

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«Сибирский государственный университет науки и технологий
имени академика М.Ф. Решетнева»**

На правах рукописи

Карасева Татьяна Сергеевна

**ЭВОЛЮЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СИМВОЛЬНОЙ
РЕГРЕССИИ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

2.3.1 – Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук,
профессор Семенкин Е.С.

Красноярск – 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1 Основные особенности задачи идентификации динамических систем	12
1.1 Особенности моделей динамических систем.....	13
1.2 Подходы к решению задачи идентификации динамического объекта	15
1.3 Сведение задачи идентификации к задаче символьной регрессии. Алгоритмы генетического программирования и дифференциальной эволюции	19
Выводы к Главе 1	27
2 Структурно-параметрическая идентификация динамических систем эволюционными подходами на основе модифицированного алгоритма генетического программирования.....	29
2.1 Алгоритм генетического программирования для решения задачи идентификации	30
2.2 Гибридный эволюционный подход для решения задачи структурно-параметрической идентификации динамических систем в виде дифференциальных уравнений.....	35
2.3 Эволюционный подход к структурно-параметрической идентификации динамических объектов в виде системы дифференциальных уравнений	39
2.4 Самонастраивающийся алгоритм генетического программирования для символьного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.....	42
Результаты Главы 2.....	45
3 Практическая реализация и тестирование эволюционных подходов к решению задач структурно-параметрической идентификации динамических систем.....	47

3.1 Исследование эффективности эволюционных подходов к идентификации динамических систем на задачах, представленных дифференциальными уравнениями и их системами	48
3.2 Исследование эффективности эволюционных подходов к идентификации динамических систем при различных входных воздействиях	64
3.3 Тестирование эволюционных подходов к идентификации динамических систем на задачах, описывающие практические примеры из различных областей	84
3.4 Исследование эволюционных подходов к идентификации динамических систем на практических задачах.....	103
Результаты Главы 3.....	109
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	110
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	111
Приложение А	125
Приложение Б	126
Приложение В.....	127
Приложение Г	128

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность. Динамическими являются системы (объекты) из различных областей науки и техники. Их исследование обычно предполагает построение модели по экспериментальным данным, описывающим поведение системы, то есть идентификацию динамической системы [1]. Задача идентификации является актуальной, так как без адекватной математической модели невозможно исследовать свойства реального объекта, осуществлять прогнозы и подбирать корректное управление. На сегодняшний день разработано большое число методов, однако в связи с усложнением исследуемых процессов разработка новых подходов остается актуальной задачей.

Большинство методов численной идентификации решают задачи с помощью построения модели, которая, по сути, является черным ящиком. Однако наиболее распространенным и удобным для дальнейшего применения является представление объекта в символьном виде в виде дифференциальных уравнений или их систем. Но для построения таких моделей методам зачастую требуются априорные знания, например, о структуре дифференциальных уравнений, которых на практике может и не быть.

Преодолеть недостаток этих методов позволяет сведение задачи к задаче символьной регрессии [2]. Задача символьной регрессии представляет собой нахождение математического выражения в символьной форме, наилучшим образом аппроксимирующего взаимосвязь между конечными наборами независимых и зависимых переменных. Одним из методов решения задачи символьной регрессии является метод из класса эволюционных – алгоритм генетического программирования, применение которого позволяет описать поиск решения задачи символьной регрессии как построение регрессионной модели путем перебора различных суперпозиций функций из некоторого заданного набора (функционального множества) [3]. Переменные и константы составляют терминальное множество. Но математическое выражение в символьной форме состоит как из функций, так и из переменных и числовых констант, для поиска

которых предполагается применение алгоритма параметрической оптимизации. Таким образом, в данной диссертационной работе рассматривается метод структурно-параметрической идентификации динамической системы, объединивший алгоритм генетического программирования для поиска структуры дифференциальных уравнений и метод дифференциальной эволюции для оптимизации числовых параметров. Применение эволюционных алгоритмов символьной регрессии при идентификации динамических систем, с одной стороны, обеспечит удобное для дальнейших исследований представление, а с другой, позволит сократить число априорных требований и ограничений на модель. Известно, что методы из класса эволюционных и ранее применялись для поиска моделей динамических систем [4]. Однако обычно в таких работах эволюционные алгоритмы применяются для поиска параметров моделей при известной заранее линейной структуре.

Очевидно, что невозможно создать универсальный подход для решения задачи идентификации динамических систем. Но существует потребность в разработке подходов, позволяющих получить модель в символьной форме с минимальным количеством априорных ограничений на структуру.

Учитывая актуальность задачи идентификации, важность повышения эффективности алгоритмов для их решения, можно заключить, что работа, по разработке новых подходов к структурно-параметрической идентификации динамических систем, **является актуальной.**

Степень разработанности темы. Задача восстановления функций по наблюдениям переменных решается в течение более чем двух веков, но возникают новые постановки задачи идентификации, увеличивается разнообразие особенностей исходных данных, аппроксимируемых функций. Известно, что методы из класса эволюционных и ранее применялись для поиска моделей динамических систем. Применение эволюционных алгоритмов для решения задачи идентификации используется как в параметрических, так и непараметрических подходах. Так в работе авторов А. Manocha, А. Sharma описывается применение генетического алгоритма для оптимизации

коэффициентов ПИД-регулятора для последующего формирования набора нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих поведение самолета [5]. Применение эволюционных алгоритмов оптимизации для подбора коэффициентов дифференциальных уравнений представлены в работах G. Parmar, R. Prasad, S. Mukherjee, В.А. Охорзина и И.С. Рыжикова [6-7]. Применение различных видов алгоритма генетического программирования для решения задачи идентификации рассматривается в работах А.И. Дивеева [8-9].

Очевидно, что невозможно создать универсальный подход для решения задачи идентификации динамических систем. Но существует потребность в разработке подходов, позволяющих получить модель в символьной форме при минимальном количестве априорных ограничений на ее структуру.

Целью диссертационного исследования является повышение эффективности применения методов решения задач символьной регрессии при структурно-параметрической идентификации динамических систем за счет применения самонастраивающихся эволюционных алгоритмов моделирования и оптимизации.

Для достижения поставленной цели были определены следующие **задачи**:

1. Выполнить аналитический обзор существующих методов решения задачи идентификации динамических систем.
2. Привести задачу структурно-параметрической идентификации динамических систем к задаче символьной регрессии.
3. Предложить модификации алгоритма генетического программирования, повышающие его эффективность при разработке подходов к идентификации динамических систем в виде дифференциальных уравнений как линейного, так и нелинейного вида и их систем.
4. На основе модифицированного алгоритма генетического программирования и алгоритма дифференциальной эволюции разработать подходы к структурно-параметрической идентификации динамических объектов в виде дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

5. Разработать модификации алгоритма генетического программирования, повышающие его эффективность при решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений как альтернативной модели динамической системы.

6. Исследовать эффективность нахождения решения задачи идентификации динамических систем предложенными подходами на тестовых и практических задачах.

Методы исследования. При выполнении диссертационной работы использовались методы математического анализа, теории автоматического управления, теории оптимизации, теории вероятностей и математической статистики, вычислительной математики, обработки и анализа данных.

Научная новизна результатов диссертационной работы заключается в следующем:

1. Разработан модифицированный алгоритм генетического программирования, отличающийся терминальным множеством и модифицированными эволюционными этапами, и позволяющий получать решение задачи структурно-параметрической идентификации динамических систем в виде дифференциального уравнения по экспериментальным данным.

2. Разработан новый подход на основе модифицированного алгоритма генетического программирования и дифференциальной эволюции к решению задачи структурно-параметрической идентификации динамических объектов в виде дифференциального уравнения, позволяющий автоматизировано определять его порядок, структуру и коэффициенты.

3. Разработан новый подход на основе модифицированного алгоритма генетического программирования и дифференциальной эволюции к решению задачи структурно-параметрической идентификации динамических объектов в виде системы дифференциальных уравнений, позволяющий автоматизировано определять количество дифференциальных уравнений в системе, их порядок, структуру и коэффициенты.

4. Разработан алгоритм генетического программирования для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, отличающийся от известного применением процедуры самонастройки и позволяющий получать решение в символьном виде.

Теоретическая значимость результатов диссертационной работы состоит в том, что предложены, реализованы и исследованы новые эволюционные подходы к решению задачи структурно-параметрической идентификации динамических систем. В работе учитываются особенности сведения задачи идентификации к задаче символьной регрессии, разработана модификация алгоритма генетического программирования для кодирования дифференциальных уравнений в виде дерева. Предложена процедура оптимизации неизвестных заранее начальных условий динамической системы. Предложены модификации подходов к идентификации динамических систем, повышающие эффективность этих подходов за счет применения метода дифференциальной эволюции.

