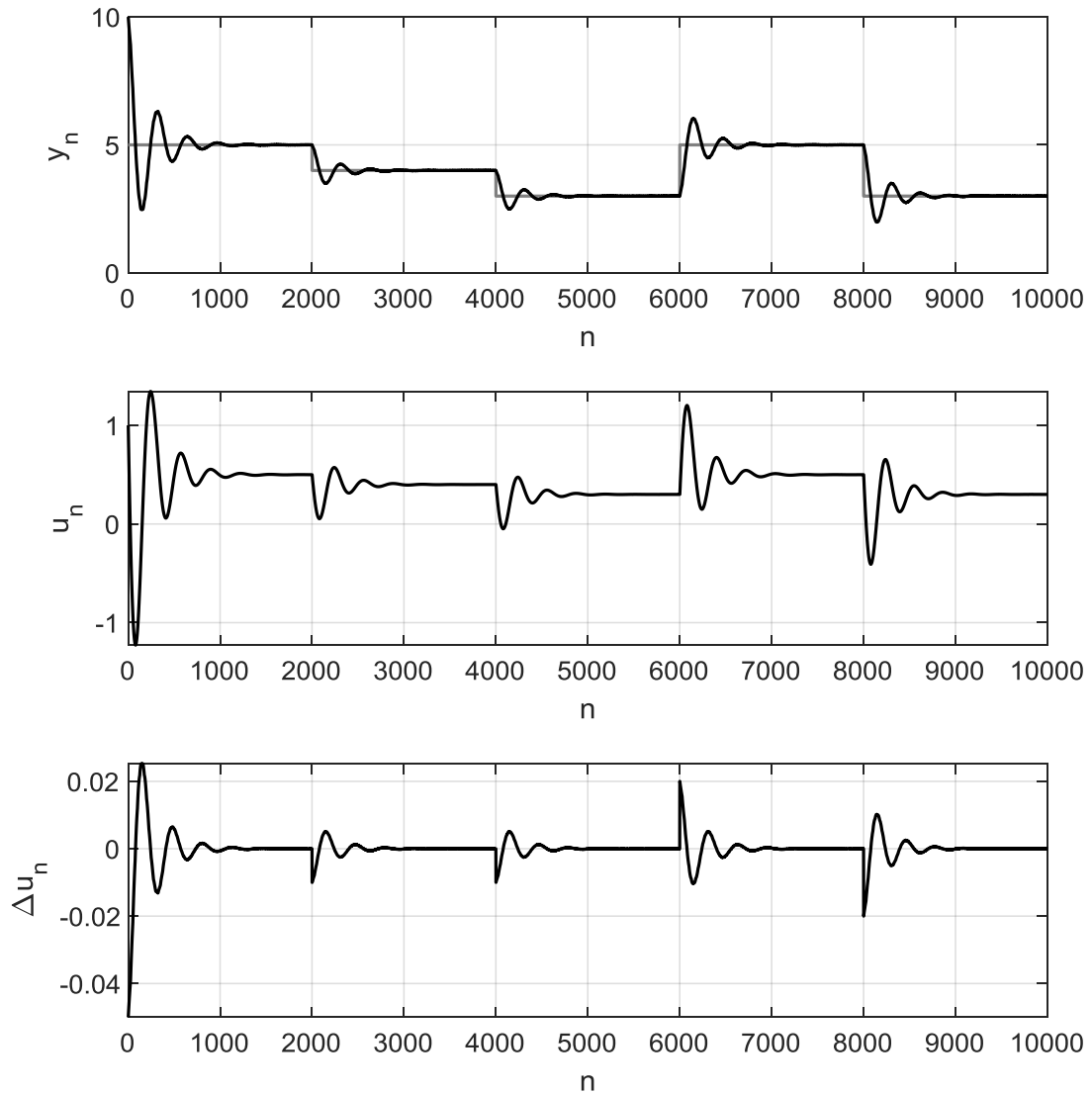


Рисунок 2.17 – Пример управления хаотическим объектом при случайной помехе

$$\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 0.001)$$

Среднеквадратическая ошибка управления по результатам проведенного эксперимента составила $MSE=0.2260$.

Эксперимент 6. Теперь рассмотрим управление системой (2.7) вблизи зоны притяжения аттрактора. На рисунке 2.18 приведен пример управления с задающим воздействием в виде ступенчатой функции.

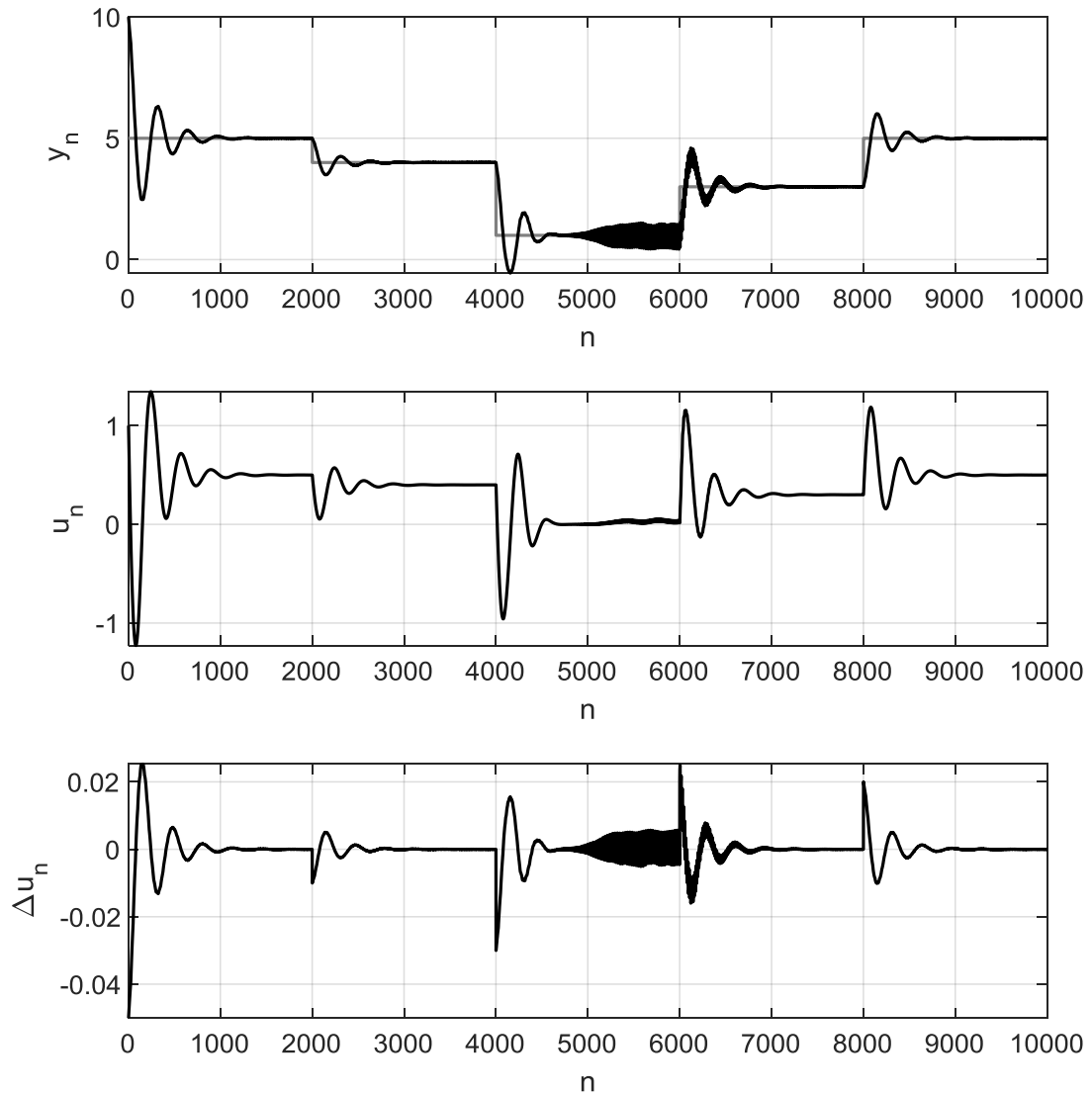


Рисунок 2.18 – Пример управления хаотическим объектом при случайной помехе $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0,0.001)$

Среднеквадратическая ошибка управления по результатам проведенного эксперимента составила $MSE=0.2905$.

Результаты вычислительных экспериментов показывают, что предложенный ядерный алгоритм дуального управления позволяет решать задачи управления хаотическими объектами при условии, что объект является устойчивым при полученных значениях оценок управляющего воздействия.

Выводы по второй главе

В главе рассмотрены существующие подходы к управлению нелинейными динамическими объектами, а также предложен и исследован новый ядерный алгоритм дуального управления с идентификатором для нелинейных дискретных динамических объектов. Предложенный алгоритм позволяет оценивать управляющее воздействие для нелинейных дискретных динамических объектов в условиях отсутствия информации о структуре модели при наличии неконтролируемых внешних воздействий и существенных случайных помех, что подтверждается результатами численного исследования алгоритма на различных тестовых задачах идентификации для объектов, заданных в виде нелинейных разностных уравнений, структура которых алгоритму не известна. Кроме того, предложенный алгоритм управления позволяет осуществлять управление при наличии ограничений на вычислительные ресурсы, а также позволяет настраивать объем вычислительных ресурсов, задействованных в ходе управления путем изменения количества наблюдений в выборке.

Выявленным в ходе вычислительных экспериментов недостатком предложенного алгоритма управления является его чувствительность к изменению параметров, определяющих длину поискового и изучающего шага. При маленьких значениях параметров длины шага может наблюдаться большое время регулирования, в то время как большие значения параметров длины шага могут приводить к неустойчивости регулятора. Для решения проблемы перед началом работы регулятора необходимо, помимо настройки параметров ядерной функции и коэффициента регуляризации, также осуществлять настройку параметров длины поискового и изучающего шага.

Проведены численные эксперименты по определению возможности управления хаотическими системами с помощью предложенного ядерного алгоритма дуального управления для нелинейных объектов с памятью. По результатам экспериментов, предложенный алгоритм обеспечивает решение задачи управления только для тех значений задающего воздействия, при которых состояние системы является устойчивым. В противном случае, предложенный алгоритм не обеспечивает приведение выходной переменной к задающему воздействию. В целом, показана принципиальная возможность управления хаотическим объектом при отсутствии информации о структуре объекта в условиях малых выборок и задающем воздействии, находящимся вне зоны притяжения аттрактора.

3 Методы оценки параметров ядерных моделей при наличии ограничений на вычислительные ресурсы

3.1 Выбор ядра и учет априорной информации об объекте

Качество идентификации при использовании ядерных моделей (1) зависит от типа ядра $\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ и значений его параметров $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots]$. На практике, тип ядра определяется исходя из имеющихся априорных данных об исследуемом объекте. В то время как параметры ядра, как правило, оптимизируются по некоторой обучающей выборке.

В таблице 3.1 приведены наиболее часто используемые ядерные функции для вектора входных переменных в виде $\mathbf{x}_i = [x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,m}]$.

Таблица 3.1 – Примеры ядерных функций

Наименование	Вид ядра
Линейное ядро	$\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \theta_1 \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j + \theta_2$
Полиномиальное ядро	$\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = (\theta_1 \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j + \theta_2)^{\theta_3}$
Квадратичное экспоненциальное ядро для скалярного θ	$\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp\left(-\frac{\ \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\ ^2}{2\theta^2}\right)$
Квадратичное экспоненциальное ядро для $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m]$	$\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp\left(-\sum_{k=1}^m \frac{(x_{i,k} - x_{j,k})^2}{2\theta_k^2}\right)$

Отметим, что ядра $\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ вычисляют скалярное произведение не между исходными векторами $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{x}_j$, а между их отображениями $\varphi(\mathbf{x}_i)^T$ и $\varphi(\mathbf{x}_j)$, заданными в Гильбертовом пространстве высокой размерности $\mathbb{H}$. Вид спрямляющего отображения φ зависит от вида ядерной функции $\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$.

Например, найдем спрямляющее отображение φ для квадратичного ядра $\kappa(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}^T \mathbf{v})^2$ при $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Для этого разложим квадрат скалярного произведения:

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\mathbf{u}^T \mathbf{v})^2 = ((u_1, u_2)^T (v_1, v_2))^2 = \\ &= (u_1 v_1 + u_2 v_2)^2 = \\ &= u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + 2u_1 v_1 u_2 v_2 = \\ &= ((u_1^2, u_2^2, \sqrt{2}u_1 u_2)^T (v_1^2, v_2^2, \sqrt{2}v_1 v_2)). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Таким образом, спрямляющего отображение для ядра $\kappa(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}^T \mathbf{v})^2$ можно представить в виде:

$$\varphi: (u_1, u_2) \rightarrow (u_1^2, u_2^2, \sqrt{2}u_1 u_2), \quad (3.2)$$

что для размерности векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ равной N соответствует отображению:

$$\varphi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{\frac{N(N+1)}{2}}. \quad (3.3)$$

На практике, для применения рассматриваемых ядер не нужно знать явный вид отображения φ , так как скалярное произведение вычисляется в неявном виде путем вычисления значения ядерной функции.

Базовые операции над ядрами [102]:

- 1) $\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \kappa_1(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + \kappa_2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$.
- 2) $\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = a\kappa_1(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$, $a > 0$.
- 3) $\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \kappa_1(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \cdot \kappa_2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$.
- 4) $\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \mathbf{x}_i^T \mathbf{A} \mathbf{x}_j$, $\mathbf{A}$ – положительно определенная матрица.
- 5) $\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \kappa_1(f(\mathbf{x}_i), f(\mathbf{x}_j))$.

Приведенные выше операции над ядрами могут быть использованы для конструирования более гибких ядерных функций, учитывающих особенности данных и априорную информацию об исследуемом объекте [94].

Учет априорной информации об исследуемом объекте.

Учет априорной информации об исследуемом нелинейном объекте в ядерных методах осуществляется путем формирования ядерных функций, учитывающих особенности данных [93].

В частности, квадратичное экспоненциальное ядро [93]:

$$\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \theta_1 \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2}{2\theta_2^2}\right), \quad (3.4)$$

заданное через параметр θ_1 , определяющем высоту ядра, и параметром θ_2 , определяющем ширину ядра, позволяет моделировать восходящий и нисходящий тренды.

Для моделирования периодических зависимостей, для которых известен период, может быть использовано экспоненциальное ядро вида [93]:

$$\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp\left(-\frac{1}{\theta^2} 2\sin^2\left(\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}{2}\right)\right), \quad (3.5)$$

в котором параметр θ определяет гладкость периодической составляющей.

Если периодичность зависимости варьируется, ядро (3.5) может быть модифицировано путем добавления квадратичной составляющей [93]:

$$\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2}{2\theta_1^2} - \frac{1}{\theta_2^2} 2\sin^2\left(\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}{2}\right)\right), \quad (3.6)$$

позволяющей учитывать отклонение выходной переменной от заданной периодичности.

Для учета наличия небольших отклонений выходной переменной от тренда может быть использовано рациональное квадратично ядро [93]:

$$\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \theta_1 \left(1 + \frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2}{2\theta_2\theta_3^2}\right)^{-\theta_2}, \quad (3.7)$$

где θ_1 – амплитуда ядра, θ_2 – порядок ядра, и θ_3 – ширина ядра.

Наконец, учет наличия случайных помех осуществляется с помощью следующего квадратичного экспоненциального ядра [93]:

$$\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \theta_1 \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2}{2\theta_2^2}\right) + \theta_3 \delta_{ij}, \quad (3.8)$$

где θ_1 – амплитуда ядра, θ_2 – ширина ядра, θ_3 – амплитуда случайной помехи, δ_{ij} – дельта функция.

Существует множество ядерных функций, которые позволяют учитывать другие особенности данных, включая нестационарный и динамический характер зависимости. Более подробное описание существующих ядерных функций и способов их построения приведено в [93, 102].

Метод максимального правдоподобия.

Рассматриваемые в настоящей работе ядерные алгоритмы, основанные на методе наименьших квадратов, могут быть также получены с помощью метода максимального правдоподобия. В частности, рассмотрим модель:

$$\hat{y}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n) + \varepsilon_n, \quad (3.9)$$

при предположении, что случайные помехи ε_n являются независимыми и нормально распределенными случайными величинами $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Тогда оценки среднего $\hat{\mu}_{n+1}$ и дисперсии $\hat{\sigma}_{n+1}^2$ такой модели могут быть получены следующим образом [93]:

$$\hat{\mu}_{n+1} = \mathbf{k}^T (\mathbf{K} + \sigma^2 \mathbf{E})^{-1} \mathbf{y}, \quad (3.10)$$

$$\hat{\sigma}_{n+1}^2 = \sigma^2 + \kappa(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n) - \mathbf{k}^T (\mathbf{K} + \sigma^2 \mathbf{E})^{-1} \mathbf{k}. \quad (3.11)$$

Полученная оценка среднего (3.10) в точности до обозначений совпадает с выражением (1.13), которое было получено ранее при построении оценок с помощью метода наименьших квадратов. Необходимо отметить, что в оценке дисперсии (3.11) выражение $\sigma^2 + \kappa(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n)$ является ковариационной функцией, а $\mathbf{K} + \sigma^2 \mathbf{E}$ – ковариационной матрицей.

Одним из основных выводов построения приведенных оценок среднего $\hat{\mu}_{n+1}$ и дисперсии $\hat{\sigma}_{n+1}^2$ является то, что коэффициент регуляризации r равен дисперсии помехи σ^2 . Поэтому оптимизация коэффициента регуляризации r может быть осуществлена градиентными методами путем оптимизации параметров θ_1 и θ_2 ядерной функции, заданной в виде:

$$\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \theta_1 \kappa_1(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + \theta_2 \delta_{ij}, \quad (3.12)$$

для которой коэффициент регуляризации $r = \theta_2 / \theta_1$.

Связь оценок, полученных с применением метода наименьших квадратов и метода максимального правдоподобия, позволяет использовать Байесовский подход к оценке параметров ядерных функций $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m]$.

В частности, можно показать, что полученным оценкам среднего $\hat{\mu}_{n+1}$ и дисперсии $\hat{\sigma}_{n+1}^2$ соответствует следующая функция правдоподобия [93]:

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{K} + r\mathbf{E}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T (\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1} \mathbf{y}\right), \quad (3.13)$$

где $\mathbf{X}$ – матрица наблюдений входных переменных, $\mathbf{y}$ – вектор наблюдений выходной переменной.

Используя свойства логарифмической функции, логарифм функции правдоподобия $\ln p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})$ может быть представлен в виде [93]:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \ln p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2} \mathbf{y}^T (\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1} \mathbf{y} - \frac{1}{2} \ln |\mathbf{K} + r\mathbf{E}| - \frac{N}{2} \ln 2\pi. \quad (3.14)$$

По мере увеличения качества модели значения критерия качества (3.14) также увеличивается. Назначение слагаемых критерия (3.14) необходимо отметить отдельно. Первое слагаемое $-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T (\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1} \mathbf{y}$ отвечает за точность модели. Второе слагаемое $-\frac{1}{2} \ln |\mathbf{K} + r\mathbf{E}|$ является штрафом за излишнюю сложность модели. Третье слагаемое $-\frac{N}{2} \ln 2\pi$ является нормировочным коэффициентом [93].

В общем случае, критерий качества (3.14) является нелинейной и многоэкстремальной функцией, каждый экстремум которой соответствует определенной интерпретации наблюдений из обучающей выборки. На практике, наличие нескольких экстремумов критерия может встречаться в случае, когда объем обучающей выборки является недостаточно большим [93].

Частные производные критерия (3.14) относительно параметров ядра $\theta_1, \theta_2, \dots$ вычисляются аналитически [93]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} &= \frac{1}{2} \mathbf{y}^T (\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1} \frac{\partial (\mathbf{K} + r\mathbf{E})}{\partial \theta_i} (\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1} \mathbf{y} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{trace} \left((\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1} \frac{\partial (\mathbf{K} + r\mathbf{E})}{\partial \theta_i} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \text{trace} \left((\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T - (\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1}) \frac{\partial (\mathbf{K} + r\mathbf{E})}{\partial \theta_i} \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1} \mathbf{y}$, $\text{trace}(\mathbf{A})$ это след матрицы $\mathbf{A}$.

Вычислительная сложность критерия (3.14) составляет $O(N^3)$ операций, что обусловлено необходимостью вычисления обратной матрицы $(\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1}$. При известной матрице $(\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1}$ вычисление одной частной производной (3.15) требует $O(N^2)$ вычислительных операций [93].

Кросс-проверка или кросс-валидация.

Кросс-проверка заключается в разделении обучающей выборки на два непересекающихся подмножества. Первая часть используется для построения модели, а другая часть выборки используется для валидации (тестирования) модели. Полученные значения критерия качества модели, вычисленные по валидационной выборке, используются для определения оптимальных значений параметров модели.

В общем случае, существуют три основных способа проведения кросс-проверки. Первый из них описан выше. Вторым называется k -кратной кросс-проверкой и заключается в разделении обучающей выборки на k подвыборок,

процедуры построения и валидации модели проводятся k раз: на первой итерации модель строится на всех выборках, кроме первой, тестирование производится на первой выборке. На следующем шаге модель строится на всех выборках, кроме второй и тестируется на второй, после чего описанный алгоритм продолжается для всех остальных выборок. Третий способ проведения кросс-проверки состоит в построении N моделей, где N – объем обучающей выборки. Каждая из N моделей строится по всей имеющейся обучающей выборке, за исключением одного наблюдения. Исключенное наблюдение используется для валидации модели. Такой подход называется скользящим экзаменом. Для каждой из N моделей вычисляется критерий качества, после построения всех моделей значения критерия для каждой из N моделей суммируются.

Для проведения кросс-проверки могут быть использованы любые критерии качества модели. На практике, часто используются критерий наименьших квадратов и логарифм функции правдоподобия [74]. Учитывая достаточно высокую вычислительную сложность построения моделей (1.25), наибольший интерес представляет проведение скользящего экзамена и возможные пути снижения его вычислительной сложности.

Для выборки $\mathcal{D} = \{\mathbf{x}_n, y_n\}$, $n = \overline{1, N}$ критерий наименьших квадратов при скользящем экзамене примет вид [110]:

$$CV(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (y_{n+1} - \hat{y}_{n+1})^2, \quad (3.16)$$

где $\hat{y}_{n+1}$ – оценка выходной переменной, полученная по выборке, из которой исключена n -ая пара наблюдений $\{\mathbf{x}_n, y_n\}$.

С учетом того, что ранее оценка $\hat{y}_{n+1}$ была определена как

$$\hat{y}_{n+1} = \sum_{i=1}^N \alpha_i k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_n) = \mathbf{k}^T \boldsymbol{\alpha}, \text{ где } \boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1} \mathbf{y},$$

критерий (3.16) можно переписать в виде [110]:

$$CV(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \alpha_n / d_n, \quad (3.17)$$

где d_n – n -ый диагональный элемент матрицы $(\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1}$.

Из полученного выражения можно видеть, что для вычисления критерия необходимо поочередно исключать n -ый элемент из вектора $\mathbf{y}$ и n -ую строку и n -ый столбец из матрицы $\mathbf{K} + r\mathbf{E}$, в связи с чем необходимо пересчитывать обратную матрицу $(\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1}$ при каждом исключении наблюдений.

При прямом применении приведенных выражений и пересчета обратной матрицы $(\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1}$ для каждой выборки, из которой исключен один из элементов, вычислительная сложность всей процедуры скользящего экзамена составит $O(N^4)$.

Для снижения вычислительной сложности скользящего экзамена может быть использован алгоритм, в соответствии с которым обратная матрица $(\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1}$, из которой исключена n -я строка и n -ый столбец, вычисляется из полной матрицы $(\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1}$ следующим образом [116]:

$$(\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1} = \begin{bmatrix} e & \mathbf{f}^T \\ \mathbf{f} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \Rightarrow (\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1} = \mathbf{G} - \mathbf{f}\mathbf{f}^T / e, \quad (3.18)$$

где $\mathbf{G} = (\mathbf{K} + r\mathbf{E})_{\mathbf{p},\mathbf{p}}^{-1}$, $\mathbf{f} = (\mathbf{K} + r\mathbf{E})_{\mathbf{p},n}^{-1}$, $e = (\mathbf{K} + r\mathbf{E})_{n,n}^{-1}$ и $\mathbf{p}$ – вектор индексов, из которого исключен n -ый элемент.

Описанная процедура пересчета обратной матрицы $(\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1}$ требует $O(N^2)$ вычислительных операций, что позволяет снизить суммарную сложность процедуры скользящего с $O(N^4)$ до $O(N^3)$.

Частные производные критерия (3.17) по параметрам ядра $\theta_1, \theta_2, \dots$ также вычисляются аналитически [110]:

$$\frac{\partial CV(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\frac{2}{d_n} \right) \left(\frac{\alpha_n r_n}{d_n} + \left(\frac{\alpha_n^2}{d_n} \right) \left(\frac{s_n}{d_n} \right) \right), \quad (3.19)$$

где $\mathbf{r} = -(\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1} \frac{\partial(\mathbf{K} + r\mathbf{E})}{\partial \theta_j} (\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1} \mathbf{y}$, $s_n = \mathbf{b}_n^T \frac{\partial(\mathbf{K} + r\mathbf{E})}{\partial \theta_j} \mathbf{b}_n$, $\mathbf{b}_n$ – n -ый столбец матрицы $(\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1}$.

Сложность вычисления одной частной производной (3.19) составляет $O(N^3)$ операций, что обусловлено необходимостью вычисления обратной матрицы $(\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1}$ [93].

3.2 Вычислительно-эффективные методы оценки параметров ядерных моделей нелинейных объектов

Построение ядерной модели (1.25) состоит из трех этапов, включающих этап оптимизации параметров ядерных функций, этап обучения модели и этап тестирования модели. На каждом из этапов производится оценка параметров модели (1.25) путем решения системы линейных алгебраических уравнений (1.23). Одной из главных проблем построения моделей (1.25) является необходимость решения больших систем уравнений, размерность которых зависит от объема обучающей выборки. Решение систем линейных уравнений большой размерности требует существенных объемов памяти и вычислительных мощностей, вследствие чего внедрение ядерных методов, как правило, требует больших затрат на модернизацию производства. Для решения этой проблемы применяются методы, которые позволяют снизить затраты вычислительных ресурсов. Рассматривая задачу оптимизации параметров ядерных функций, основу данных методов составляет метод подмножества данных и низкоранговые аппроксимации.

Подмножество данных (англ. Subset of data, сокр. SD).

Обозначим $\mathcal{D}_N = \{\mathbf{x}_n, y_n\}$, $n = \overline{1, N}$ в качестве обучающей выборки объема N . Одним из наиболее очевидных и простых методов снижения размерности задачи является использование некоторого подмножества наблюдений вместо всей обучающей выборки. При использовании подмножества данных построение

модели осуществляется на основе выборки $\mathcal{D}_M \subset \mathcal{D}_N$ объема M и требует $O(M^3)$ вычислительных операций вместо $O(N^3)$.

Несмотря на то, что этот метод кажется очевидным и не требующим упоминания, в некоторых случаях он является наилучшим решением задачи, потому как он не требует никаких дополнительных затрат вычислительных ресурсов в сравнении с другими методами. В особенности данный метод эффективен для больших выборок, в которых дополнительные наблюдения вносят относительно небольшой вклад в увеличение качества модели. В таком случае для решения задачи можно ограничиться использованием некоторого подмножества из обучающей выборки, поскольку это позволяет снизить затраты вычислительных ресурсов без существенной потери качества модели.

Простейшим алгоритмом формирования подмножества данных является использование генератора случайных чисел. В связи с низкими затратами вычислительных ресурсов такой подход во множестве случаев является очень эффективным. Другим, более передовым, подходом к формированию подмножества наблюдений является использование жадных и эвристических алгоритмов, основанных, в частности, на информационных критериях, которые позволяют оценить влияние каждого наблюдения из обучающей выборки на качество модели [64, 72, 120]. На практике, лучшее решение в значительной степени зависит от специфики данных и заданных ограничений на вычислительные ресурсы.

Низкоранговые аппроксимации (англ. Low-rank approximations).

Оптимальной аппроксимацией $\hat{\mathbf{K}}$ матрицы $\mathbf{K}$ размерности $N \times N$ в терминах нормы:

$$\|\mathbf{K} - \hat{\mathbf{K}}\|_F^2, \text{ где } \|\mathbf{A}\|_F^2 = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} |a_{i,j}|^2, \quad (3.20)$$

является сингулярное разложение матрицы $\mathbf{K}$:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T, \quad (3.21)$$

где $\Sigma = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_N})$, $\lambda_i \geq 0$ – диагональная матрица с сингулярными числами $\sqrt{\lambda_i}$ матрицы $\mathbf{K}$, $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}^T$ – матрицы левых и правых сингулярных векторов соответственно [69].

Если расположить собственные числа в порядке убывания:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N, \quad (3.22)$$

и оставить только первые M собственных чисел, а оставшиеся собственные числа положить равными нулю $\lambda_i = 0, i = \overline{M+1, N}$, то может быть получено так называемое усеченное сингулярное разложение [69]:

$$\hat{\mathbf{K}}_{NN} \approx \mathbf{U}_{NM} \Sigma_{MM} \mathbf{V}_{MN}^T, \quad (3.23)$$

которое является оптимальным низкоранговым приближением матрицы $\mathbf{K}$ в терминах критерия (3.20) [69].

После чего с помощью леммы об обратной матрице справедливо [108]:

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{K}}_{NN} + r\mathbf{E})^{-1} &= (\mathbf{U}_{NM} \Sigma_{MM} \mathbf{V}_{MN}^T + r\mathbf{E})^{-1} = \\ &= r^{-1}\mathbf{E} - r^{-1}\mathbf{E} \mathbf{U}_{NM} (\Sigma_{MM}^{-1} + \mathbf{V}_{MN}^T r^{-1}\mathbf{E} \mathbf{U}_{NM})^{-1} \mathbf{V}_{MN}^T r^{-1}\mathbf{E}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где матрица $(\Sigma_{MM}^{-1} + \mathbf{V}_{MN}^T r^{-1}\mathbf{E} \mathbf{U}_{NM})^{-1}$ имеет размерность $M \times M$.

Таким образом, исходная задача поиска матрицы $(\hat{\mathbf{K}} + r\mathbf{E})^{-1}$ размерности $N \times N$ была сведена к задаче вычисления матрицы $(\Sigma_{MM}^{-1} + \mathbf{V}_{MN}^T r^{-1}\mathbf{E} \mathbf{U}_{NM})^{-1}$, имеющей размерность $M \times M$. Здесь необходимо еще раз отметить, что применение низкоранговой аппроксимации (3.24) не позволяет снизить вычислительную сложность, поскольку построение самого сингулярного разложения (3.23) требует $O(N^3)$ операций, в то время как существующие методы поиска обратной матрицы и так требуют $O(N^3)$ вычислений.

Для снижения размерности также применяются методы, которые основаны на применении низкоранговых аппроксимаций матрицы системы [77, 87, 123]:

$$\mathbf{K} \approx \mathbf{G}\mathbf{G}^T, \quad (3.25)$$

где $\mathbf{G}$ – матрица размерности $N \times M$.

В [69] показано, что аппроксимация (3.25) эквивалента сингулярному разложению $\mathbf{G}\mathbf{G}^T = \mathbf{U}_{NM}\mathbf{\Sigma}_{MM}\mathbf{V}_{MN}^T$, поэтому эти аппроксимации могут рассматриваться как один и тот же вид.

Схематичное представление аппроксимации $\mathbf{K} \approx \mathbf{G}\mathbf{G}^T$ представлено на рисунке 3.1.