Разработка алгоритмов поиска модели динамической системы является существенным вкладом в развитие методов идентификации динамических систем и эволюционных подходов.

Практическая ценность. В ходе проведения исследований были разработаны четыре программные системы для решения задач структурно-параметрической идентификации динамических систем. Первая программная система позволяет идентифицировать динамический объект в виде дифференциального уравнения как линейного, так и нелинейного вида, произвольного порядка, не выше заданного пользователем, по экспериментальным данным. Программная система апробировалась при решении практических задач химической кинетики и мониторинга состояния гидравлических систем. Вторая программная система предназначена для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений самонастраиваемым алгоритмом генетического программирования. Третья и четвертая программные системы позволяют идентифицировать динамические объекты в виде системы дифференциальных уравнений. В программных системах

отсутствуют ограничения на количество входных и выходных характеристик, структуру правых частей дифференциальных уравнений, а их порядок пользователем только ограничивается, но не фиксируется. Особенности программных систем является автоматизация работы алгоритма генетического программирования за счет самонастройки и гибридизация с методом дифференциальной эволюции. Программные системы апробировались при решении практических задач мониторинга состояний гидравлической системы и анализа состава воздуха в сильнозагрязненной местности. Практическая ценность всех разработанных программных систем заключается в том, что они могут быть использованы конечными специалистами не являющимися экспертами в области эволюционных алгоритмов.

Программные системы зарегистрированы в Роспатенте.

Реализация результатов работы.

Диссертационная работа выполнена в рамках проектов:

1. Мегагрант «Гибридные методы моделирования и оптимизации в сложных системах», № 075-15-2022-1121 2022-н.в.
2. Проект «Методы машинного обучения для идентификации свойств задач глобальной оптимизации в нестационарной среде и автоматической адаптации эволюционных и бионических алгоритмов» в рамках гранта Российского фонда фундаментальных исследований, проводимый совместно РФФИ и Австрийским научным фондом. Договор № 21-51-14003/21, 2021-2023 гг.
3. Проекты «Развитие теории самоконфигурирующихся алгоритмов машинного обучения для моделирования и прогнозирования характеристик компонентов сложных систем», № FEFE-2020-0013 и № FEFE-2023-0004, по государственному заказу Минобрнауки РФ, 2020-2023 гг.
4. Проект «Разработка программного комплекса эволюционной автоматической идентификации динамических систем на предприятиях химической и металлургической промышленности», Фонд содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере, программа «УМНИК». Договор № 14243ГУ/2019, 2019-2021 гг.

5. Проект «Разработка теоретических основ автоматизации комплексного моделирования сложных систем методами вычислительного интеллекта» № 2.1680.2017/ПЧ по заказу Минобрнауки РФ, 2018-2019 гг.

6. Российско-германский проект «Detection of anomalies in 3D grey scale images of fibre materials» в рамках программы стратегического партнерства с Ульмским университетом (Германия) при поддержке немецкой службы академических обменов (DAAD), 2017-2018 гг.

Основные защищаемые положения:

1. Предложенные подходы к структурно-параметрической идентификации динамических систем позволяют получать модели в символьном виде, а именно, в виде дифференциальных уравнений и их систем, что делает модель пригодной для дальнейших исследований и интерпретации.

2. Разработанные подходы к идентификации динамических систем позволяют автоматизировано определять порядок, структуру правых частей, коэффициенты и начальные условия дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы.

3. Разработанные подходы к структурно-параметрической идентификации динамических систем позволяют осуществлять построение моделей при произвольном количестве входных и выходных переменных, то есть символьные модели в виде дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

4. Предложенные подходы обладают свойством устойчивости к наличию шума и малому объему экспериментальных данных.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликованы 27 работ, из которых – 3 в изданиях, входящих в Перечень ВАК, 9 – в изданиях, индексируемых в международных базах Scopus и Web of Science. 4 программные системы зарегистрированы в Роспатенте.

Апробация работы. Основные положения и результаты работы обсуждались на Всероссийских и Международных конференциях: 35th International Conference on Information Technologies «InfoTech-2021» (2021 г.,

Варна, Болгария), The International Workshop on Mathematical Models and their Applications «IWММА» (2019-2022, Красноярск), The International Workshop «Hybrid methods of modeling and optimization in complex systems» – HMMOCS (2022 г., Красноярск), II International conference «Modernization, innovations, progress: advanced technologies in material science, mechanical and automation engineering» – MIP: Engineering-2020 (2020, Красноярск), International conference «Advanced technologies in aerospace, mechanical and automation engineering» – MIST: Aerospace-III 2020 (2019, 2020, Красноярск), Международная научно-практическая конференция «Решетневские чтения» (2017-2021, г. Красноярск), Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы авиации и космонавтики» (2017-2021 гг., Красноярск), Международная научно-практическая конференция «Молодежь. Общество. Современная наука, техника и инновации» (2017-2021 гг., Красноярск), Всероссийская научная конференция молодых ученых с международным участием «Информатика, управление и системный анализ» (2018 г., Ростов-на-Дону).

Структура работы. Диссертационная работа изложена на 128 страницах и состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы на 119 источников и 4 приложений.

1 Основные особенности задачи идентификации динамических систем

Современную науку невозможно представить без широкого применения математических моделей. В данной главе рассматриваются основные принципы такого раздела математического моделирования, как идентификация динамических систем. Под идентификацией подразумевается поиск модели динамической системы по данным наблюдений, описывающих поведение системы [9-10]. Динамической системой принято называть объект или процесс, который определяется своим состоянием как совокупностью характеристик в некоторые моменты времени, и для которого определен закон эволюции состояния во времени [11]. Математическая модель в данном смысле означает математическое описание именно поведения изучаемой системы или процесса.

Моделирование динамических систем является междисциплинарным инструментом исследования разнообразных процессов [12-13]. Если первоначально основные математические модели динамических систем были разработаны для технических и естественнонаучных приложений, то затем они получили широкое применение и в социально-экономических сферах.

Понятие динамической системы является математической абстракцией, а представляются такие системы зачастую разностными или дифференциальными уравнениями [14].

В данной работе рассматривается структурно-параметрическая идентификация динамических систем дифференциальными уравнениями или их системами без предъявления требований к линейности правой части дифференциальных уравнений. При этом требуется построить модель именно в символьной форме, описывающей взаимосвязь между входными и выходными переменными. Представление в виде дифференциальных уравнений обладает большим числом преимуществ, среди которых удобная интерпретация аналитической формы, широкая применимость модели для изучения свойств системы и их прогнозирования, возможность подбора корректного управления [15]. Альтернативной формой модели динамических процессов является решение

задачи Коши для дифференциальных уравнений. Такой подход применяется, например, в том случае, когда модель в виде дифференциального уравнения имеет слишком сложную для анализа структуру. Для решения задачи Коши разработано большое число численных методов, а в данной работе представлен подход к отысканию решения задачи Коши в символьной форме.

1.1 Особенности моделей динамических систем

Первые результаты исследований динамических систем были получены в естественно-научных дисциплинах, так как множество реальных процессов из области механики, метеорологии, физики являются динамическими [16]. Так, динамическими процессами являются кинетика химических реакций, изменение биологических популяций, движение космических объектов, процессы экономического развития и спада [17-19]. Сегодня с развитием робототехники построение моделей динамических систем актуально, например, для создания технологий по навигации роботов [20-21].

Развитие методов моделирования динамических объектов уже давно является важным направлением, так как без адекватной математической модели невозможно проводить исследования, изучать свойства систем, делать прогнозы, подбирать корректное управление [22]. Процесс построения математической модели динамической системы по измерениям входных и выходных переменных, характеризующих поведение исследуемой системы, называется идентификацией [23].

Каждая динамическая система обладает уникальным набором свойств, поэтому построение адекватной модели требует привлечение специалистов из той области, в которой система функционирует. Но с усложнением производственно-технологических процессов, развитием науки и техники существует потребность в исследовании ранее не изученных систем, модель которых вывести аналитически может быть затруднительно даже для отраслевых экспертов в сотрудничестве с математиками. Аналитически выведенные модели могут оказаться

неинформативными из-за вводимых упрощений и идеализаций, из-за исследования системы лишь в некотором конкретном режиме, а как следствие, из-за противоречия выхода модели измерениям выходных характеристик системы.

Таким образом, данные факторы доказывают необходимость в развитии автоматизированных методов моделирования динамических систем, основанных на данных наблюдений за ними.

Постановки задачи идентификации динамической системы могут быть различны в зависимости от целей моделирования, которые влияют и на конечный вид модели [24]. Одним из наиболее распространенных способов представления моделей динамических систем является описание с помощью дифференциальных уравнений [25]. В данной диссертационной работе рассматривается структурно-параметрическая идентификация динамических процессов в виде дифференциальных уравнений и их систем.

Изначально возникновение дифференциальных уравнений (XVII век) связывают с необходимостью решения задач из области механики, которые заключались в определении координат тел, их скорости и ускорения. Таким образом, данные характеристики рассматривались как функции времени, что позволяет говорить о том, что в данном случае решались задачи математического моделирования, в которых конечные модели были представлены дифференциальными уравнениями. Следовательно, еще на начальном этапе развития теории дифференциальных уравнений они позиционировались как инструментарий для описания динамических систем.

Ключевым преимуществом представления моделей в виде дифференциальных уравнений и их систем является возможность получить описание объекта в символьной форме, поддающейся интерпретации человеком.

Аналитическое представление динамического объекта в виде дифференциального уравнения позволяет применять такие модели для последующего исследования изучаемого процесса, анализа свойств и выбора корректного управления.

Аппарат дифференциальных уравнений нашел широкое применение в математическом моделировании. С их помощью возможно построить модель, в которой заложены известные законы науки и техники. Но здесь стоит учесть, что, с одной стороны, дифференциальные уравнения позволяют претендовать на получение описания истинной природы процессов, но с другой стороны, на сегодняшний день по причине сложности исследуемых процессов сделать это исключительно аналитически с помощью известных законов затруднительно. Поэтому необходимо разрабатывать процедуры, позволяющие автоматизировано идентифицировать динамические системы в виде дифференциальных уравнений.

Стоит отметить, что в большом числе работ, связанных с идентификацией динамических систем в виде дифференциальных уравнений, либо рассматриваются изначально линейные системы, либо предлагаются процедуры линеаризации, которые позволяют заменить исходную нелинейную систему на эквивалентную ей линейную [26-27]. В данной диссертационной работе предлагается подход, позволяющий идентифицировать как линейные, так и нелинейные динамические системы.

1.2 Подходы к решению задачи идентификации динамического объекта

Началом развития методов идентификации принято считать работу «Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium» Карла Фридриха Гаусса, опубликованную в 1809 году, а ранние работы по идентификации образовали область под названием статистическое оценивание [28-29]. Следующий этап развития методов идентификации связан с идеей построения моделей по данным, которые были получены при подаче управляющих воздействий на исследуемую систему. Стоит отметить, что на этом принципе основывается большинство методов, разработанных до середины XX века, а их ключевые особенности заложены в подходах, которые применяются и сегодня.

Основоположником теории идентификации динамических систем в России считается Н.С. Райбман [30-31]. К той же школе принадлежат и работы Я.З. Цыпкина, который отмечал, что задача идентификации систем (определение структуры и параметров систем по наблюдениям) является одной из основных задач теории и техники автоматического управления [32]. В работе П. Эйкхоффа дано следующее определение: «Задача идентификации формулируется следующим образом: по результатам наблюдений над входными и выходными переменными системы должна быть построена оптимальная в некотором смысле модель, то есть формализованное представление этой системы» [23].

Для решения задачи построения модели динамического объекта разработано большое количество методов, основанных на различных подходах [33]. Методы решения задачи идентификации представлены в работах [34-35].

Существуют разные способы классификации методов идентификации. Рассмотрим некоторые из них.

Сначала определим основные особенности методов, построенных при искусственном воздействии на систему. При искусственных воздействиях возможно определить динамические свойства исследуемого объекта. Воздействия могут быть скачкообразными (одним из наиболее распространенных примеров является функция Хевисайда), периодическими разной частоты, синусоидальными [36]. При скачкообразных изменениях входного воздействия определяются временные характеристики, а при периодических и синусоидальных – частотные [37].

Множество методов для решения задачи идентификации линейного динамического объекта основано на такой временной характеристике как оценка переходной функции. Переходная функция $h(t)$ – это реакция динамической системы на входное воздействие в виде функции Хевисайда, при заданных начальных условиях [38].

Зная переходную функцию, можно определить реакцию $y(t)$ линейной (или линеаризованной) системы на произвольное входное воздействие $x(t)$ с помощью интеграла Дюамеля [39]:

$$y(t) = x_0 \cdot h(t) + \int_0^t \dot{x}(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau, \quad (1.1)$$

где $\dot{x}(\tau)$ – производная воздействия по времени.

Методы моделирования, базирующиеся на переходной функции по выборочным данным, зачастую сводятся к задаче минимизации:

$$\sum_{i=1}^n (h_i - \hat{h}(\alpha, t_i))^2 \rightarrow \min_{\hat{h}, \alpha}, \quad (1.2)$$

где \hat{h} – оценка переходной функции, α – параметры и коэффициенты оценки переходной функции, n – объем выборки, $\hat{h}(t_i)$, $i=1, 2, \dots, n$ – измерения переходной функции.

Стоит отметить, что если система не может быть линеаризована без потери её практически важных свойств, то её отклик не может быть рассчитан с помощью интеграла Дюамеля.

Очевидно, что остальные методы можно отнести к группе методов, не требующих искусственных воздействий и использующих данные, полученные в процессе нормального функционирования системы.

Одним из способов описания динамических систем является передаточная функция. Она представлена в виде дифференциального оператора, который выражает связь между входом и выходом линейной стационарной системы. Таким образом, зная входной сигнал системы и передаточную функцию, можно восстановить выходной сигнал [40].

Следующие группы методов, наиболее часто фигурирующие в теории моделирования и идентификации, носят название параметрических и непараметрических [41].

Разработка параметрических методов остается важным направлением в теории идентификации [42]. Но применение таких методов требует значительного объема априорных сведений об исследуемой системе, ключевым требованием является наличие знаний о структуре объекта.

Особенностью непараметрических методов является, в отличие от общепринятых параметрических, отсутствие необходимости в знаниях о структуре модели [43]. То есть требования к априорной информации ослабевают. Непараметрические методы в значительной степени базируются на непараметрической оценке функции регрессии по наблюдениям [44].

Решение задачи (1.2) осуществляется с помощью непараметрических методов [6]. Однако качество непараметрических методов существенно зависит от свойств выборки, среди которых можно отметить ее репрезентативность, объем и наличие шума [10].

Для построения функции, описывающей реакцию системы на известное управляющее воздействие, могут применяться методы интеллектуального анализа данных: рекуррентные нейронные сети, системы на нечеткой логике [45-46]. Применение нейронных сетей в области исследования динамических систем отражено и в ранних работах, и в более поздних работах [47-48]. Но данные методы зачастую возможно использовать только для прогнозирования, так как они не позволяют получить модель, в понятной конечному пользователю форме. Более того, они требуют наличия сложных оптимизационных процедур, а также дополнительных алгоритмов для приведения результата к модели в виде некоторой формулы.

Для решения задачи идентификации применяются и эволюционные алгоритмы. Так, в работе [5] описывается применение генетического алгоритма для оптимизации коэффициентов ПИД-регулятора для последующего формирования набора нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих поведение самолета. То есть генетический алгоритм применяется как непосредственно оптимизационная процедура, а не самостоятельный метод идентификации. Для решения задачи идентификации параметров динамической модели с известной структурой генетический алгоритм был впервые применен в работе [49]. Применение эволюционных алгоритмов оптимизации для подбора коэффициентов дифференциальных уравнений представлены в работах [6-7]. В данных работах идет речь о параметрической идентификации, требующей

априорной информации о структуре дифференциальных уравнений. Эволюционные алгоритмы применяются для решения дифференциальных уравнений [50-51]. А работах А.И. Дивеева рассматривается применение различных видов алгоритма генетического программирования для решения задачи идентификации как задачи символьной регрессии [52-53]. Представленные методы позволяют осуществлять поиск правой части дифференциального уравнения зачастую первого порядка.

Стоит иметь в виду, что ни один из существующих методов идентификации не подходит для моделирования всех видов динамических систем. Очевидно, что выбор подхода осуществляется в соответствии с конечной целью моделирования, наличием априорной информации, требованиями к интерпретации результатов. Но существует потребность к разработке подходов, в которых расширяются границы применимости конкретного метода. В данной диссертационной работе предложен подход к построению модели динамического объекта в форме дифференциального уравнения в символьном виде, позволяющий получать решение при априори неизвестной структуре уравнения.