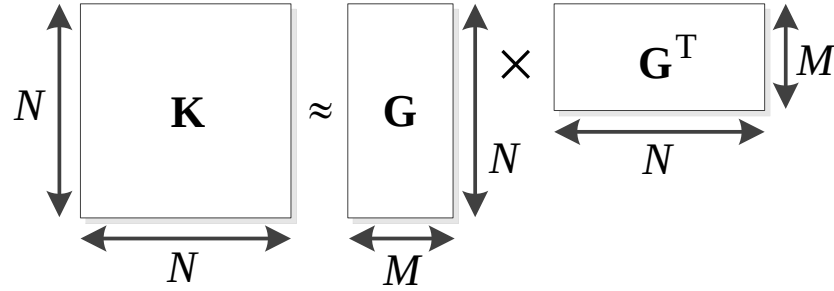


Рисунок 3.1 – Схематичное представление аппроксимации $\mathbf{K} \approx \mathbf{G}\mathbf{G}^T$

Используя аппроксимацию (3.24) и лемму об обратной матрице [108], сложность построения модели может быть снижена с $O(N^3)$ до $O(MN^2)$, а время вычисления прогнозных значений выходных переменных с $O(N^2)$ до $O(M^2)$. Основная идея низкоранговых аппроксимаций основывается на том, что большое количество собственных значений матрицы $\mathbf{K}$ близки к нулю для широкого множества ядерных функций $\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ [120]. В связи с этим, матрица $\mathbf{K}$ может быть представлена в виде сингулярного разложения без существенной потери точности [103].

В таблице 3.2 представлен перечень низкоранговых аппроксимаций ядерной матрицы $\mathbf{K}$ и их вычислительная сложность. Для сравнения в таблице 3.2 также приведена полноранговая аппроксимация, вычисляемая с помощью метода квадратного корня (Cholesky).

Таблица 3.2 – Различные виды аппроксимаций ядерной матрицы

Наименование алгоритма	Вид аппроксимации	Вычислительная сложность
Cholesky	$\mathbf{K}_{NN} + r\mathbf{E} \approx \mathbf{L}\mathbf{L}^T$	$O(N^3)$
Subset of data	$\mathbf{K}_{MM} + r\mathbf{E} \approx \mathbf{L}\mathbf{L}^T$	$O(M^3), M < N$
Nyström	$\mathbf{K}_{NN} + r\mathbf{E} \approx \mathbf{K}_{NM}\mathbf{K}_{MM}^{-1}\mathbf{K}_{MN} + r\mathbf{E}$	$O(MN^2)$
Low-rank approximation	$\mathbf{K}_{NN} + r\mathbf{E} \approx \mathbf{G}\mathbf{G}^T + r\mathbf{E}$	$O(MN^2), M < N$

Таким образом, основная трудность построения низкоранговых аппроксимаций заключается в том, что вычисление сингулярного разложения само по себе требует $O(N^3)$ вычислительных операций, тем самым не позволяя снизить затраты вычислительных ресурсов. Для решения этой проблемы используются аппроксимации сингулярного разложения, например, Nyström-аппроксимация [79]:

$$\mathbf{K}_{NN} + r\mathbf{E} \approx \mathbf{K}_{NM}\mathbf{K}_{MM}^{-1}\mathbf{K}_{MN} + r\mathbf{E}, \quad (3.25)$$

где $\mathbf{K}_{NN}$ – матрица размерности $N \times N$, $\mathbf{K}_{NM}$ – матрица размерности $N \times M$ и так далее.

Матрицы $\mathbf{K}_{NM}$, $\mathbf{K}_{MM}^{-1}$ и $\mathbf{K}_{MN}$ в аппроксимации (3.25) вычисляются по выборкам $\mathcal{D}_M$ и $\mathcal{D}_N$. Формирование выборки $\mathcal{D}_M$ может быть осуществлено аналогично предыдущему методу с помощью генератора случайных чисел либо с помощью жадных подходов [103]. Как показано выше, оптимальным в смысле критерия (3.20) является сингулярное разложение (3.23), которое строится на основании M наибольших собственных числах матрицы $\mathbf{K}$. Используя тот факт, что сумма собственных чисел матрицы $\mathbf{K}$ равна следу матрицы (сумме элементов на главной диагонали), то для получения оптимального в смысле критерия (3.20) разложения достаточно, чтобы оно удовлетворяло выражению:

$$\text{trace}(\mathbf{K} - \hat{\mathbf{K}}) < \epsilon, \quad (3.26)$$

где ϵ – параметр, определяющий точность аппроксимации.

3.3 Алгоритм оценки параметров ядерных моделей с использованием низкоранговой аппроксимации

Для построения ядерной модели (1.25) необходимо определить параметры ядерных функций $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots]$ и коэффициент регуляризации r , которые обеспечивают приемлемое качество модели. Как было отмечено выше, для оптимизации этих параметров могут применяться различные методы, но для всех из них неизменным остается необходимость вычисления оценок параметров в виде $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1}\mathbf{y}$. Для больших обучающих выборок вычисление матрицы $(\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1}$ может стать существенным препятствием. При решении этой проблемы с помощью усеченных выборок снижается качество оценок параметров, и, как следствие, снижение качества модели. А при использовании низкоранговых аппроксимации их размерность зависит от параметра точности ϵ , по которому заранее нельзя определить итоговую размерность аппроксимации, и, как следствие, невозможно гарантировать отсутствие превышения лимита объема памяти. На практике, объемы памяти и вычислительные мощности известны заранее. Используя эту информацию можно заблаговременно определить максимально допустимую размерность аппроксимации и обеспечить надежность решения задачи.

Учитывая тот факт, что матрица $\mathbf{K}$ является положительно-определенной, для нее существует разложение вида $\mathbf{K} \approx \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, где $\mathbf{L}$ это нижняя треугольная матрица. Доказательство существования и единственности разложения $\mathbf{K} \approx \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ приводится в [69]. На практике, для широкого множества различных ядерных функций $\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$, собственные значения матрицы $\mathbf{K}$ уменьшаются с экспоненциальной скоростью [120], что позволяет использовать не только

полноранговые, но и низкоранговые аппроксимации матрицы $\mathbf{K}$. В общем случае, если собственные значения матрицы $\mathbf{K}$ имеют более сложную структуру (собственные значения варьируются), необходима симметричная перестановка строк и столбцов матрицы $\mathbf{K}$, позволяющая обеспечить стабильность вычислений и приемлемую точность аппроксимации [103].

Прямое применение аппроксимации $\mathbf{K} \approx \mathbf{G}\mathbf{G}^T$ не дает никаких преимуществ, так как матрица $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$ имеет ту же размерность, что и матрица $\mathbf{K}$. Повышение вычислительной эффективности при расчете обратной матрицы $(\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1}$ может быть достигнуто путем применения леммы об обратной матрице [108], в соответствии с которой, обратная матрица $(\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1}$ при использовании аппроксимации $\mathbf{K} \approx \mathbf{G}\mathbf{G}^T$ может быть представлена в следующем виде:

$$(\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1} = (\mathbf{G}\mathbf{G}^T + r\mathbf{E})^{-1} = r^{-1}\mathbf{E} - r^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{G}^T\mathbf{G} + r\mathbf{E})^{-1}\mathbf{G}^T, \quad (3.22)$$

где $\mathbf{E}$ – единичные матрицы соответствующих размерностей.

Для повышения стабильности, вычисление матрицы $(\mathbf{G}^T\mathbf{G} + r\mathbf{E})^{-1}$ целесообразно осуществлять следующим образом:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1} &= r^{-1}\mathbf{E} - r^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{G}^T\mathbf{G} + r\mathbf{E})^{-1}\mathbf{G}^T = \\ &= r^{-1}\mathbf{E} - r^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{L}^{-T}(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{G}^T)), \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $\mathbf{L}$ – матрица разложения Холецкого от матрицы $\mathbf{G}^T\mathbf{G} + r\mathbf{E}$.

В качестве критерия остановки алгоритма предлагается использовать следующее условие. Так как процедура вычисления матрицы $\mathbf{G}$ является итерационной, а количество итераций алгоритма соответствует размерности матрицы $\mathbf{G}$, вычисление матрицы $\mathbf{G}$ предлагается осуществлять до тех пор, пока номер итерации не достигнет максимально допустимую размерность M . Изменение значения M позволяет регулировать вычислительные ресурсы, используемые в процессе оценки параметров.

Для построения матрицы $\mathbf{G}$ используется жадная процедура, позволяющая обеспечить минимум разности $\mathbf{K} - \mathbf{G}\mathbf{G}^T$ на каждом шаге алгоритма неполного

разложения методом квадратного корня [103]. Для этого вычисляется отклонение каждого элемента главной диагонали матрицы $\mathbf{K}$ от каждого из элементов главной диагонали матрицы $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$ и определяется номер столбца и строки, для которых это отклонение является наибольшим. Найденные столбец и строка матрицы $\mathbf{K}$ используются для вычисления следующего столбца матрицы $\mathbf{G}$, что эквивалентно симметричной перестановке столбца и строки. Иллюстрация этого процесса для первого шага работы алгоритма представлена на рисунке 3.2.

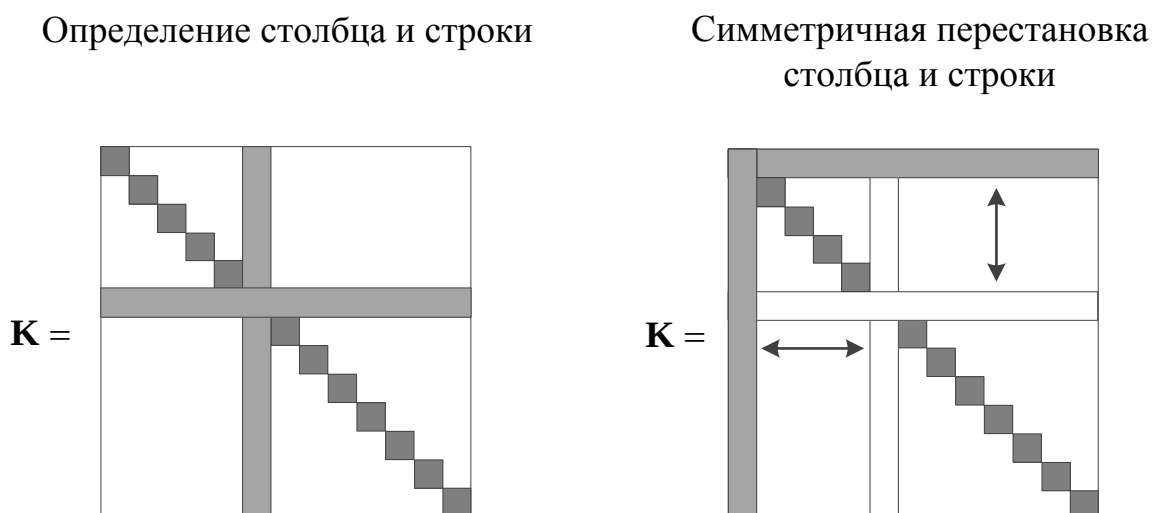


Рисунок 3.2 – Иллюстрация процесса перестановки строки и столбца матрицы $\mathbf{K}$ на первой итерации алгоритма

Итоговый алгоритм оценки вектора параметров α , основанный на предложенном критерии останова и процедуре вычисления обратной матрицы системы, представлен ниже.

Алгоритм 3.1 Алгоритм оценки параметров α (ICD-KRR)

вход: матрица $\mathbf{K}$, ранг матрицы M , коэффициент регуляризации r .

Диагональ матрицы $\mathbf{K}$: $\mathbf{d} = \text{diag}(\mathbf{K})$

Первая строка матрицы $\mathbf{G}$: $\mathbf{G}_{1:N,1} = \mathbf{K}_{1:N,1}$

Счетчик итераций: $i = 1$

пока $i \leq M$

если $i > 1$

$$\mathbf{d}_{i:N} = \text{diag}(\mathbf{K}_{i:N, i:N}) - \mathbf{G}_{i:N, 1:i-1} \mathbf{G}_{i:N, 1:i-1}^T \mathbf{e}$$

конец если

если $d_i \leq 0$, то

выйти из цикла

конец если

$$j^* = \arg \max_{i \leq j \leq N} \mathbf{d}_j$$

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{j^*}$$

$$\mathbf{G}_{i:N, 1:i-1} = \mathbf{G}_{j^*, 1:i-1}$$

$$\mathbf{G}_{i,i} = \sqrt{\mathbf{d}_{j^*}}$$

$$\mathbf{G}_{i+1:N, i} = (\mathbf{K}_{\mathbf{p}_{i+1:N}, \mathbf{p}_i} - \mathbf{G}_{i+1:N, 1:i+1} \mathbf{G}_{i, 1:i-1}^T) / \mathbf{G}_{i,i}$$

$$i = i + 1$$

конец цикла

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_{\mathbf{p}, 1:i}$$

Вычислить вектор $\hat{\mathbf{a}} = (r^{-1} \mathbf{E} - r^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{G} + r \mathbf{E})^{-1} \mathbf{G}^T) \mathbf{y}$

выход: вектор $\hat{\mathbf{a}}$

В приведенном алгоритме индексами $i:N$ обозначается множество элементов от i до N , а $\mathbf{e}$ обозначает единичный вектор.

На практике, помимо обратной матрицы $(\mathbf{K} + r \mathbf{E})^{-1}$, достаточно часто необходимо также знать значения определителя $|\mathbf{K} + r \mathbf{E}|$. Используя аналог леммы об обратной матрице для определителя [91], можно также записать выражение для определителя $|\mathbf{K} + r \mathbf{E}|$ при использовании аппроксимации $\mathbf{K} \approx \mathbf{G} \mathbf{G}^T$. В частности, определитель $|\mathbf{K} + r \mathbf{E}|$ в соответствии с [91] можно представить в виде:

$$|\mathbf{K} + r \mathbf{E}| = |\mathbf{G} \mathbf{G}^T + r \mathbf{E}| = |r \mathbf{E}| |r^{-1} \mathbf{E}| |r \mathbf{E} + \mathbf{G}^T \mathbf{G}|. \quad (3.24)$$

Учитывая то, что матрицы $r\mathbf{E}$ и $r^{-1}\mathbf{E}$ являются диагональными, их определитель равен произведению элементов на главной диагонали (суммы элементов на главной диагонали при использовании логарифма):

$$\ln |r\mathbf{E}| = \sum_{i=1}^N r \text{ и } \ln |r^{-1}\mathbf{E}| = \sum_{i=1}^M r^{-1}. \quad (3.25)$$

Вычисление $|\mathbf{G}^T\mathbf{G} + r\mathbf{E}|$ осуществляет тривиально с помощью матрицы $\mathbf{L}$, так как определитель треугольной матрицы $\mathbf{L}$ равен произведению элементов на главной диагонали. Используя выражение (3.25) определитель матрицы можно записать следующую цепочку выражений:

$$\mathbf{G}^T\mathbf{G} + r\mathbf{E} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \Rightarrow |\mathbf{G}^T\mathbf{G} + r\mathbf{E}| = \prod_{i=1}^M \mathbf{L}_{ii}^2 \text{ или } \ln |\mathbf{G}^T\mathbf{G} + r\mathbf{E}| = \sum_{i=1}^M \ln \mathbf{L}_{ii}^2. \quad (3.26)$$

Таким образом, используя (3.25) и (3.26), логарифм определителя матрицы $|\mathbf{K} + r\mathbf{E}|$ можно записать в виде:

$$\ln |\mathbf{K} + r\mathbf{E}| = \sum_{i=1}^N r + \sum_{i=1}^M r^{-1} + \sum_{i=1}^M \ln \mathbf{L}_{ii}^2. \quad (3.27)$$

Отметим, что выражения (3.25) и (3.26) приводят задачу вычисления обратной матрицы $(\mathbf{G}\mathbf{G}^T + r\mathbf{E})^{-1}$, имеющей размерность $N \times N$, к задаче вычисления обратной матрицы $(\mathbf{G}^T\mathbf{G} + r\mathbf{E})^{-1}$, имеющей размерность $M \times M$, что позволяет снизить вычислительную сложность алгоритма с $O(N^3)$ до $O(MN^2)$. Кроме того, важной особенностью предложенного алгоритма является его способность регулировать объем используемых вычислительных ресурсов путем изменения максимального ранга аппроксимационной матрицы.

Глубина памяти (порядок) модели является одним из параметров, который наряду с типом ядра и значениями его параметров влияет на качество моделей нелинейных объектов с памятью [15, 53]. Для оценки глубины памяти необходимо для заданного значения глубины памяти оптимизировать параметры ядра, после чего вычислить соответствующее оптимальным значениям

параметров модели значения критерия качества идентификации. Оптимальным в терминах заданного критерия качества принимается значение глубины памяти, которому соответствует наименьшее (наибольшее) значение заданного критерия качества идентификации. Данная процедура предполагает последовательное построение нескольких моделей для различных значений глубины памяти, что требует достаточно большой объем вычислительных ресурсов.