1.3 Сведение задачи идентификации к задаче символьной регрессии.

Алгоритмы генетического программирования и дифференциальной эволюции

Как было отмечено выше, представление модели динамической системы в виде дифференциальных уравнений или их систем в символьном виде удобно для дальнейших исследований и интерпретации, информативно для специалистов тех предметных областей, в рамках которых решается задача поиска модели.

Поэтому осуществим постановку задачи идентификации, учитывая, что конечная модель будет представлена в виде дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим исходную задачу идентификации непрерывной динамической системы. Управляющее воздействие, которое подается на систему, и ее состояние будем называть, соответственно, входами и выходами динамической системы.

Исходная задача идентификации представляет собой обратную задачу математического моделирования, то есть по экспериментальным измерениям входных (x_1, \dots, x_m) переменных и выходной характеристики y необходимо построить модель исследуемого объекта (Рисунок 1.1). В общем случае, в каналах измерения действует стохастическая помеха.

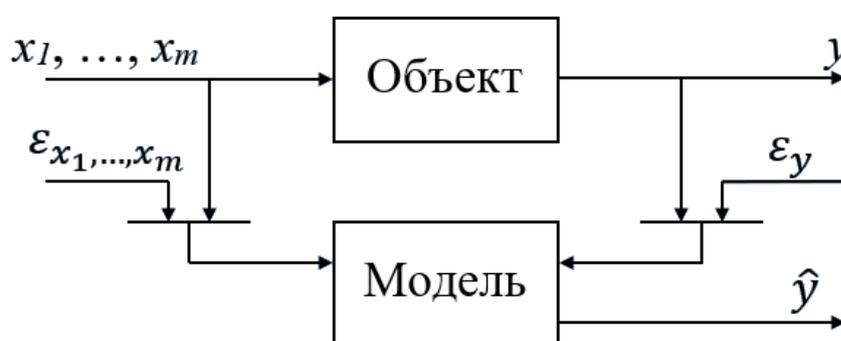


Рисунок 1.1 – Задача идентификации динамического объекта

Необходимо построить символьную модель в форме дифференциального уравнения, описывающую взаимосвязь между входами и выходами системы, а начальные условия считаем известными.

В такой постановке задача идентификации сведена к задаче символьной регрессии. Задача символьной регрессии представляет собой нахождение математического выражения в символьной форме, аппроксимирующего зависимость между начальным и конечным наборами переменных. Формализовать задачу символьной регрессии можно следующим образом: пусть имеется выборка $(\bar{x}_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$, где n – объем выборки, а вектор $\bar{x}_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,m})^T$ содержит набор значений m независимых переменных. $y_i = f(\bar{x}_i)$ – соответствующая \bar{x}_i зависимая переменная. Необходимо найти выражение $\hat{f}(\bar{x})$ в символьном виде, аппроксимирующее зависимость между \bar{x}_i и y_i [54-55].

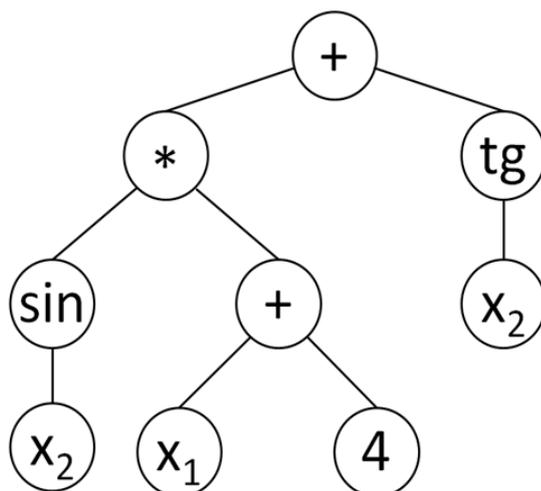
Данная задача успешно решается алгоритмом генетического программирования [56].

Генетическое программирование – алгоритм из класса эволюционных, имитирующий процессы естественной эволюции [55]. Рассмотрим ключевые особенности стандартного алгоритма генетического программирования для решения задачи символьной регрессии [57].

В соответствии с терминологией из области эволюционных алгоритмов потенциальную модель будем называть индивидом, совокупность индивидов образует популяцию. Основной отличительной особенностью алгоритма ГП является представление индивида в виде дерева [3]. Под деревом понимается направленный граф, в котором каждая последующая вершина связана с одной и только одной предыдущей. Вершины дерева – это элемент либо функционального, либо терминального множества [57].

Функциональное множество составляют функции, которые используются для формирования решения, а в терминальное множество входит набор констант и всех переменных [58].

Рассмотрим пример дерева на Рисунке 1.2.



$$F(x_1, x_2) = \sin(x_2) * (x_1 + 4) + \text{tg}(x_2)$$

Рисунок 1.2 – Пример решения в виде дерева

Схема последовательности этапов алгоритма генетического программирования представлена на Рисунке 1.3.

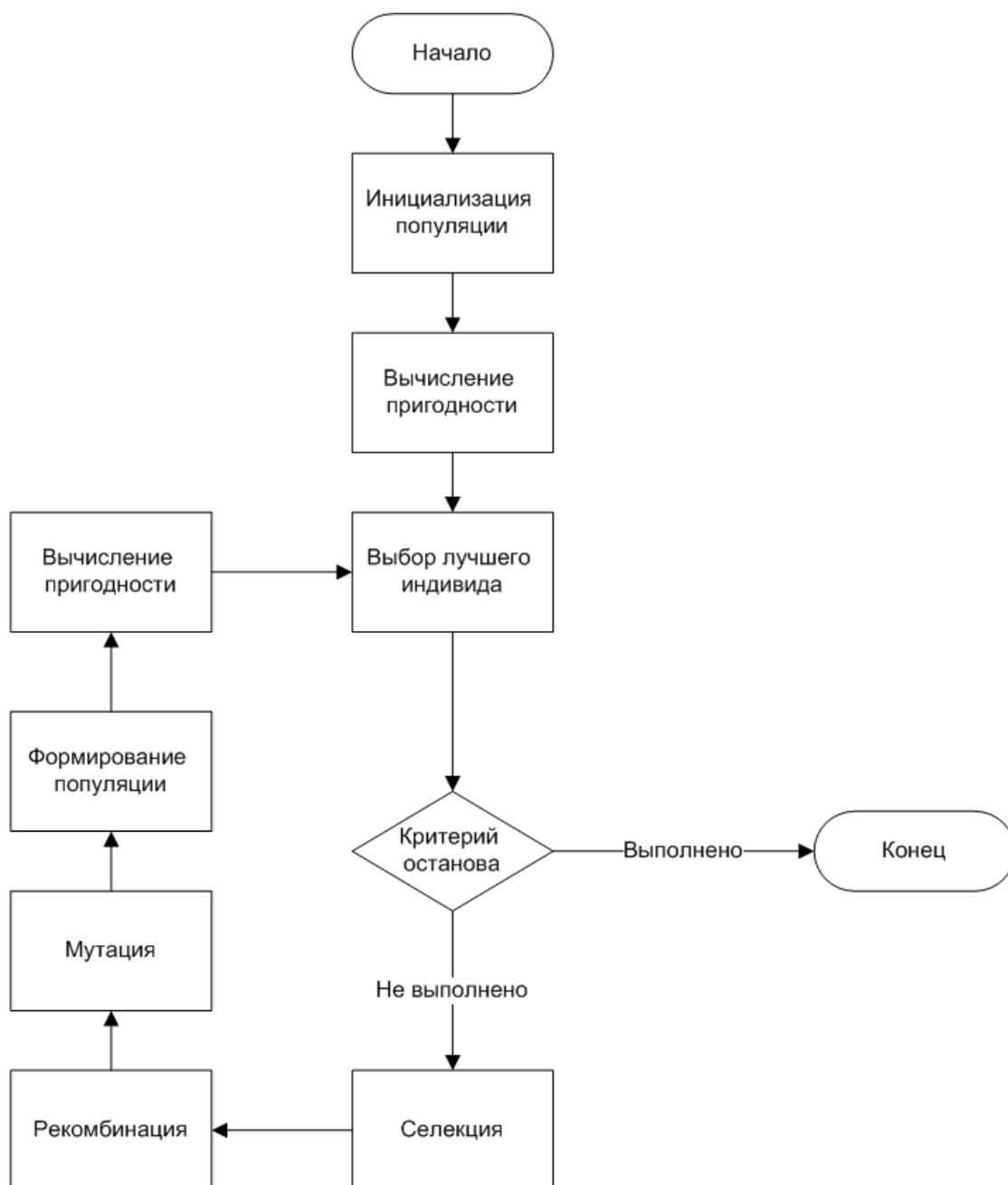


Рисунок 1.3 – Этапы алгоритма генетического программирования

Инициализация

На первом этапе происходит инициализация популяции, в ходе которой случайным образом создается стартовая популяция из заданного числа индивидов. Для инициализации был использован метод выращивания, при котором

происходит заполнение дерева ограниченной глубины, случайным образом выбираются элементы терминального или функционального множества [59].

Вычисление пригодности

Для решения задач символьной регрессии при помощи алгоритма генетического программирования предлагается следующая функция пригодности (1.3-1.4):

$$fitness = \frac{1}{1 + error}, \quad (1.3)$$

$$error = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{(y_i - y_i^*)}}{\max(y^*) - \min(y^*)}. \quad (1.4)$$

где n – объем выборки, y_i – значение функции-дерева в i -ой точке, y_i^* – значение целевой функции, соответственно [60].

Этапы выбора лучшего индивида, проверки критерия останова и селекции аналогичны одноименным операторам генетического алгоритма.

Выбор лучшего индивида

Лучшим индивидом будем считать дерево с наибольшей пригодностью.

Проверка критерия останова

В качестве критерия останова могут быть выбраны:

- достижение заданной точности;
- истечение заданного времени работы;
- завершение заданного числа итераций;
- отсутствие изменения пригодности лучшего решения и т. д.

Селекция

Для выбора родительских пар используется оператор селекции, которая бывает трех видов: турнирная, ранговая и пропорциональная селекция.

Турнирная селекция

При выполнении турнирной селекции организуется турнир из некоторого числа индивидов (индивиды в турнир выбираются случайным образом), победитель (индивид с самым большим значением функции пригодности)

которого и становится родителем. Если же несколько индивидов имеют одинаковую максимальную пригодность, то родитель из них выбирается случайным образом [59].

Ранговая селекция

При выполнении ранговой селекции производится сортировка индивидов по значению пригодности (от индивида с минимальной пригодностью до индивида с максимальным значением функции пригодности). Затем упорядоченным индивидам присваиваются ранги от 1 до h , где h – число индивидов в популяции. Если пригодности одинаковы, то ранги вычисляются как среднее значение рангов индивидов с одинаковыми пригодностями. Учитывая ранги индивидов, производим отбор родителей по схеме пропорциональной селекции.

Пропорциональная селекция

В пропорциональной селекции вероятность того, что данный индивид станет родителем, пропорциональна его пригодности [59].

Вероятность отбора p_i зависит от пригодности следующим образом (5):

$$p_i = \frac{fitness_i}{\sum_{i=1}^h fitness_i}, \quad (1.5)$$

где $fitness_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, h$, h – число индивидов в популяции.

Скрещивание

При выполнении рекомбинации происходит скрещивание родительских индивидов, в результате которого формируются потомки. В алгоритме генетического программирования существуют два основных типа скрещивания: стандартное и одноточечное.

При работе стандартного скрещивания выбирается пара деревьев-родителей. У каждого из деревьев выбирается точка скрещивания. Затем происходит обмен поддеревьями.

При одноточечной рекомбинации выбирается пара родителей, у которых выбирается общая точка скрещивания.

Наиболее эффективным оператором рекомбинации является оператор равномерного скрещивания [61]. Равномерное скрещивание не является классическим оператором для алгоритма ГП, однако его применение позволяет значительно увеличить разнообразие структур деревьев [62], что повышает эффективность поиска оптимального решения.

Мутация

Для алгоритма ГП одноточечная *мутация* заключается в изменении узла дерева на другой элемент того же типа. Причем данный элемент выбирается случайным образом.

Формирование популяции

Из потомков, полученных в результате работы рассмотренных операторов, формируется новая популяция.

Алгоритм генетического программирования для решения задач символьной регрессии применяется при решении практических задач поиска заданного вида движений, оценки достоверности документов, идентификации границ на изображениях [63-65] и др. В данной диссертационной работе разработаны модификации алгоритма генетического программирования символьной регрессии для решения задачи структурно-параметрической идентификации динамических систем.

Но при решении задачи символьной регрессии необходимо проводить оптимизацию числовых констант, входящих в формулу, полученную алгоритмом генетического программирования.

Сегодня все большую популярность для оптимизации функций вещественных переменных набирает алгоритм дифференциальной эволюции [66].

Популяцией в алгоритме дифференциальной эволюции считается множество векторов из \mathbb{R}^n , в котором каждая переменная этого пространства соответствует своему признаку. Параметрами алгоритма являются размер популяции N , сила мутации $F \in [0; 2]$ и вероятность скрещивания P [67].

На этапе инициализации формируется популяция из N случайных векторов. На каждой следующей итерации алгоритм генерирует новое поколение векторов,

комбинируя векторы предыдущего поколения по схеме, представленной на Рисунке 1.4.

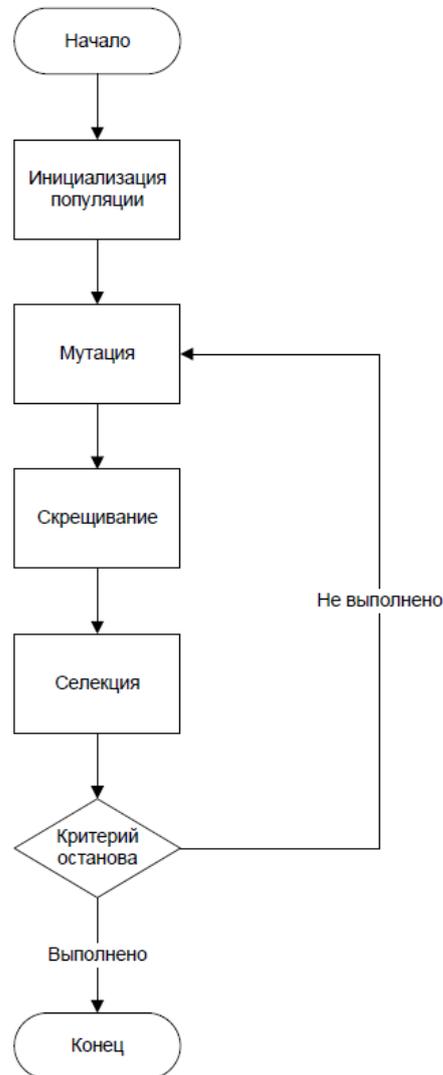


Рисунок 1.4 – Этапы алгоритма дифференциальной эволюции

Мутация

На этапе мутации из популяции случайным образом выбираются не равные x_1 индивиды v_1, v_2, v_3 . На основе данных векторов генерируется так называемый мутантный вектор [68]:

$$v = v_1 + F(v_2 - v_3). \quad (1.6)$$

Существуют и другие способы задания мутантного вектора:

$$\text{Rand2: } v = v_1 + F(v_2 - v_3) + F(v_4 - v_5) \quad (1.7)$$

$$\text{Best1: } v = v_{best} + F(v_1 - v_2) \quad (1.8)$$

$$\text{Best2: } v = v_{best} + F(v_1 - v_2) + F(v_3 - v_4) \quad (1.9)$$

$$\text{Current to rand: } v = v_{curr} + F(v_{curr} - v_1) + F(v_2 - v_3) \quad (1.10)$$

$$\text{Current to Best: } v = v_{curr} + F(v_{curr} - v_{best}) + F(v_1 - v_2) \quad (1.11)$$

где v_{curr} – текущий индивид, v_{best} – лучший индивид в текущей популяции.

Скращивание

Над мутантным вектором выполняется операция «скращивания», в ходе которой каждая координата с вероятностью p замещается соответствующей координатой вектора x_1 . Получившийся вектор называется пробным.

Селекция

Если пробный вектор оказывается лучше исходного x_1 , то в новом поколении он занимает его место.

Если не выполнен критерий останова, то начинается новая итерация.

Стоит отметить, что для решения задач оптимизации функций дискретных переменных достаточно переопределить только стадию мутации. Остальные шаги алгоритма остаются без изменений. Одним из способов увеличения эффективности алгоритма является создание несколько независимых популяций. Для каждой такой популяции формируется свой начальный набор случайных векторов. В таком случае появляется возможность использовать алгоритмы для решения задач глобальной оптимизации.