Например, обозначим в качестве D максимально допустимое значение глубины памяти. Тогда прямое вычисление оценки глубины памяти модели (1.1) потребует $O(DN^3)$ вычислений. Вычислительная эффективность данной процедуры может быть повышена путем применения предложенного алгоритма оценки вектора параметров $\mathbf{a}$.

Представим выборочные значения выходных переменных в виде:

$$\mathbf{x}_n(d) = [u_n, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-d}], \quad n = \overline{1, N}, \quad (3.28)$$

где d это глубина памяти.

Матрица $\mathbf{K} + r\mathbf{E}$ для данного вектора входных воздействий примет вид:

$$\mathbf{K} + r\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \kappa(\mathbf{x}_1(d), \mathbf{x}_1(d)) + r & \dots & \kappa(\mathbf{x}_N(d), \mathbf{x}_1(d)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa(\mathbf{x}_1(d), \mathbf{x}_N(d)) & \dots & \kappa(\mathbf{x}_N(d), \mathbf{x}_N(d)) + r \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Выражение критерия (3.14) для матрицы (3.29) может быть представлено в виде:

$$L(\boldsymbol{\theta}, d) = \ln p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2} \mathbf{y}^T (\mathbf{K} + r\mathbf{E})^{-1} \mathbf{y} - \frac{1}{2} \ln |\mathbf{K} + r\mathbf{E}| - \frac{N}{2} \ln 2\pi. \quad (3.30)$$

Тогда оценка глубины памяти будет соответствовать значению, при котором достигается максимум критерия:

$$\hat{d} = \arg \max L(\boldsymbol{\theta}, d). \quad (3.31)$$

Вычислительная сложность процедуры (3.31) составляет $O(DMN^2)$, где $M < N$ для значительно количества различных типов ядерных функций.

3.4 Численное исследование ядерных алгоритмов идентификации при наличии ограничений на вычислительные ресурсы

Вычислительные эксперименты по тестированию предложенного алгоритма оценки глубины памяти проводились по выборкам, сгенерированным на основе разностных уравнений с добавлением шумов. На первом этапе проводится сравнение существующих подходов при наличии ограничений на вычислительные ресурсы. Перечень уравнений, используемые входные воздействия и уровни шумов представлены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Экспериментальные объекты идентификации

№	Объект	Входные воздействия	Случайная помеха
1	$y_n = \frac{y_{n-1}y_{n-2}(y_{n-1} + 2.5)}{1 + y_{n-1}^2 + y_{n-2}^2} + u_{n-1}$	$u_n = \sin(2\pi n/25)$	$\mathcal{N}(0, 0.29)$
2	$y_n = \frac{y_{n-1}}{1 + y_{n-1}^2} + u_{n-1}^3$	$u_n = \sin(2\pi n/25) + \sin(2\pi n/10)$	$\mathcal{N}(0, 0.65)$
3	$y_n = 0.3y_{n-1} + 0.6y_{n-2} + 0.3\sin(3\pi u_{n-1}) + 0.1\sin(5\pi u_{n-1})$	$u_n = \sin(2\pi n/250)$	$\mathcal{N}(0, 0.18)$

Обучающие и тестовые выборки имели вид $\mathcal{D} = \{\mathbf{x}_n, y_n\}, n = \overline{1, N}$, где $\mathbf{x}_n = [u_{n-1}, y_{n-1}, \dots, y_{n-d}]$. В ходе экспериментов использовались следующие значения входных параметров алгоритмов: ранг аппроксимации $M = N/2$, где N это объем выборки, параметр точности аппроксимации ядра в алгоритме низкоранговой аппроксимации $\epsilon = 1 \cdot 10^{-6}$.

В качестве ядра использовалась следующая функция:

$$\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^T \mathbf{P}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)\right) + r\delta_{ij},$$

где $\mathbf{P} = \text{diag}(\boldsymbol{\theta}^{-1})$, $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m]$ – вектор параметров ядерной функции.

Вычислительные эксперименты проводились в сравнении с другими алгоритмами, перечень которых представлен в таблице 3.2.

Эксперименты проводились по следующей схеме. По каждому разностному уравнению было сгенерировано 10 независимых выборок наблюдений с различными значениями случайных помех. Далее для каждой сгенерированной выборки осуществлялась процедура оптимизации вектора параметров ядерной функции $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m]$, в ходе которого фиксировалось среднее время, затраченное на вычисление и вычисление вектора $\boldsymbol{\alpha}$. В качестве алгоритма оптимизации параметров ядерной функции использовался метод сопряженных градиентов. Полученные параметры использовались для вычисления прогнозных значений выходных переменных. По полученным прогнозным значениям вычислялась среднеквадратическая ошибка прогноза. Усреднённые значения среднеквадратической ошибки (RMSE) и времени (T) вычисления оценок вектора параметров $\boldsymbol{\alpha}$ алгоритмов, представлены в таблицах 3.4, 3.5 и 3.6. Реализация алгоритмов осуществлялась с помощью пакета GPML-Toolbox [93].

Таблица 3.4 – Сравнение различных алгоритмов идентификации

Объект 1	Алгоритм	N	RMSE	Среднее время (с)
	Cholesky	500	0.2115±0.0075	0.0537±0.0008
		1000	0.2084±0.0127	0.3857±0.0043
		1500	0.2056±0.0077	1.2951±0.0320
		2000	0.2044±0.0111	4.3842±0.0392
		2500	0.2024±0.0101	9.9327±0.0190
		5000	0.1998±0.0174	129.75±0.7158
	Subset of data	500	0.2111±0.0068	0.0079±0.0001
		1000	0.2090±0.0129	0.0535±0.0004
		1500	0.2060±0.0071	0.1635±0.0026
		2000	0.2050±0.0112	0.3884±0.0076
		2500	0.2024±0.0101	0.7526±0.0247
		5000	0.1995±0.0161	10.034±0.0689
	Nyström	500	0.2116±0.0076	0.0278±0.0009
		1000	0.2083±0.0128	0.1664±0.0011
		1500	0.2056±0.0078	0.4625±0.0006
		2000	0.2044±0.0111	1.0432±0.0092
		2500	0.2027±0.0100	1.9699±0.0509
		5000	0.1999±0.0177	22.593±0.0251
	Low-rank approximation	500	0.2115±0.0075	0.0314±0.0016
		1000	0.2084±0.0127	0.1206±0.0042
		1500	0.2056±0.0077	0.2498±0.0100
		2000	0.2044±0.0111	0.4442±0.0051
		2500	0.2024±0.0101	0.6964±0.0104
		5000	0.1998±0.0174	2.8342±0.0555

Таблица 3.5 – Сравнение различных алгоритмов идентификации

Объект 2	Алгоритм	N	RMSE	Среднее время (с)
	Cholesky	500	0.6953±0.0686	0.0517±0.0015
		1000	0.6426±0.0635	0.3792±0.0025
		1500	0.6199±0.0480	1.2885±0.0064
		2000	0.5979±0.0744	4.4015±0.0520
		2500	0.5859±0.0335	10.010±0.0761
		5000	0.5720±0.0013	128.89±0.0899
	Subset of data	500	0.7352±0.0953	0.0073±0.0001
		1000	0.6735±0.0214	0.0535±0.0033
		1500	0.6522±0.0891	0.1582±0.0006
		2000	0.6196±0.0051	0.3798±0.0030
		2500	0.5922±0.0429	0.7387±0.0061
		5000	0.5742±0.0049	10.144±0.3135
	Nyström	500	0.7580±0.1185	0.0249±0.0004
		1000	0.6315±0.0384	0.1544±0.0003
		1500	0.6109±0.0374	0.4402±0.0014
		2000	0.5902±0.0648	1.0075±0.0110
		2500	0.5857±0.0334	1.8889±0.0211
		5000	0.5717±0.0029	22.008±0.0627
	Low-rank approximation	500	0.6953±0.0686	0.0236±0.0011
		1000	0.6426±0.0635	0.0867±0.0010
		1500	0.6199±0.0480	0.1791±0.0009
		2000	0.5979±0.0744	0.3338±0.0017
		2500	0.5859±0.0335	0.5055±0.0008
		5000	0.5720±0.0013	1.9613±0.0125

Таблица 3.6 – Сравнение различных алгоритмов идентификации

Объект 3	Алгоритм	N	RMSE	Среднее время (с)
	Cholesky	500	0.0251±0.0018	0.0557±0.0017
		1000	0.0245±0.0021	0.3937±0.0030
		1500	0.0232±0.0015	1.4201±0.0468
		2000	0.0229±0.0017	4.5137±0.0746
		2500	0.0225±0.0014	10.244±0.1630
		5000	0.0209±0.0003	130.12±0.9833
	Subset of data	500	0.0238±0.0017	0.0084±0.0007
		1000	0.0233±0.0017	0.0564±0.0021
		1500	0.0223±0.0011	0.1703±0.0063
		2000	0.0223±0.0009	0.3865±0.0073
		2500	0.0228±0.0016	0.7835±0.0246
		5000	0.0211±0.0005	10.161±0.1261
	Nyström	500	0.0252±0.0031	0.0294±0.0035
		1000	0.0244±0.0019	0.1716±0.0068
		1500	0.0229±0.0015	0.4985±0.0093
		2000	0.0232±0.0017	1.1662±0.0378
		2500	0.0230±0.0016	2.2227±0.0817
		5000	0.0212±0.0006	22.597±0.1165
	Low-rank approximation	500	0.0251±0.0018	0.0337±0.0073
		1000	0.0245±0.0021	0.1203±0.0074
		1500	0.0232±0.0015	0.4105±0.0225
		2000	0.0229±0.0017	0.6647±0.0410
		2500	0.0225±0.0014	0.8619±0.0699
		5000	0.0209±0.0003	2.7176±0.0856

Исходя из полученных результатов вычисления среднеквадратической ошибки (RMSE) идентификации для различных объемов выборок и алгоритмов аппроксимации ядерной матрицы можно сделать следующие выводы. При увеличении объемов выборки среднеквадратическая ошибка снижается для всех алгоритмов. Значения среднеквадратической ошибки для низкоранговой аппроксимации практически совпадает со значением ошибки для алгоритма на базе разложения Холецкого, основанного на использовании полноранговой аппроксимации. В целом, среднеквадратическая ошибка для различных выборок и используемых алгоритмов аппроксимации ядерной матрицы отличается незначительно.

В таблице 3.7 представлены результаты работы предложенного алгоритма ICD-KRR в сравнении с аналогичными алгоритмами SD-KRR и SR-KRR. Усреднение результатов осуществлялось по 100 независимым запускам алгоритмов для различных значений случайных помех.

Таблица 3.7 – Сравнение алгоритма ICD-KRR с аналогичными алгоритмами

Объект 1							
Алгоритм	MSE (среднеквадратическая ошибка идентификации)						
	M=20	M=25	M=30	M=35	M=40	M=45	M=50
SD-KRR	0.2175	0.1807	0.1699	0.1559	0.1487	0.1436	0.1392
SR-KRR	0.1171	0.1143	0.1130	0.1125	0.1122	0.1120	0.1119
ICD-KRR	0.1123	0.1119	0.1116	0.1113	0.1110	0.1108	0.1107
Объект 2							
Алгоритм	MSE (среднеквадратическая ошибка идентификации)						
	M=20	M=25	M=30	M=35	M=40	M=45	M=50
SD-KRR	0.7418	0.6138	0.5788	0.5268	0.5050	0.4870	0.4710
SR-KRR	0.4451	0.4343	0.4293	0.4275	0.4263	0.4254	0.4253
ICD-KRR	0.4155	0.4143	0.4130	0.4118	0.4105	0.4098	0.4095

Окончание таблицы 3.7

Объект 3							
Алгоритм	MSE (среднеквадратическая ошибка идентификации)						
	M=20	M=25	M=30	M=35	M=40	M=45	M=50
SD-KRR	0.1783	0.1657	0.1354	0.1270	0.1186	0.1152	0.1102
SR-KRR	0.1018	0.0953	0.0775	0.0745	0.0706	0.0669	0.0651
ICD-KRR	0.0766	0.0619	0.0543	0.0521	0.0497	0.0422	0.0417

Полученные результаты свидетельствуют о более высокой точности предложенного алгоритма ICD-KRR в терминах среднеквадратической ошибки идентификации по сравнению с другими алгоритмами при заданных ограничениях на ранг аппроксимационной матрицы M , который напрямую определяет затраты вычислительных ресурсов, необходимые для решения задачи идентификации. Статистическая значимость полученных результатов подтверждается U-тестом Манна-Уитни с уровнем значимости $\alpha = 0.01$.

Выводы по третьей главе

Третья глава посвящена вопросам выбора ядерной функции, учету априорной информации с помощью ядерных функций, а также настройке параметров ядерных функций при наличии ограничений на вычислительные ресурсы. Рассмотрены основные подходы к снижению размерности задачи идентификации, включающие использование подмножества данных и низкоранговые аппроксимации матрицы системы. Предложен новый ядерный алгоритм идентификации для нелинейных дискретных объектов с памятью, отличающийся процедурой вычисления обратной матрицы системы на базе низкоранговой аппроксимации. Алгоритм позволяет настраивать размерность системы линейных уравнений, которая используется для оценки параметров ядерной модели. Изменение размерности системы уравнений позволяет регулировать вычислительные ресурсы, используемые в процессе оценки параметров модели.

По результатам численных экспериментов, предложенный алгоритм позволяет обеспечить эффективное по точности решение задачи идентификации при заданных ограничениях на ранг аппроксимационной матрицы, который напрямую определяет затраты вычислительных ресурсов, необходимые для решения задачи идентификации. Статистическая значимость результатов подтверждается U-тестом Манна-Уитни с уровнем значимости $\alpha = 0.01$.

4 Управление магистральным насосным агрегатом

4.1 Краткие технологические сведения о насосных агрегатах

В настоящее время особое внимание уделяется вопросам повышения эффективности функционирования сложных технических систем, что отмечается в программах энергоэффективности, ресурсосбережения, повышения производительности труда на всех уровнях государственной власти и отраслевых структур управления промышленностью. Наиболее значимый эффект ожидается в наиболее ресурсоемких и доходных отраслях, к которым относится нефтегазовая отрасль.

Объекты нефтегазовой отрасли, такие как магистральные нефтепроводы, характеризуются существенной структурной сложностью. С учетом характера протекающих в них процессов они могут рассматриваться как стохастические, нелинейные, динамические и нестационарные. Сведения о процессах в нефтепроводе носят неполный характер. В связи с этим, актуальным является проблема описания таких процессов в терминах адаптивных моделей, что позволит решать задачи прогноза параметров и управления, технической диагностики, обеспечения безаварийной работы оборудования, оптимизации технологических процессов и так далее.

Трубопроводные сети являются важной частью многих технологических объектов и систем водо-, тепло-, газо-, нефтетранспорта и эксплуатируются многими предприятиями коммунального хозяйства, энергетики, трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов [3]. В силу возрастающей сложности гидравлических систем, а также необходимости эффективного решения задач прогноза, управления и предотвращения чрезвычайных ситуаций постоянно требуется совершенствование методов их идентификации.

Гидравлические сети представляют собой сложную техническую систему, состоящие из множества соединенных друг с другом труб и различного технологического оборудования [23]. Главными особенностями трубопроводных

систем являются большая размерность, нелинейный и многосвязный характер описывающих ее операторов, сложная топология, невозможность измерения всех параметров системы, а также наличие ненаблюдаемых и случайных факторов, влияющих на ее функционирование. Задачи управления и прогнозирования характеристик технологических режимов работы сети неразрывно связаны с построением моделей и систем управления [6].

В настоящее время эксплуатация систем трубопроводного транспорта нефти не возможна без использования современных средств управления процессом перекачки нефти [50, 51, 55]. Автоматизированные распределенные системы управления внедрены и используются на магистральных нефтепроводах как за рубежом, так на территории России. Системы управления помогают решать задачи обеспечения заданных технологических режимов работы трубопровода, исключения аварийных ситуаций (включая предотвращение гидроудара и кавитационных процессов, эксплуатации системы аварийного пожаротушения и так далее), минимизации последствий аварий вследствие прорыва нефтепровода [2].

Существующие системы управления широко используют современный арсенал средств автоматизированного контроля и управления (SCADA-системы), оснащенных визуальным интерфейсом [9]. Измерительные комплексы, использующие датчики давления и объемного расхода, положения электроздвижек, управляются контроллерами, соединенными в единую сеть. Системы управления осуществляют реализацию управляющих воздействий на основании текущей информации с датчиков, данных лабораторного анализа нефти и моделей того или иного технологического режима, утвержденного к выполнению техническим руководством трубопроводной компании [33].