Выводы к Главе 1

В данной главе были отмечены ключевые особенности идентификации, как задачи поиска модели, описывающей взаимосвязь между входными и выходными характеристиками динамической системы. Динамическими являются процессы из множества областей, а следовательно, решение задачи идентификации требуется при решении задач различной природы. На данный момент разработаны и

продолжают разрабатываться большое число методов идентификации, что доказывает актуальность данного направления. Были рассмотрены основные группы методов идентификации, установлено, что они могут различаться в зависимости от управляющего воздействия, наличия априорных сведений о структуре модели. Отмечено, что важна устойчивость методов к наличию шума в данных и к малому объему выборки. Конечная форма модели также отличается в зависимости от целей моделирования. В данной главе описаны преимущества представления в виде дифференциальных уравнений и их систем в символьной форме. Использование аппарата дифференциальных уравнений удобно по причине широкой их применимости не только непосредственно в области математики и информационных наук, но и отраслевыми специалистами. Символьная форма конечной модели позволяет ее интерпретировать, осуществлять с ней дальнейшие исследования системы. Поэтому в данной главе предложено свести задачу идентификации динамической системы к задаче символьной регрессии, успешно решаемой алгоритмом из класса эволюционных – генетическим программированием. Рассмотрены основные эволюционные этапы алгоритма генетического программирования. Представлен алгоритм дифференциальной эволюции для оптимизации констант, входящих в символьные выражения, полученные алгоритмом генетического программирования.

Но очевидно, что алгоритм генетического программирования для решения задачи регрессии требует существенных модификаций для возможности его применения при идентификации динамических систем в виде дифференциальных уравнений и их систем в символьной форме. Далее перейдем к описанию основных модификаций подходов. Будет показано, что применение подходов на основе алгоритмов генетического программирования позволяет ослабить исходные ограничения, накладываемые на модель.

2 Структурно-параметрическая идентификация динамических систем эволюционными подходами на основе модифицированного алгоритма генетического программирования

В настоящее время оформилось и успешно развивается такое направление в технологиях машинного обучения, как эволюционные алгоритмы.

Идея использования эволюционных процессов для программирования логических автоматов была предложена в 1966 году доктором Лоуренсом Дж. Фогелем, доктором Аль Оуэнсом, и доктором Майклом Уолшем [69]. А в 1975 году была опубликована работа профессора Мичиганского университета Джона Генри Холланда, в которой был предложен генетический алгоритм, основанный на той же идее эволюционных процессов [70]. На волне популярности эволюционных алгоритмов, в 80-90-ые годы 20-го века разрабатываются новые направления, основанные на идеи эволюции. В 90-ые годы предложено такое направление эволюционных алгоритмов, как генетическое программирование [3].

С помощью алгоритма генетического программирования решаются задачи символьного интегрирования и дифференцирования, он применяется для автоматической генерации интеллектуальных информационных технологий, таких как нейронные сети и системы на нечеткой логике, для проектирования ансамблей интеллектуальных технологий [71-76].

Основной задачей, решаемой алгоритмом генетического программирования, как было отмечено выше, является задача символьной регрессии. Алгоритм генетического программирования для решения задачи символьной регрессии позволяет получать модель в виде формулы, пригодной для дальнейшего исследования.

Основные особенности алгоритма генетического программирования для решения задачи символьной регрессии представлены в Главе 1.

Современные направления исследований эволюционных алгоритмов и их разновидностей все чаще включают использование адаптации и самонастройки параметров алгоритма, так как эффективность эволюционных методов напрямую

зависит от их значений [77]. Термин самоконфигурируемые эволюционные алгоритмы введен в рамках семинара «Self-tuning self-configuring and self-generating evolutionary algorithms» научной конференции «Parallel Problem Solving from Nature». В данной работе под самонастраиваемыми алгоритмами понимаются эволюционные алгоритмы с адаптацией числовых параметров алгоритмов автоматическим выбором вариантов генетических операторов.

В данной работе предлагаются подходы к структурно-параметрической идентификации динамических систем с помощью эволюционных алгоритмов. В предыдущей главе задача идентификации сведена к задаче символьной регрессии, то есть к поиску дифференциального уравнения в символьной форме, описывающего поведение исследуемой динамической системы. Для поиска такой модели требуется применение процедур поиска структуры дифференциального уравнения и оптимизации числовых параметров, входящих в уравнение. Поэтому в данной работе предлагается гибридизация эволюционных алгоритмов решения задачи символьной регрессии и оптимизации.

2.1 Алгоритм генетического программирования для решения задачи идентификации

Подход для идентификации динамических систем в виде дифференциального уравнения основан на алгоритме генетического программирования для решения задач символьной регрессии [79]. В данной работе предлагается представление модели в виде дифференциального уравнения, структура которого получена с помощью алгоритма генетического программирования [80]. Причем применение данного алгоритма позволяет ослабить такие исходные ограничения на модель, как фиксированный порядок дифференциального уравнения и предопределенность структуры.

Для возможности применения алгоритма генетического программирования необходима его модификация для работы с индивидами, кодирующими дифференциальное уравнение.

Исходя из описанной в первой главе постановки задачи на основании данных измерений входных x_1, \dots, x_m и выходной y характеристик процесса (где m – количество входных переменных) в моменты времени t требуется построить модель в виде дифференциального уравнения (2.1):

$$\hat{y}^{(k)} = \hat{f}(\hat{y}', \dots, \hat{y}^{(k-1)}, \hat{y}, x_1, \dots, x_m, t), \quad (2.1)$$

где (x_1, \dots, x_m) – управляющие воздействия (входы), y – состояние (выход), начальные условия $y(x_0) = y_0$ считаем известными.

Особенностью алгоритма генетического программирования является представление индивида в виде древовидной структуры. Следовательно, при разработке подхода для решения задачи идентификации динамических систем необходимо определить процедуру задания порядка дифференциального уравнения и модифицировать терминальное и функциональное множества, требуемые для построения решения в виде дерева. Для формирования дерева необходимо задать максимально возможный порядок дифференциального уравнения K . Следовательно, решение задачи идентификации мы будем искать как дифференциальное уравнение (2.1) порядка $k \leq K$, где $k \in N$ [81]. Порядок k не фиксируется, а только ограничивается, таким образом, при формировании популяции в нее будут входить дифференциальные уравнения, закодированные в виде деревьев, порядок которых будет определен случайным образом для каждого индивида. В терминальное множество входит набор всех входных (x_1, \dots, x_m) и выходной (y) переменных, набор констант, производные $y', \dots, y^{(k-1)}$. Функциональное множество представлено математическими функциями, используемыми алгоритмом для формирования решения (+, -, /, \times , sin, cos, tg, ctg, exp, ln, |a|, a^2).

Корневая вершина дерева хранит не только элемент функционального множества, но и информацию о максимальном порядке производной для данного индивида. Пример дерева представлен на Рисунке 2.1.

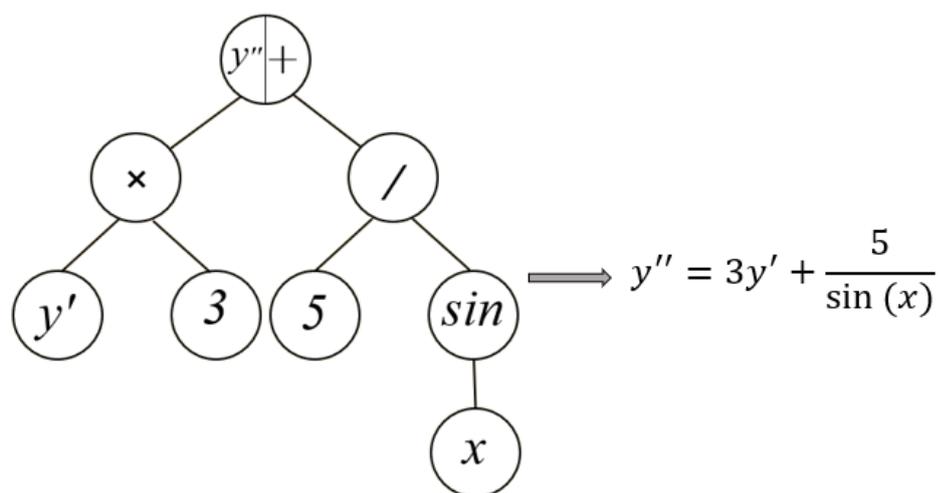


Рисунок 2.1 – Пример представления дифференциального уравнения в виде дерева

Получение модели в виде дифференциального уравнения требует переопределения и других эволюционных шагов, таких как инициализация, вычисление пригодности, селекция, скрещивание, мутация.