Компания АО «Транснефть – Западная Сибирь» эксплуатирует магистральный трубопровод на территории Западной и Центральной Сибири общей протяженностью около 3664 км. В состав оборудования, находящегося в ведении компании, входят 19 магистральных нефтенасосных станций,

резервуарный парк общей емкостью 1100 куб. м. Для управления процессом перекачки нефти компания использует систему управления нефтепроводом, обеспечивающую информационную, вычислительную и модельную поддержку работы этой системы.

Одним из основных элементов магистрального нефтепровода, от которого зависит эффективность перекачки нефти, является магистральный насосный агрегат [22]. Магистральные насосные агрегаты представляют собой сложную нелинейную, динамическую и нестационарную систему, от которой зависит надежность и эффективность процесса перекачки нефти. Расчет параметров насосов, включающих расходно-напорные характеристики, характеристики КПД в зависимости от напора, рассчитываются, как правило, на воде. Пересчет характеристик насосного агрегата на вязкую нефть может осуществляться аналитически, но эти расчеты требуют наличия информации о физических свойствах нефти, включающих, в частности, значение вязкости нефти, которое, как правило, известно лишь приближенно [42]. Кроме того, в процессе эксплуатации насосных агрегатов его характеристики могут меняться вследствие ремонта или замены отдельных деталей и узлов насосного агрегата [2]. Таким образом, характеристики насосного агрегата не всегда известны и требуют постоянного уточнения в ходе его эксплуатации.

В настоящее время в управляющих устройствах нефтеперекачивающей станции используется схема управления по отклонению с линейным законом, который не позволяет обеспечить приемлемое качество регулирования. При этом в связи с дрейфом характеристик насосного агрегата с течением времени, ПИД-регуляторы требуют регулярной настройки с учетом текущего состояния насосного агрегата, для которой необходимо проводить натурные испытания. Такой подход требует достаточно много ресурсов и времени и по этой причине также не является приемлемым. В связи с этим, актуальной проблемой является совершенствование алгоритмического и программного обеспечения системы управления давлением магистральных насосных агрегатов.

4.2 Предлагаемая схема управления магистральным насосным агрегатом

Рассмотрим общую схему Кемчугской нефтеперекачивающей станции с насосным агрегатом НМ 2500-230, представленную на рисунке 4.1.

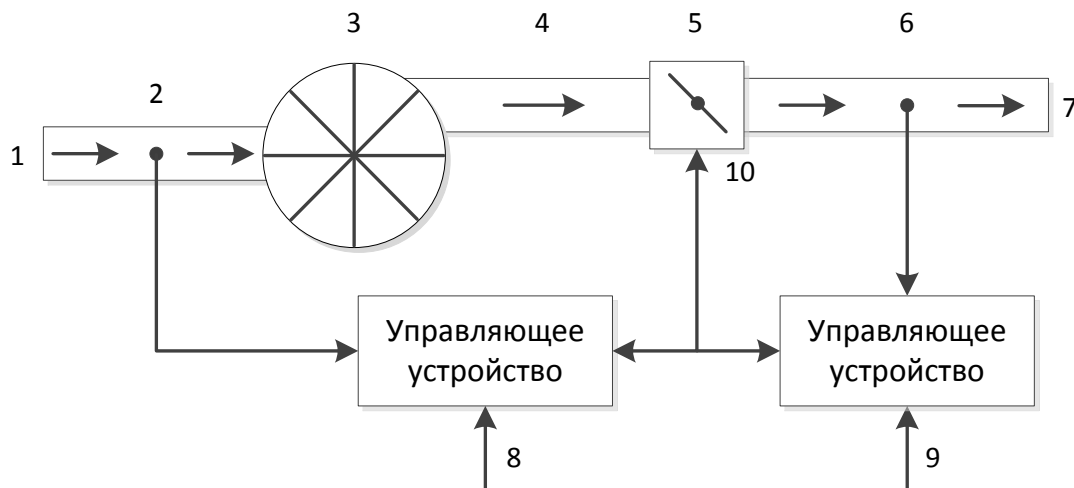


Рисунок 4.1 – Общая схема нефтеперекачивающей станции

На рисунке 4.1 приняты следующие обозначения:

1. Вход станции [1];
2. Датчик давления на входе станции [2];
3. Насосный агрегат станции [3];
4. Коллектор станции [4];
5. Поворотная дисковая заслонка [5];
6. Датчик давления на выходе станции [6];
7. Выход станции [7];
8. Уставка по давлению на входе станции [8];
9. Уставка по давлению на выходе станции [9];
10. Датчик положения заслонки [10].

В процессе работы насосные агрегаты нагнетают давление в трубе на выходе [7] станции и разрезают на входе [1]. И то, и другое явления нормальны, однако в предельных своих значениях приводят к нарушению работы станции: превышение давлением нефти предела прочности выходной трубы приводит к её

разрыву, а чрезмерное понижение давления на входе вызывает кавитационное разрушение лопастей насосных агрегатов [3].

Для устранения данных явлений в работе станции используется увеличение сопротивления выходной трубы станции. Данный способ реализуется внесением в выходную трубу регулирующего элемента – клапана [5]. В качестве клапанов на станции используются поворотные дисковые заслонки. При достижении опасного предела давления нефти на выходе станции клапан закрывается. Это вызывает увеличение перепада давления на заслонке, что уменьшает давление на выходе. Одновременно с этим уменьшается расход нефти, и, как следствие, увеличивается давление на входе станции. Закрытие клапанов в выходной трубе позволяет избежать её разрыва и кавитационного разрушения насосных агрегатов. Однако это также уменьшает пропускную способность станции, от которой требуется перекачка максимально возможного количества нефти. Поэтому целесообразно держать клапан как можно более открытым, не причиняя при этом вред самой станции.

Датчик [2] измеряет и передаёт в регулятор давление нефти на приёме станции. Регулятор сравнивает текущее значение давления на приёме с уставкой [8] и вычисляет положение клапана [5], необходимое для уменьшения их рассогласования. Точно также регулятор из сигнала датчика [7] и уставки [9] находит положение клапана [5], необходимое для коррекции давления на выходе станции [7]. Отличие работы регулятора на выходе станции заключается в том, что для уменьшения давления на выходе необходимо увеличить процент закрытия клапанов, т.е. регулятор является реверсивным. Регуляторы на входной и выходной трубе станции включаются только в том случае, если давление на входе станции меньше уставки по давлению на входе, либо давление на выходе станции больше уставки по давлению на выходе. При этом на вход поворотной дисковой заслонки подается наибольшее значение процента закрытия заслонки.

Нефтеперекачивающая станция как объект идентификации представляет собой сложную нелинейную динамическую систему с перестраиваемой

структурой и изменяющимися параметрами [41]. Основными факторами, которые влияют на работу магистрального насосного агрегата, являются: объемный расход нефти, дифференциальный напор, температура, момент инерции ротора насоса, а также угловая скорость вращения ротора.

Режимы работы насосных агрегатов характеризуется различными значениями мгновенного расхода, который, в частности, зависит от процесса распределения давления на участке магистрального нефтепровода, который предшествует насосному агрегату [11, 13]. Учитывая то, что расход насосного агрегата не измеряется, построение модели насосного агрегата, которая позволяла бы прогнозировать значения давления выходной и входной трубы для любых режимов его работы не представляется возможным.

Изменение структуры нефтеперекачивающей станции является следствием замены или ремонта отдельных составных узлов станции, включающих, в том числе, контрольно-измерительную систему. Нефтеперекачивающая станция функционирует в условиях непрерывного накопления информации. Измерения датчиков давления и положения заслонки осуществляются с периодом $\Delta t = 1\text{с}$. Поэтому оценку параметров и управляющего воздействия (положения поворотной дисковой заслонки) необходимо осуществлять не более чем за одну секунду.

Таким образом, построение модели станции осуществляется в условиях неполной информации, поскольку информация об основных входных переменных – объемном расходе насосного агрегата, моменте инерции и угловой скорости вращения ротора, отсутствует в связи с отсутствием датчиков их измерения. Расходомеры являются дорогостоящими измерительными устройствами, которые имеют небольшой срок службы, поэтому их, как правило, устанавливают только на тех участках нефтепровода, на которых осуществляется учет объемов поступившей и переданной нефти. Из наблюдений доступны только измерения давления входной трубы насосного агрегата, давления выходной трубы насосного агрегата, а также положения поворотной дисковой заслонки.

Учитывая имеющуюся априорную и текущую информацию, для управления насосным агрегатом предлагается схема, представленная на рисунке 4.2.

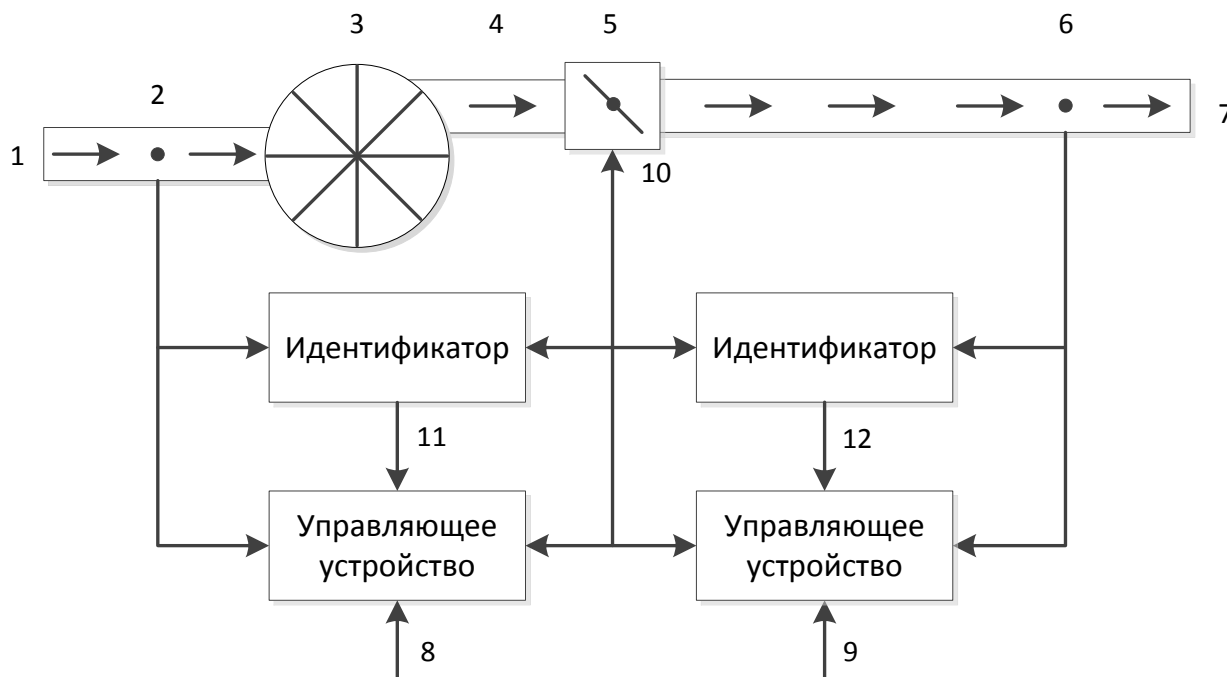


Рисунок 4.2 – Предлагаемая схема управления магистральным насосным агрегатом

На рисунке 4.2 приняты следующие дополнительные обозначения:

1. Вход станции [1];
2. Датчик давления на входе станции [2];
3. Насосный агрегат станции [3];
4. Коллектор станции [4];
5. Поворотная дисковая заслонка [5];
6. Датчик давления на выходе станции [6];
7. Выход станции [7];
8. Уставка по давлению на входе станции [8];
9. Уставка по давлению на выходе станции [9];
10. Датчик положения заслонки [10].
11. Параметры модели для давления на входе насосного агрегата [11];
12. Параметры модели для давления на выходе насосного агрегата [12].

В связи с тем, что характер зависимости входных и выходных переменных станции, заданный с точностью до вектора параметров, неизвестен, для построения модели и последующего управления объектом предлагается использовать разработанный ядерный алгоритм идентификации CH-KRLS и ядерный алгоритм дуального управления KRDC. В схему управления магистральным насосным агрегатом предлагается включить идентификатор и управляющее устройство по давлению на входе насосного агрегата, а также идентификатор и управляющее устройству по давлению на выходе насосного агрегата. Идентификаторы реализуют предложенный алгоритм CH-KRLS и обеспечивают оценку параметров моделей давления на входе и на выходе насоса. Оценки параметров поступают на вход регуляторов, основанных на базе предложенного алгоритма управления KRDC, в которых осуществляется прогноз давлений на предстоящий такт времени, после чего производится оценка управляющих воздействий, обеспечивающих приведение давлений на входе и на выходе насосного агрегата к желаемым значениям. Каждый из идентификаторов и управляющих устройств работают независимо друг от друга. В качестве управляющего воздействия на вход привода поворотной дисковой заслонки подается наибольшее значение оценок управляющего воздействия, полученных управляющими устройствами. Несмотря на то, что в теории работа одного из регуляторов исключает работу другого регулятора, при небольших отклонениях давления, например, из-за случайных помех, возможна ситуация, при которой включатся оба управляющих устройства. В такой ситуации предложенный выше подход позволяет синхронизировать работу управляющих устройств. Описанная схема управления полностью укладывается в рамки существующей контрольно-измерительной системы магистрального насосного агрегата НМ 2500-230. В предложенной схеме для управления непосредственно используются только те переменные, которые доступны для наблюдения. Для реализации предложенной схемы необходимо осуществить только перепрограммирование контроллеров на входе и на выходе насосного агрегата.

4.3 Численное исследование системы управления

Численное исследование системы управления давлением насосного агрегата на базе предложенных рекуррентных ядерных алгоритмов CH-KRLS и KRDC осуществлялась по обучающим выборкам, полученным в ходе измерения входных и выходных переменных магистрального насосного агрегата НМ 2500-230. Объем обучающих выборок составлял $N=64000$.

На следующих рисунках 4.3, 4.4 и 4.5 представлены графики безусловной плотности распределения входных и выходных переменных, полученные по исходным обучающим выборкам. Построение графиков осуществлялись с помощью ядерных оценок плотности с гауссовым ядром [43].

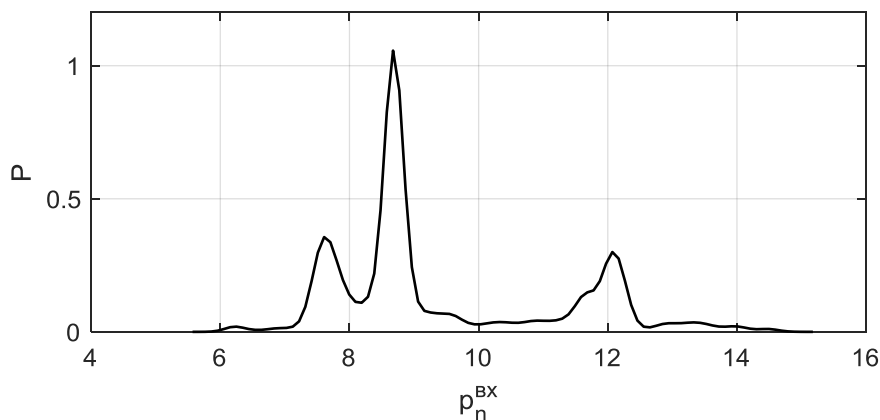


Рисунок 4.3 – Плотность распределения давления на входе насосного агрегата

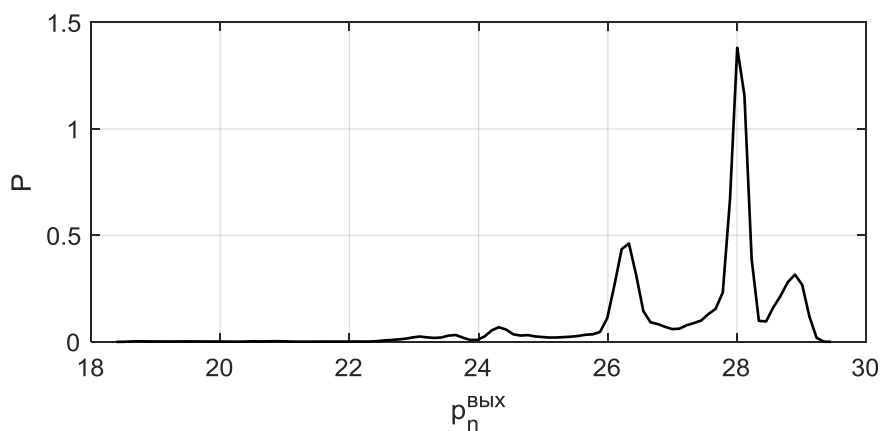


Рисунок 4.4 – Плотность распределения давления на выходе насосного агрегата

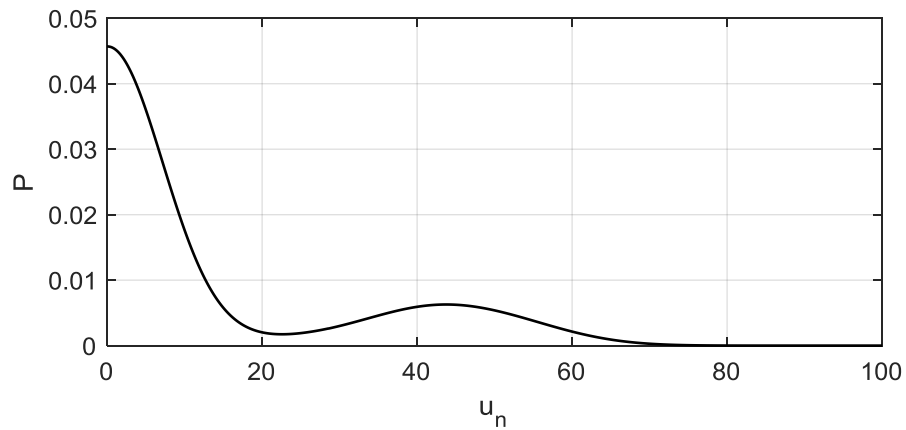


Рисунок 4.5— Плотность распределения положения дисковой заслонки

На рисунках 4.6-4.9 представлены графики условных распределений входных и выходных переменных.

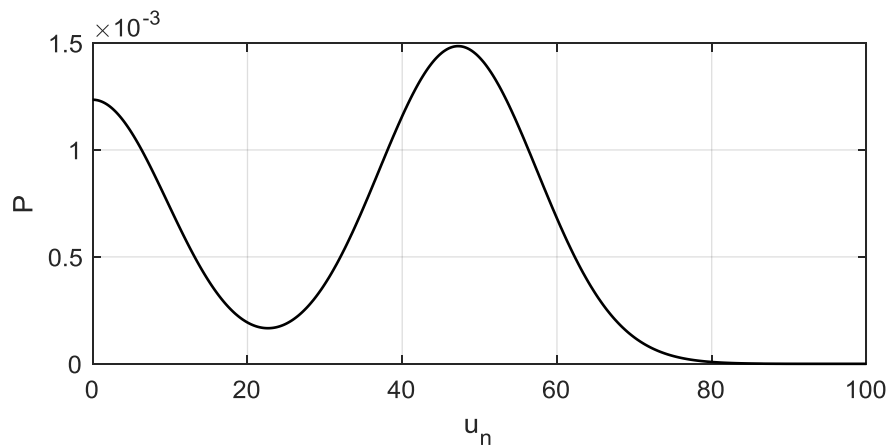


Рисунок 4.6 – Условная плотность распределения положения дисковой заслонки для первого регулятора

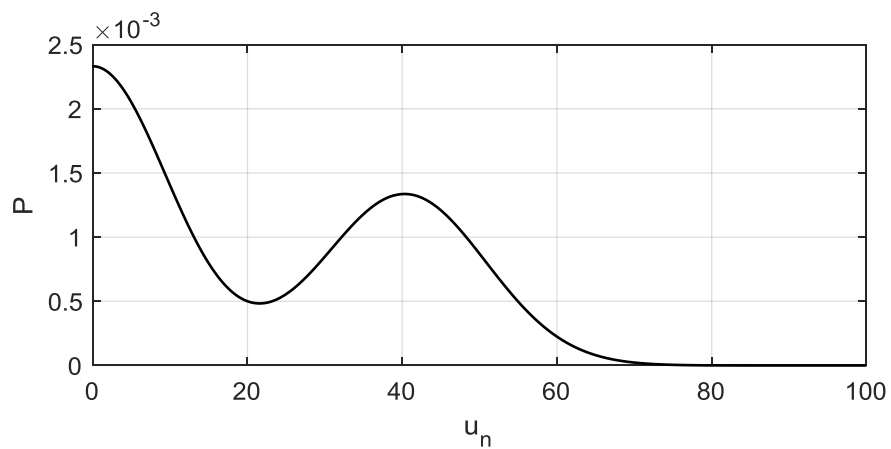


Рисунок 4.7 – Условная плотность распределения положения дисковой заслонки для второго регулятора

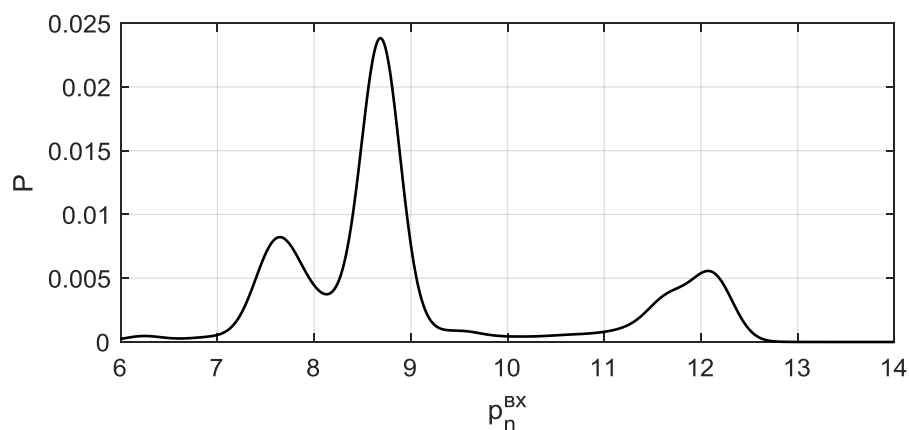


Рисунок 4.8 – Условная плотность распределения давления на входе для первого регулятора

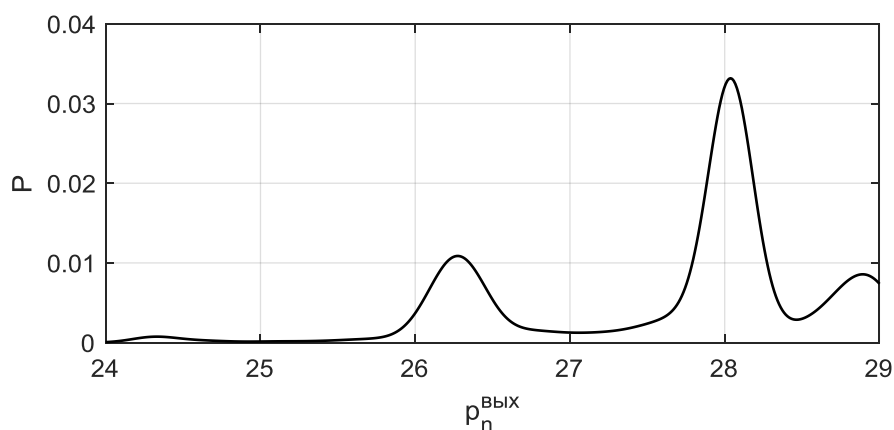


Рисунок 4.9 – Условная плотность распределения давления на выходе для второго регулятора

Полученные на рисунках 4.3-4.9 графики оценок плотностей являются полимодальными, что свидетельствует о том, что насосный агрегат НМ 2500-230 в процессе своей работы функционирует в нескольких режимах. В представленной обучающей выборке наблюдается три различных режимов работы насосного агрегата.

В рамках существующей контрольно-измерительной системы насосного агрегата период дискретизации равен одной секунде. С учетом данного ограничения объем выборки M в алгоритме идентификации CH-KRLS и дуального управления KRDC принимается равным $M=1000$.

На рисунках 4.10-4.13 представлены результаты управления давлением на входе и на выходе насосного агрегата при изменении уставок по давлению на входе и на выходе соответственно.