Инициализация

На этапе инициализации создается стартовая популяция из заданного числа индивидов. Случайным образом формируются деревья, кодирующие дифференциальные уравнения. Порядок дифференциального уравнения определяется случайным образом для каждого индивида. То есть порядок не предопределен заранее, а только ограничен некоторым значением K . Глубина дерева также ограничивается значением, задаваемым пользователем, но не фиксируется.

Вычисление пригодности

Полученные индивиды в виде деревьев преобразуются в дифференциальные уравнения, описывающие поведение динамической системы на исследуемых данных. Далее для каждого индивида вычисляется значение пригодности:

$$fitness = \frac{1}{1 + error}, \quad (2.2)$$

$$error = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{(\hat{y}_i - y_i)}}{\max(y_i) - \min(y_i)}. \quad (2.3)$$

где n – объем выборки, \hat{y}_i – значение индивида в i -ой точке, y_i – значения из исходной выборки.

При вычислении ошибки полученной модели требуется вычисление производной в точках исходной выборки. В предложенном подходе оценка выхода дифференциального уравнения \hat{y}_i по точкам исходной выборки (x_{1i}, \dots, x_{mi}) осуществлялась методом Рунге-Кутты 4 порядка [78].

Перед тем как искать решение дифференциального уравнения следует убедиться в существовании и единственности его решения согласно теореме [38]:

Теорема существования и единственности решения для уравнения k -го порядка

Решение дифференциального уравнения k -го порядка

$$y^k = f(y', \dots, y^{(k-1)}, y, x), \quad (2.4)$$

удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y'_0, \\ y''(x_0) &= y''_0, \\ &\dots \\ y^{(k-1)}(x_0) &= y_0^{(k-1)}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

существует и единственно, если в окрестности начальных значений $(y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(k-1)}, y_0)$ функция f является непрерывной функцией всех своих аргументов и удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго.

Запишем условие Липшица по аргументам:

$$\begin{aligned} |f(x, y_1, y', \dots, y^{(k-1)}) - f(x, y_2, y', \dots, y^{(k-1)})| &\leq N|y_1 - y_2|, \\ |f(x, y, y'_1, \dots, y^{(k-1)}) - f(x, y, y'_2, \dots, y^{(k-1)})| &\leq N'|y'_1 - y'_2|, \\ &\dots \\ |f(x, y, y', \dots, y_1^{(k-1)}) - f(x, y, y', \dots, y_2^{(k-1)})| &\leq N^{(n-1)}|y_1^{(n-1)} - y_2^{(n-1)}|. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Выполнение данной теоремы дает основания считать возможным получение единственного решения. Поэтому здесь и далее будем полагать, что теорема выполняется для искомым функций [79].

На этапе вычисления пригодности возможна ситуация, когда полученное дифференциальное уравнение противоречит принципам математики (например, деление на ноль). В этом случае такому индивиду присваивается нулевая пригодность, что не позволяет ему перейти на следующий эволюционный цикл.

Этапы выбора лучшего индивида и проверки критерия останова соответствуют классическому алгоритму генетического программирования для решения задачи символьной регрессии.

Селекция

В данном подходе при селекции выбор родительских пар осуществляется следующим образом: выбор первого индивида в паре осуществляется по порядковому номеру, а второй – с использованием операторов турнирной, ранговой и пропорциональной селекций. Эволюционный процесс был изменен и приближен к схеме дифференциальной эволюции, так как этого требовало дальнейшее применение адаптации параметров методом Success History Adaptation (SHA) [82].

Скращивание

Скращивание осуществляется в соответствии со стандартным, одноточечным и равномерным типами.

Мутация

Особенность мутации в предложенном подходе заключается в возможной мутации корневого узла, содержащего максимальный порядок дифференциального уравнения, так как мутация максимального для некоторого индивида порядка повлечет изменение (выбор случайным образом порядка производной ниже, чем новый максимальный порядок) и других выделенных вершин.

Так, на Рисунке 2.2 мутация максимального для данного индивида порядка повлечет изменение (выбор случайным образом порядка производной ниже, чем новый максимальный порядок) и других выделенных вершин.

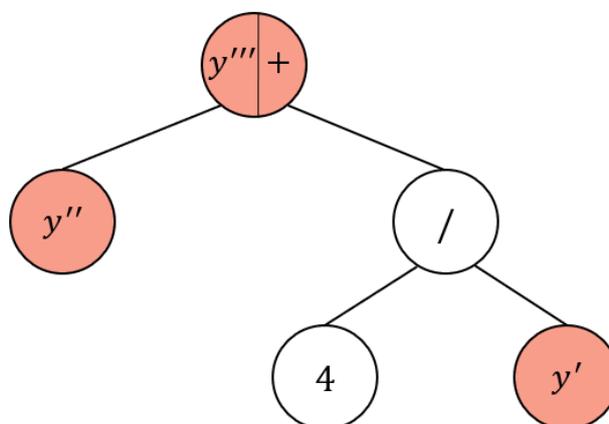


Рисунок 2.2 – Вершины, мутирующие при изменении корневого узла

Формирование популяции

Из потомков, полученных в результате работы рассмотренных операторов, формируется новая популяция.

Таким образом, структура дифференциального уравнения формируется с помощью модифицированного алгоритма генетического программирования.

2.2 Гибридный эволюционный подход для решения задачи структурно-параметрической идентификации динамических систем в виде дифференциальных уравнений

Представление модели динамической системы в виде дифференциального уравнения содержит и числовые параметры такие, как коэффициенты уравнения и начальные условия. Числовые параметры существенно влияют на значение ошибки модели, поэтому для их подбора предлагается использовать процедуру оптимизации. В данном подходе она осуществляется с помощью метода дифференциальной эволюции [83]. Выбор данного метода обусловлен тем, что

согласно исследованиям это лучший в настоящее время метод вещественной оптимизации [84].

Для каждой подобранной структуры дифференциального уравнения будет выполняться оптимизация вектора констант (c_1, c_2, \dots, c_r) , где r – количество констант настраиваемого в данный момент уравнения, алгоритмом дифференциальной эволюции. На практике значения начальных условий, как правило, не известны. Поэтому их также необходимо подбирать. Для этого в вектор констант, настраиваемый дифференциальной эволюцией, добавляем начальные условия $(c_1, \dots, c_r, y'_0, \dots, y_0^{n-1})$. Таким образом, выполняется параллельная оптимизация констант уравнения и начальных условий (Рисунок 2.3).

Модель:

$$\hat{y}^{(k)} = \hat{f}(\hat{y}', \dots, \hat{y}^{(k-1)}, \hat{y}, x_1, \dots, x_m, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_r, t)$$

Генетическое программирование:

поиск структуры

Дифференциальная эволюция:

оптимизация вектора $(\underbrace{c_1, c_2, \dots, c_r}_{\text{Числовые коэффициенты}}, \underbrace{y'_0, \dots, y_0^{k-1}}_{\text{Начальные условия}})$

Рисунок 2.3 – Применение эволюционных алгоритмов для задачи идентификации

На Рисунке 2.4 представлена схема предложенного эволюционного гибридного подхода, объединившего модифицированный алгоритм генетического программирования для подбора структуры модели в виде дифференциального уравнения и метод дифференциальной эволюции для оптимизации числовых констант и начальных условий [85-86].