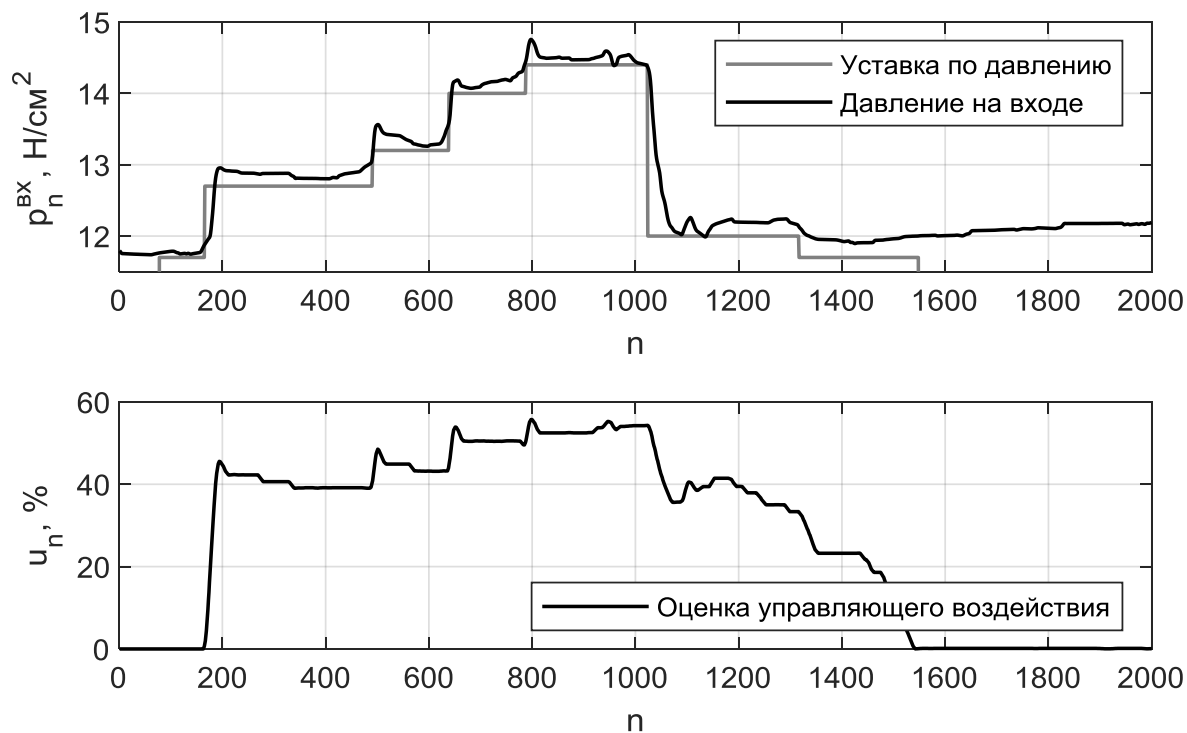


Рисунок 4.10 – Пример управления давлением на входе насосного агрегата

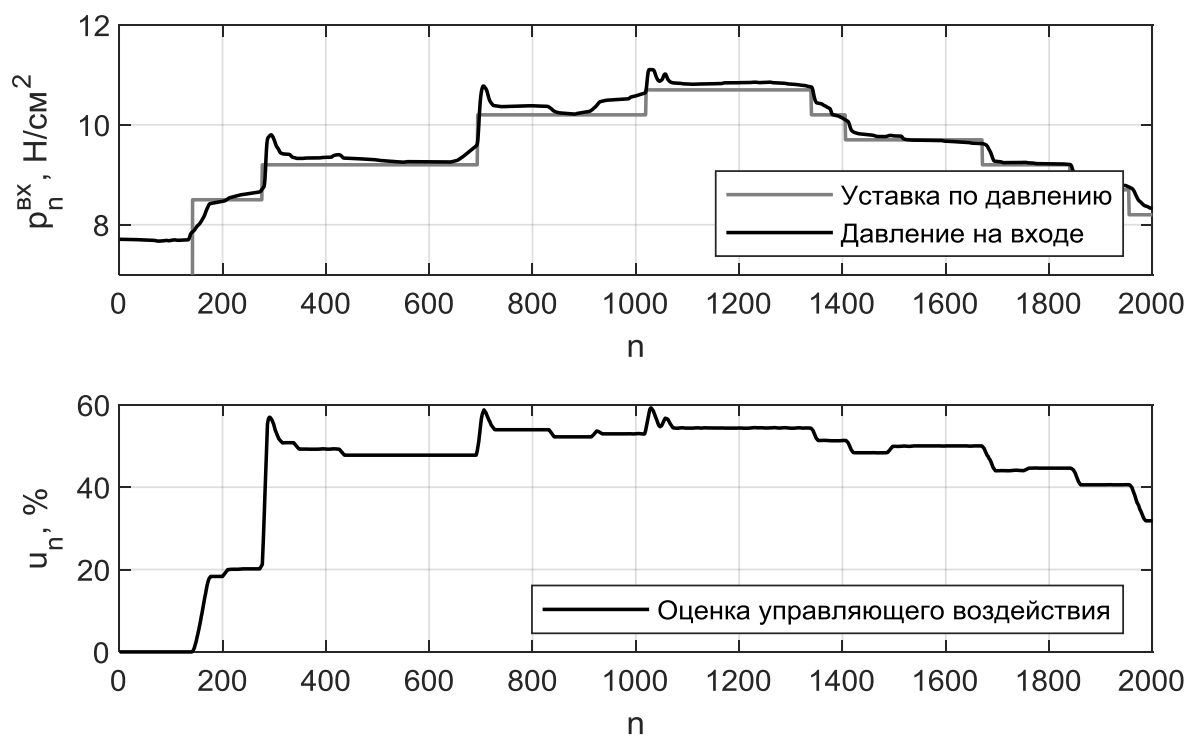


Рисунок 4.11 – Пример управления давлением на входе насосного агрегата

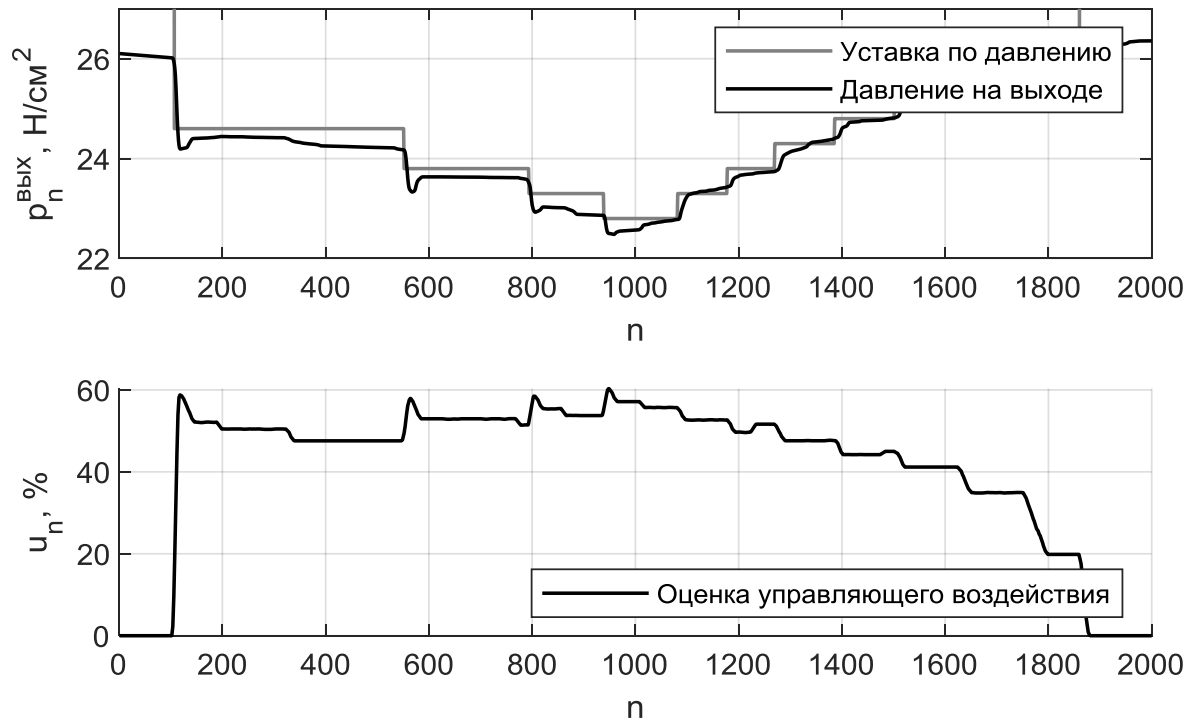


Рисунок 4.12 – Пример управления давлением на выходе насосного агрегата

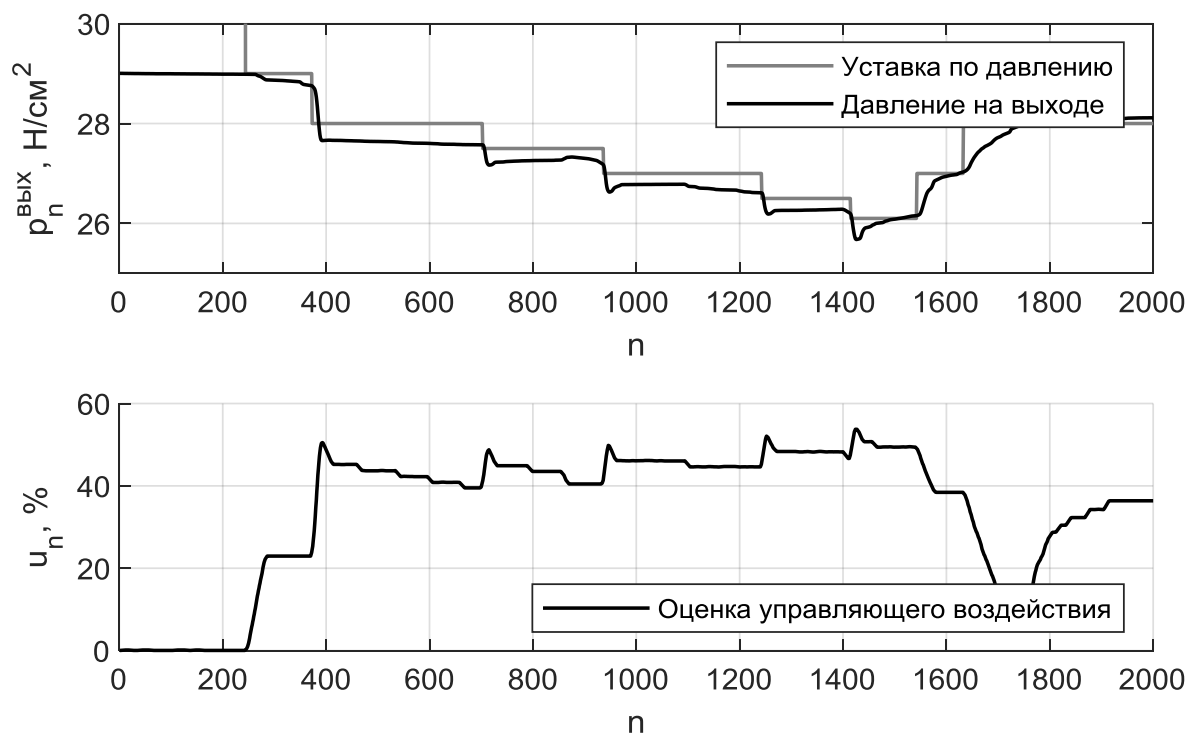


Рисунок 4.13 – Пример управления давлением на выходе насосного агрегата

Как показывают приведенные результаты численных экспериментов системы управления давлением на базе предложенных ядерных алгоритмов идентификации и дуального управления показывают, что значения выходных переменных (давления на входе и давления на выходе) близки к желаемым значениям, что позволяет сделать вывод о целесообразности применения предложенных алгоритмов для управления давлением нефтеперекачивающей станцией с магистральным насосным агрегатом.

В таблице 4.1 представлены усредненные значения среднеквадратической ошибки для существующей и предлагаемой системы управления.

Таблица 4.1 – Сравнение существующей и предлагаемой системы управления

Система управления	Среднеквадратическая ошибка управления	
	Регулятор на входе	Регулятор на выходе
Существующая система	0.0991	0.0659
Предложенная система	0.0869	0.0588

В соответствии с таблицей 4.1 среднеквадратическая ошибка управления по давлению на входе насосного агрегата составила $MSE = 0.0869$, а среднеквадратическая ошибка управления по давлению на выходе насосного агрегата – $MSE = 0.0588$. По результатам испытаний существующей системы управления давления насосного агрегата НМ 2500-2300 Кемчугской нефтеперекачивающей станции среднеквадратические ошибки управления давлением на входе и на выходе насосного агрегата составили $MSE = 0.0991$ и $MSE = 0.0659$ соответственно. Следовательно, применение предложенных алгоритмов CH-KRLS и KRDC позволяет снизить среднеквадратическую ошибку

управления на 14% для регулятора на входе насосного агрегата и на 12% для регулятора на выходе насосного агрегата.

Выводы по четвертой главе

В главе рассмотрена задача управления давлением нефтеперекачивающей станцией с магистральным насосным агрегатом НМ 2500-230, размещенного на Кемчугской нефтеперекачивающей станции. Выборки измерений входных и выходных переменных были предоставлены АО «Транснефть – Западная Сибирь». Выборки были получены в результате измерений входных и выходных переменных насосного агрегата на интервале времени, равным одним суткам. По результатам анализа выборок, насосный агрегат является нелинейным, динамическим и нестационарным объектом. Для повышения эффективности управления давлением насосного агрегата, предложена система управления, основанная на предложенных рекуррентных ядерных алгоритмах идентификации CH-KRLS и дуального управления KRDC.

Результаты численных экспериментов системы управления давлением на базе предложенных ядерных алгоритмов идентификации и дуального управления показывают, что значения давлений на входе и на выходе насосного агрегата близки к желаемым значениям, что позволяет сделать вывод о целесообразности применения предложенных ядерных алгоритмов идентификации и управления для управления давлением магистрального насосного агрегата. По результатам приведенных численных экспериментов, применение системы управления на базе алгоритмов CH-KRLS и KRDC позволяет снизить среднеквадратическую ошибку управления в сравнении с существующей системой управления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В соответствии с поставленной целью и задачами исследования в диссертации разработаны алгоритмы идентификации и управления для нелинейных дискретных объектов с памятью, информация о структуре которых неизвестна, а имеющиеся вычислительные ресурсы ограничены. Предложенные алгоритмы в отличие от интеллектуальных методов позволяют изменять затраты вычислительных ресурсов без изменения структуры модели, что в свою очередь позволяет унифицировать программное обеспечение для систем управления технологическими процессами, имеющих различные вычислительные мощности. По совокупности полученных результатов диссертационной работы можно сделать вывод о том, что решена важная проблема, имеющая как научное, так и практическое значение.

Основные итоги выполненного исследования заключаются в следующем:

1. Проведен анализ основных методов идентификации и управления нелинейными дискретными объектами с памятью в условиях неполной информации.
2. Сформулирована формализованная постановка задачи идентификации и управления для нелинейных дискретных объектов с памятью в условиях неполной информации и ограниченных вычислительных ресурсов.
3. Разработан новый алгоритм оценки параметров ядерных моделей нелинейных дискретных объектов с памятью, обеспечивающий эффективное по точности решение задачи идентификации при заданных ограничениях на вычислительные ресурсы.
4. Предложен новый рекуррентный ядерный алгоритм идентификации нелинейных дискретных объектов, который в среднем требует на 15% меньше вычислительных операций и в 2 раза меньше памяти по сравнению с аналогичными алгоритмами.

5. Разработан новый рекуррентный ядерный алгоритм управления с идентификатором для нелинейных дискретных объектов с памятью, позволяющий оценивать управляющее при наличии ограничений на вычислительные ресурсы.

6. Проведено численное исследование предложенных алгоритмов на представительном множестве тестовых задач идентификации и управления применительно к нелинейным дискретным объектам с памятью, подтверждающее эффективность предложенных алгоритмов.

7. С использованием предложенных алгоритмов решена практическая задача управления давлением магистрального насосного агрегата НМ 2500-230 Кемчугской нефтеперекачивающей станции. По результатам вычислительных экспериментов установлено, что применение системы управления на базе предложенных алгоритмов позволяет снизить среднеквадратическую ошибку управления на 14% для регулятора на входе насосного агрегата и на 12% для регулятора на выходе насосного агрегата.

В соответствии с основными выводами и результатами диссертационной работы можно рекомендовать применение предложенных ядерных алгоритмов идентификации и управления в системах автоматизированного управления технологическими процессами на производственных предприятиях, эксплуатирующих сложные технические объекты, характер априорных сведений о которых является неполным, а имеющиеся вычислительные мощности не позволяют использовать широко известные методы.

Перспективы дальнейшей разработки темы исследования предусматривают развитие предложенного подхода применительно к задачам идентификации и управления многомерными системами, а также разработку автоматических методов настройки параметров предложенных алгоритмов идентификации и управления, позволяющих снизить влияние человеческого фактора на процесс управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агафонов Е.Д. Алгоритм коррекции ошибок измерений датчиков давления на линейной части магистрального нефтепровода / Е.Д. Агафонов, Н.Р. Антропов // Контроль. Диагностика. 2016. № 7. С. 43-48.
2. Агафонов Е.Д. К вопросу синтеза адаптивных алгоритмов идентификации технологического процесса перекачки нефти по магистральным нефтепроводам / Е.Д. Агафонов // XIV науч.-техн. конф. молодежи ОАО «Транссибнефть»: тезисы конкурсных работ. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2013. – С. 67.
3. Агафонов Е.Д. Идентификация и управление технологическими параметрами гидравлических сетей / Е.Д. Агафонов, Н.Р. Антропов // Материалы XVIII Международной научной конференции «Решетневские чтения», СибГАУ им. акад. М.Ф. Решетнева, Красноярск, 2014, Т.2. С. 7-8.
4. Агафонов Е.Д. Идентификация параметров гидравлического сопротивления модели гидравлической сети / Е.Д. Агафонов, Н.Р. Антропов // Сибирский журнал науки и технологий. 2017. Т. 18, № 3. С. 492-498.
5. Агафонов Е.Д. Непараметрический критерий линейности в задачах идентификации динамических процессов / Е.Д. Агафонов // Труды VI Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'07, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2007.
6. Агафонов Е.Д. Об оценке решения системы уравнений в задаче построения модели гидравлической сети / Е.Д. Агафонов, Н.Р. Антропов // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2014. № 3. С. 110-117.
7. Агафонов Е.Д. О проверке гипотезы линейности динамических систем / Е.Д. Агафонов // Вестник НИИ СУВПТ. – 2000. – Вып. 5. – С. 18-25.
8. Агафонов Е.Д. Оценка параметров гидравлического сопротивления модели многосвязной трубопроводной сети / Е.Д. Агафонов, Н.Р. Антропов // Материалы Международной научной конференции «Решетневские чтения», 2016. Т. 2. № 20. С. 8-9.

9. Агафонов Е.Д., Ващенко Г.В. Современные тенденции информатизации и автоматизации нефтегазовой отрасли / Е.Д. Агафонов, Г.В. Ващенко // Научный журнал Сибирского федерального университета: техника и технология. 2016. №9 (8). С. 1340-1348.

10. Антропов Н.Р. Адаптивные модели коррекции показаний датчиков давления магистрального нефтепровода / Н.Р. Антропов, Е.Д. Агафонов // Материалы XIX Международной научной конференции «Решетневские чтения», СибГАУ им. акад. М.Ф. Решетнева, Красноярск, 2015, Т.2. С. 8-10.

11. Антропов Н.Р. Идентификация процесса распределения давления линейной части магистрального нефтепровода [Электронный ресурс] // Проспект Свободный - 2016: материалы конф.– Красноярск: Сиб. федер. ун-т., 2016. Режим доступа: <https://elib.sfu-kras.ru/handle/2311/21398>

12. Антропов Н.Р. Комбинированный подход к построению модели многосвязной гидравлической сети [Электронный ресурс] // Молодежь и наука: сборник материалов VIII Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 80-летию образования Красноярского края. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т., 2014. Режим доступа: <https://elib.sfu-kras.ru/handle/2311/16881>

13. Антропов Н.Р. Модель прогноза и коррекции показаний датчиков давления линейной части магистрального нефтепровода / Н.Р. Антропов // II Международная научно-техническая конференция молодежи ПАО «Транснефть» и организаций – членов Международной ассоциации транспортировщиков нефти: тезисы конкурсных работ / АО «Транснефть – Западная Сибирь». – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2016. – С. 37-38.

14. Антропов Н.Р. Непараметрический алгоритм идентификации и управления многосвязными системами [Электронный ресурс] // Проспект Свободный-2015: материалы конф., посвященной 70-летию Великой Победы – Красноярск: Сиб. федер. ун-т., 2015. Режим доступа: <https://elib.sfu-kras.ru/handle/2311/21223>

15. Антропов Н.Р. О размерности вложения нелинейных динамических систем в задаче идентификации // Материалы XXIII Международной научной конференции «Решетневские чтения», СибГАУ им. акад. М.Ф. Решетнева, Красноярск, 2019, Ч.2. С. 139-140.

16. Антропов Н.Р. Робастный алгоритм адаптивной идентификации нелинейных объектов с памятью / Н.Р. Антропов, Е.Д. Агафонов // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2020. № 12. С. 192-200.

17. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений / Р. Беллман. – М.: Издательство иностранной литературы, 1954. – 216 с.

18. Бессонов А.А., Загашвили Ю.В., Маркелов А.С. Методы и средства идентификации динамических объектов. – Л.: Энергоатомиздат, 1989. – 280 с.

19. Воронов А.А., Титов В.К., Новогранов Б.Н. Основы теории автоматического регулирования и управления: учеб. пособие для вузов / А.А. Воронов, В.К. Титов, Б.Н. Новогранов. – М.: Высшая школа, 1977. – 519 с.

20. Каминскас В. А., Яницкене Д. Ю. Идентифицируемость нелинейных объектов класса Гаммерштейна, Автомат. и телемех., 1985, Вып. 9, С. 69–77.

21. Каминскас В.А. Идентификация динамических систем по дискретным измерениям / В.А. Каминскас. – Вильнюс : Мокслас, 1982. – Ч. 1. –372 с.

22. Карелин В.Я., Минаев А.В. Насосы и насосные станции / В.Я. Карелин, А.В. Минаев. – М.: Стройиздат, 1986. – 320 с.

23. Керимов М.З. Трубопроводы нефти и газа / М.З. Керимов. – М.: Наука, 2002. – 256 с.

24. Красноштанов А.П. Комбинированные многосвязные системы. – Новосибирск: Наука, 2001. – 176 с.

25. Красноштанов А.П. Метод генерации решений на многосвязных системах в условиях неопределенности: дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.01 / Красноштанов Александр Павлович. – Красноярск, 2001. – 295 с.

26. Кунцевич В.М. Управление семейством нелинейных динамических систем при измерениях с ограниченными помехами. Тр. ИММ УрО РАН, Вып. 20, № 4, 2014, 178–186.
27. Крупский В.Н. Теория алгоритмов. Введение в сложность вычислений. Учебное пособие. – Новосибирск: Юрайт, 2017. – 118 с.
28. Льюнг Л. Идентификация систем, - М.: Наука, 1991. – 421 с.
29. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов. – Москва, Ленинград: государственное издание технико-теоретической литературы, 1950. – 472 с.
30. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения / И.Г. Малкин. - М.: Наука, 1966. – 530 с.
31. Медведева Н.А. О линейности динамических систем / Н.А. Медведева // В сб. : Информатика и системы управления. – Красноярск: изд-во КГТУ, 1997. – С. 148-154.
32. Медведев А.В. Основы теории адаптивных систем: Монография. – Красноярск: СибГАУ, 2015. – 526 с.
33. ОР-23.040.00-КТН-171-17 Магистральный трубопроводный транспорт нефти и нефтепродуктов. Порядок планирования режимов работы магистрального трубопровода.
34. Перегудов Ф.И. Основы системного анализа / Ф.И. Перегудов, Ф.П. Тарасенко. - Томск: Изд-во НТЛ, 1997. – 396 с.
35. Райбман Н.С. Дисперсионная идентификация / Н.С. Райбман – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 336 с.
36. Райбман Н.С. Что такое идентификация / Н.С. Райбман. – М.: Наука, 1970. – 120 с.
37. Райбман Н.С., Чадеев В.М. Адаптивные модели в системах управления. М.: Сов. радио, 1966. – 156 с.
38. Растригин Л.А. Современные принципы управления сложными объектами. – М.: Сов. радио, 1980. – 232 с.

39. Растригин Л.А., Маджаров Н.Е. Введение в идентификацию объектов управления. – М.: Энергия, 1977. – 216 с.
40. Растригин Л.А. Адаптация сложных систем. Рига: Зинатне, 1981. – 375 с.
41. Трофимов В.В. Автоматизированное управление магистральными нефтепроводами / В.В. Трофимов, В.П. Тарасенко, В.И. Мащенко. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1994. – 247 с.
42. Тугунов П.И., Новоселов В.Ф., Коршак А.А., Шаммазов А.М. Типовые расчеты при проектировании и эксплуатации нефтебаз и нефтепроводов: учеб. пособие для вузов / П.И. Тугунов, В.Ф. Новоселов, А.А. Коршак, А.М. Шаммазов. – Уфа: ООО «ДизайнПолиграфСервис», 2002. – 658 с.
43. Хардле В. Прикладная непараметрическая регрессия / В. Хардле. – М.: Мир, 1993. – 349 с.
44. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем / А.А.Фельдбаум. – М.: Физматгиз, 1963. – 552 с.
45. Четаев Н.Г. Устойчивость движения / Н.Г. Четаев. – М.: Гостехиздат, 1955. – 176 с.
46. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления / П. Эйкхофф. – М.: Мир, 1975. – 683с.
47. Aizerman M. A., Braverman E. M., Rozoner L. Theoretical foundations of the potential function method in pattern recognition learning. Automation and Remote Control, 1964, vol. 25, 821–837.
48. Alpcan T., Shames I., Cantoni M., Nair G. Learning and information for dual control. In: Proceedings of the Control Conference (ASCC), 2013 9th Asian, 2013, pp. 1–6.
49. Alper P. A consideration of the discrete volterra series. IEEE Transactions on Automatic Control, 1965, vol. 10(3), pp. 322–327.
50. Antropov N. A modified algorithm for identification and output forecast of multidimensional / N.R. Antropov, E.D. Agafonov, A.I. Kuklina // Молодежь. Общество. Современная наука, техника и инновации. 2018. С. 156-158.

51. Antropov N. Identification of hydraulic resistance parameters in hydraulic network model / V. Bukhtoyarov, E. Agafonov, N. Antropov, V. Tynchenko, V. Tynchenko // Journal of Applied Engineering Science, 2018, 16 (2). pp. 267-273.

52. Antropov N. Oil Pipeline Pressure Measurements Forecasting and Correction / E. Agafonov, N. Antropov // Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric Methods in Cybernetics and System Analysis - AMSA'2017, Krasnoyarsk, Russia: Proceedings of the International Workshop, 2017. pp. 270-278.

53. Antropov N. On the embedding parameters in kernel identification problem of nonlinear dynamical systems / N. Antropov, E. Agafonov // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 734 (2020) 012143.

54. Antropov N.R. A Nonparametric Identification and Control Algorithm of Multi Connected Systems / N.R. Antropov, E.D. Agafonov, A.I. Kuklina // Молодежь. Общество. Современная наука, техника и инновации. 2015. № 14. С. 191-193.

55. Antropov N.R. Identification of pipeline network model parameters [Электронный ресурс] / Antropov N.R. // Проспект Свободный - 2017: материалы конф., посвященный году экологии в Российской Федерации – Красноярск: Сиб. федер. ун-т., 2017. Режим доступа: <https://elib.sfu-kras.ru/handle/2311/16881>

56. Antropov N.R. Kernel identification algorithms for nonlinear systems [Электронный ресурс] / N.R. Antropov, E.D. Agafonov, A.I. Kuklina // Молодежь. Общество. Современная наука, техника и инновации. 2019. С. 191-193. Режим доступа: <https://flcys.sibsau.ru/page/materials>

57. Billings S.A., Fakhouri S.Y. Identification of nonlinear systems using the Wiener model. Electronics Letters, 1977, vol. 13(17), pp. 502–504.

58. Billings S.A., Fakhouri S.Y. Nonlinear system identification using the Hammerstein model. International Journal of System Sciences, 1979, vol. 10(5), pp. 567–578.

59. Brusafferri A., Matteucci M., Portolani P., Spinelli S. Nonlinear system identification using a recurrent network in Bayesian framework. 2019 IEEE 17th International Conference on Industrial Informatics (INDIN), 2019, pp. 319–324.

60. Chen B., Zhao S., Zhu P., Principe J.C. Quantized kernel least mean square algorithm. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2012, vol. 23(1), pp. 22–32.
61. Chowdhary G., Kingravi H.A., How P.J., Vela P.A. Bayesian Nonparametric Adaptive Control Using Gaussian Processes. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2015, vol. 26, no. 3. pp. 535–550.
62. Csató L., Oppner M. Sparse online Gaussian processes. *Neural Computation*. 2002, vol. 14, no. 3, pp. 641–668.
63. de Kruif B.J., de Vries T.A. Pruning error minimization in least squares support vector machines. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2003, vol. 14(3), pp. 696–702.
64. Dey A.U., Harit G., Hafez A.H.A. Greedy Gaussian Process Regression Applied to Object Categorization and Regression. *Proceeding of the 11th Indian Conference*. In *proceeding of the 11th Indian Conference on Computer Vision, Graphics and Image Processing (ICVGIP 2018)*, 2018, no. 51, pp. 1–8.
65. Engel Y., Mannor S., Meir R. The kernel recursive least squares algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, vol. 52, no. 8, 2275–2285.
66. Filatov N., Unbehauen H. Survey of adaptive dual control methods. *IEEE Proc. Control Theory Appl*, 2000, vol. 147(1), pp. 119–128.
67. Gao Y., Liu Y., Wang H., Li P. Adaptive Control of a Class of Nonlinear Discrete-Time Systems with Online Kernel Learning. *Proceeding of the 17th World Congress. The International Federation of Automatic Control*, 2008, pp. 7937–7942.
68. Gaudio J.E., Gibson T.E., Annaswamy A.M., Bolender M.A., Lavretsky E. Connections Between Adaptive Control and Optimization in Machine Learning, 2019 *IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)*, 2019, pp. 4563–4568.
69. Golub G.H., Van Loan Ch.F. *Matrix computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 3 edition, 1996. – 728 p.

70. Grancharova A., Johansen T.A. Survey of explicit approaches to constrained optimal control. *Switching and Learning in Feedback Systems. Lecture Notes in Computer Science*, 2005, vol. 3355, pp. 47–97.
71. Grande R.C., Chowdhary G., How J.P. Nonparametric Adaptive Control using Gaussian Processes with Online Hyperparameter Estimation. *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, 2013, pp. 861–867.
72. Harbrecht H., Jakeman J.D., Zaspel P. Cholesky-Based Experimental Design for Gaussian Process and Kernel-Based Emulation and Calibration. *Communications in Computational Physics*, 2021, vol. 29, no. 4, pp. 1152–1185.
73. Khalil H.K. *Nonlinear Systems*, 3rd edn. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002. – 750 p.
74. Kocijan J. *Modeling and Control of Dynamic Systems Using Gaussian Process Models*. *Advances in Industrial Control*, Springer, 2016. – 267 p.
75. Kurdila A., Lei Y. Adaptive Control via Embedding in Reproducing Kernel Hilbert Spaces. *2013 American on Control Conference (ACC)*, 2013, pp. 3384–3389.
76. Lázaro-Gredilla M., Van Vaerenbergh S., Santamaría I. A Bayesian approach to tracking with kernel recursive least-squares. *2011 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing*. 2011, pp. 1–6.
77. Lei D., Tang J., Li Z., Wu Y. Using Low-Rank Approximations to Speed Up Kernel Logistic Regression Algorithm. In *IEEE Access*, 2019, vol. 7, p. 84242–84252
78. Leith D.J., Leithead W.E. Survey of gain-scheduling analysis and design. *Int. J. Control*, 2000, vol. 73, pp. 1001–1025.
79. Li M., Bi W., Kwok J., Lu B. Large-scale Nyström kernel matrix approximation using randomized SVD. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2015, vol. 26, no. 1, pp. 152–164.
80. Liu W., Park I., Wang Y., and Príncipe J. C. Extended kernel recursive least squares algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, vol. 57(10), pp. 3801–3814.

81. Liu W., Pokharel, P.P., Príncipe J. C. The kernel least-mean-square algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, vol. 56, no. 2, 543–554.
82. Liu W., Príncipe J.C., Haykin, S. *Kernel Adaptive Filtering: A Comprehensive Introduction*. John Wiley & Sons, 2010. – 209 p.
83. Mukherjee S., Osuna E., Girosi, F. Nonlinear prediction of chaotic time series using a support vector machine. In J. Principe, L. Gile, N. Morgan, and E. Wilson, editors, *Neural Networks for Signal Processing VII. Proceedings of the 1997 IEEE Signal Processing Society Workshop*, New York. IEEE Press, 1997, pp. 511–520.
84. Murray-Smith R., Sbarbaro D., Rasmussen C.E., Girard A. Adaptive, cautious, predictive control with Gaussian process priors. In: *Proceedings of 13th IFAC Symposium on System Identification*. Rotterdam, 2003. pp 1195-1200.
85. Narendra K.S., Parthasarathy K. Identification and control of dynamical systems using neural networks. *IEEE Transactions of Neural Networks*, 1990, vol. 1, no. 1, pp. 4–27.
86. Nguyen-Tuong D., Peters J., Seeger M., Schölkopf B. Learning inverse dynamics: a comparison. In: *Proceedings of the European Symposium on Artificial Neural Networks (ESANN)*, 2008, pp. 13–18.
87. Niu W., Xia K., Zu B., Bai J. Efficient Multiple Kernel Learning Algorithms Using Low-Rank Representation. *Computational Intelligence and Neuroscience*, 2017, vol. 2017, 3678487.
88. Norgaard M., Ravn O., Poulsen N.K., Hansen L.K. *Neural Networks for Modelling and Control of Dynamic Systems: A Practitioner's Handbook*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer, 2000. – 246 p.
89. Parreira W.D., Bermudez J.-C.M., Richard C., Tournet J.-Y. Stochastic behavior analysis of the Gaussian kernel least-mean-square algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, vol. 60(5), pp. 2208–2222.
90. Pawlak M., Hasiewicz Z., Wachel P. On nonparametric identification of Wiener systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, vol. 55, no. 2. pp. 482–492.

91. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical recipes in C. Cambridge University Press, Second edition, 1992. – 994 p.
92. Qin S.J., Badgwell T.A. An overview of industrial model predictive control technology. Fifth International Conference on Chemical Process Control. AIChE Symposium Series, 1997, pp. 232–256.
93. Rasmussen C.E., Williams C.K.I. Gaussian Processes for Machine Learning. Cambridge, MA: MIT Press, 2006. – 248 p.
94. Rojo-Álvarez J.L., Martínez-Ramón M., Marí J.M., Camps-Valls G. Digital signal processing with kernel methods. Hoboken, NJ: Wiley, 2018. – 639 p.
95. Rugh W.J. Analytic framework for gain-scheduling. IEEE Control Syst. Mag. 1991, 11, pp. 79–84.
96. Rugh W.J., Shamma J.S. Research on gain scheduling. Automatica, 2000, vol. 36, pp. 1401–1425.
97. Rzepka D. Fixed-budget kernel least mean squares. Proceedings of 2012 IEEE 17th International Conference on Emerging Technologies & Factory Automation (ETFA 2012), 2012, pp. 1-4.
98. Saide C., Lengelle R., Honeine P., Richard C., Achkar R. Nonlinear adaptive filtering using kernel-based algorithms with dictionary adaptation. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2015, vol. 29, pp. 1391–1410.
99. Saunders C., Gammerman A., Vovk V. Ridge regression learning algorithm in dual variables. Proceedings of the 15th International Conference on Machine Learning (ICML), 1998, pp. 515–521.
100. Schmidt C.A., Biagiola S.I., Cousseau J.E., Figueroa J.L. Volterra-type models for nonlinear systems identification. Applied Mathematical Modelling, 2014, vol. 38(9-10), pp. 2414–2421.
101. Schölkopf B., Herbrich R., Smola A. J. A generalized representer theorem. In Computational learning theory, Springer, 2001, pp. 416–426.
102. Schölkopf B., Smola A. Learning with Kernels – Support Vector Machines, Regularization, Optimization and Beyond. MIT Press, Cambridge, MA, 2002. – 644 p.

103. Seth S., Príncipe J.C. On speeding up computation in information theoretic learning. 2009 International Joint Conference on Neural Networks, 2009, p. 2883–2887.
104. Shen G., Cao Y. A Gaussian process based model predictive controller for nonlinear systems with uncertain input-output delay. Appl. Mech. Mater, 2013, pp. 433–435.
105. Sipser M. Introduction to the Theory of Computation. Course Technology Inc, 2nd Edition, 2006. – 431 p.
106. Sjöberg J., Ljung L. Neural Networks in System Identification. IFAC Proceeding Volumes, 1994, vol. 27(8), pp. 359–382.
107. Slotine J.J.E., Li W. Applied Nonlinear Control. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991. – 476 p.
108. Stewart G.W. Matrix Algorithms: Volume 1: Basic Decompositions, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998. – 479 p.
109. Sugiyama M., Kawanabe M. Machine Learning in Non-Stationary Environments: Introduction to Covariate Shift Adaptation. MIT Press, Cambridge, MA, 2012. – 261 p.
110. Sundararajan S., Keerthi S.S. Predictive Approaches for Choosing Hyperparameters in Gaussian Processes. Neural Computation, 2001, vol.13, pp. 1103–1118.
111. Suykens J.A.K., Signoretto M., Argyriou A. Regularization, Optimization, Kernels, and Support Vector Machines. Chapman & Hall/CRC, London, 2014. – 525 p.
112. Vafamand N. Mehdi Aferi M., Khayatian A. Nonlinear system identification based on Takagi-Sugeno fuzzy modeling and unscented Kalman filter. ISA Transactions, 2018, vol. 74, pp. 134–143.
113. Van Vaerenbergh S., Lázaro-Gredilla M., Santamaría I. Kernel recursive least-squares tracker for time-varying regression. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2012, vol. 23, no. 8, pp. 1313–1326.

114. Van Vaerenbergh S., Santamaría I. A comparative study of kernel adaptive filtering algorithms, IEEE Digital Signal Processing and Signal Processing Education Meeting (DSP/SPE), 2013, pp. 181–186.
115. Van Vaerenbergh S., Santamaría I., Lázaro-Gredilla M. Estimation of the forgetting factor in kernel recursive least squares, IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing, Santander, 2012, pp. 1–6.
116. Van Vaerenbergh S., Santamaría I., Liu W., Príncipe J. C. Fixed-budget kernel recursive least-squares. In 2010 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Press, Piscataway, NJ, 2010, pp. 1882–1885.
117. Vapnik V., Cortes C. Support-Vector Networks. Machine Learning, 1995, vol. 20, pp. 273–297.
118. Wang W., Wang S., Qian G., Yang B. Kernel Least Mean Tracker. Proceedings of the 36th Chinese Control Conference, 2017, pp. 5100–5104.
119. Yang Z., Rong H., Zhao G., Yang J. Self-evolving kernel recursive least squares algorithm for control and prediction, 2017 Evolving and Adaptive Intelligent Systems (EAIS), 2017, pp. 1–8.
120. Wang R., Li Y. On the Numerical Rank of Radial Basis Function Kernels in High Dimensions. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2018, vol. 39, no. 4, pp. 1810-1835.
121. Wenzel T., Santin G., Haasdonk B. A novel class of stabilized greedy kernel approximation algorithms: Convergence, stability and uniform point distribution. Journal of Approximation Theory, 2021, vol. 262, 105508.4
122. Wiggins S. Introduction to Applied Dynamical Systems and Chaos. Springer, 2003. – 844 p.
123. Zhang H., Jiang H., Wang S. Kernel Least Mean Square Based on the Sparse Nyström Method. 2020 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS), 2020, pp. 1–5.