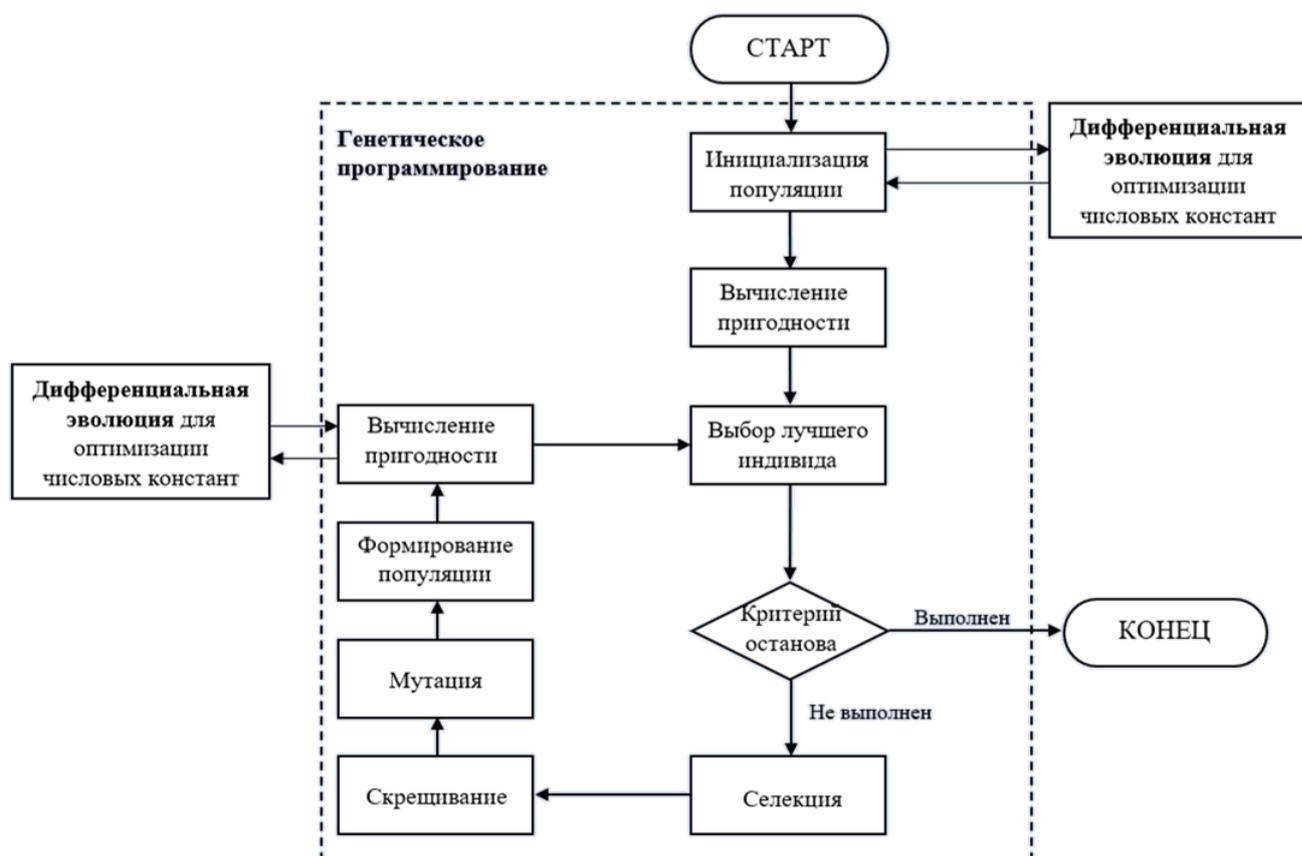


Рисунок 2.4 – Схема эволюционного подхода к идентификации динамических систем в виде дифференциальных уравнений

Эффективность эволюционных алгоритмов существенно зависит от точного выбора конфигурации алгоритма, то есть типов эволюционных операторов и числовых параметров. Полный перебор возможных настроек данных алгоритмов очень затратен, а зачастую – невозможен. Поэтому существует потребность разработки процедур, автоматизирующих процесс подбора настроек [87].

Для удовлетворения данной потребности одни исследователи, основываясь на численных экспериментах, стремятся определить подходящие настройки, а другие реализуют подходы, в которых процесс выбора настроек осуществляется адаптивно, непосредственно в ходе работы алгоритма [77].

Под самонастройкой будем понимать автоматизированный выбор и применение существующих вариантов операторов и числовых параметров. Группы операторов представлены в Таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Группы операторов для самонастройки

Алгоритм	Группы операторов	
	операторы с выбором типа	операторы с выбором числового значения
Генетическое программирование	операторы селекции операторы скрещивания	вероятность скрещивания вероятность мутации
Дифференциальная эволюция	вид мутации	сила мутации вероятность скрещивания

Рассмотрим суть метода самонастройки, применявшейся в данной работе.

Вероятность выбора того или иного типа оператора зависит от успешности его применения [88]. На первом этапе вероятности выбора вида оператора будут иметь одинаковые значения. На последующих шагах вероятность выбора оператора будет вычисляться по следующей формуле [57]:

$$par_i = par_{all} + r_i \frac{(100 - v \cdot par_{all})}{scale}, \quad (2.7)$$

где $par_{all} = \frac{20}{v}$, v – число операторов, $r_i = \frac{success_i^2}{used_i}$, $scale = \sum_{j=1}^v r_j$, а $used_i$ – число, показывающее, сколько раз был применен i оператор, $success_i$ – количество раз, когда оператор i привел к успеху, то есть пригодность потомка оказалась лучше средней пригодности родительских индивидов [55].

Настройка числовых параметров осуществляется по алгоритму Success History Adaptation [89]:

$$new_{val} = \frac{old_{val} + \frac{c_1}{c_2}}{2}, \quad (2.8)$$

где new_{val} – это новое значение параметра, а old_{val} – соответственно старое.

$$c_1 = \sum_{i=1}^q w_i \cdot (success_val_i)^2, \quad (2.9)$$

$$c_2 = \sum_{i=1}^q w_i \cdot success_val_i, \quad (2.10)$$

$$w_i = \frac{FitDif_i}{\sum_{j=1}^q FitDif_j}, \quad (2.11)$$

где q – это количество успешных применений настраиваемого параметра val , то есть, когда пригодность потомка получилась выше средней пригодности родительских индивидов; $success_val$ – это значение успешно примененного параметра val ; $FitDif$ – это изменение значения пригодности для каждого успешного параметра [90].

Применение данных процедур позволит значительно сократить временные и вычислительные ресурсы и позволит упростить взаимодействие исследователей, которые не являются специалистами в области эволюционных вычислений, с применяемыми алгоритмами.

2.3 Эволюционный подход к структурно-параметрической идентификации динамических объектов в виде системы дифференциальных уравнений

Зачастую в реальных процессах выход динамической системы характеризуется несколькими переменными [91-92]. Для построения модели таких процессов следует использовать представление в виде системы дифференциальных уравнений [85].

В данной работе предложен и исследован эволюционный подход для идентификации динамических объектов в виде системы дифференциальных уравнений. В такой постановке задачи требуется по данным измерений входных (x_1, \dots, x_m) и выходных (y_1, \dots, y_s) характеристик процесса (где m – количество входных, а s – количество выходных переменных) построить модель в виде системы дифференциальных уравнений произвольного порядка:

$$\begin{cases} \hat{y}_1^{(k)} = \hat{f}_1(x_1, \dots, x_m, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_s, t) \\ \hat{y}_2^{(k)} = \hat{f}_2(x_1, \dots, x_m, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_s, t) \\ \dots \\ \hat{y}_s^{(k)} = \hat{f}_s(x_1, \dots, x_m, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_s, t) \end{cases} \quad (2.12)$$

Порядок дифференциального уравнения k будем считать ограниченным значением K , задаваемым пользователем, как и в предыдущем подходе. Для разных уравнений системы порядок k может отличаться.

В данной работе представлен авторский подход, который основан на описанном выше эволюционном подходе для идентификации динамической системы в виде дифференциального уравнения. Таким образом, в данном предложенном подходе система дифференциальных уравнений кодируется совокупностью деревьев (Рисунок 2.5). Особенностью предлагаемого подхода является реализация комбинации из нескольких алгоритмов генетического программирования (для s уравнений в системе требуется s алгоритмов генетического программирования), каждый из которых осуществляет поиск одного из уравнений системы. Количество уравнений s соответствует количеству выходных переменных в исследуемой системе. Схема, демонстрирующая основные этапы подхода, представлена на рисунке 2.6.

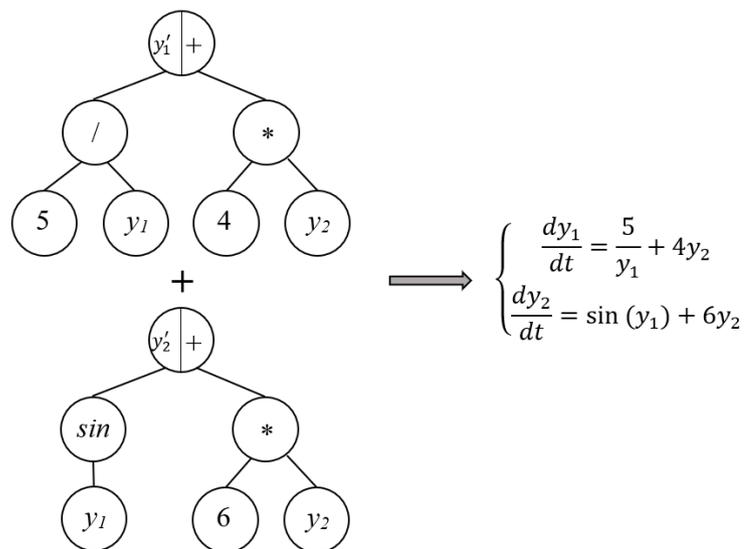


Рисунок 2.5 – Пример системы дифференциальных уравнений, закодированных в виде деревьев

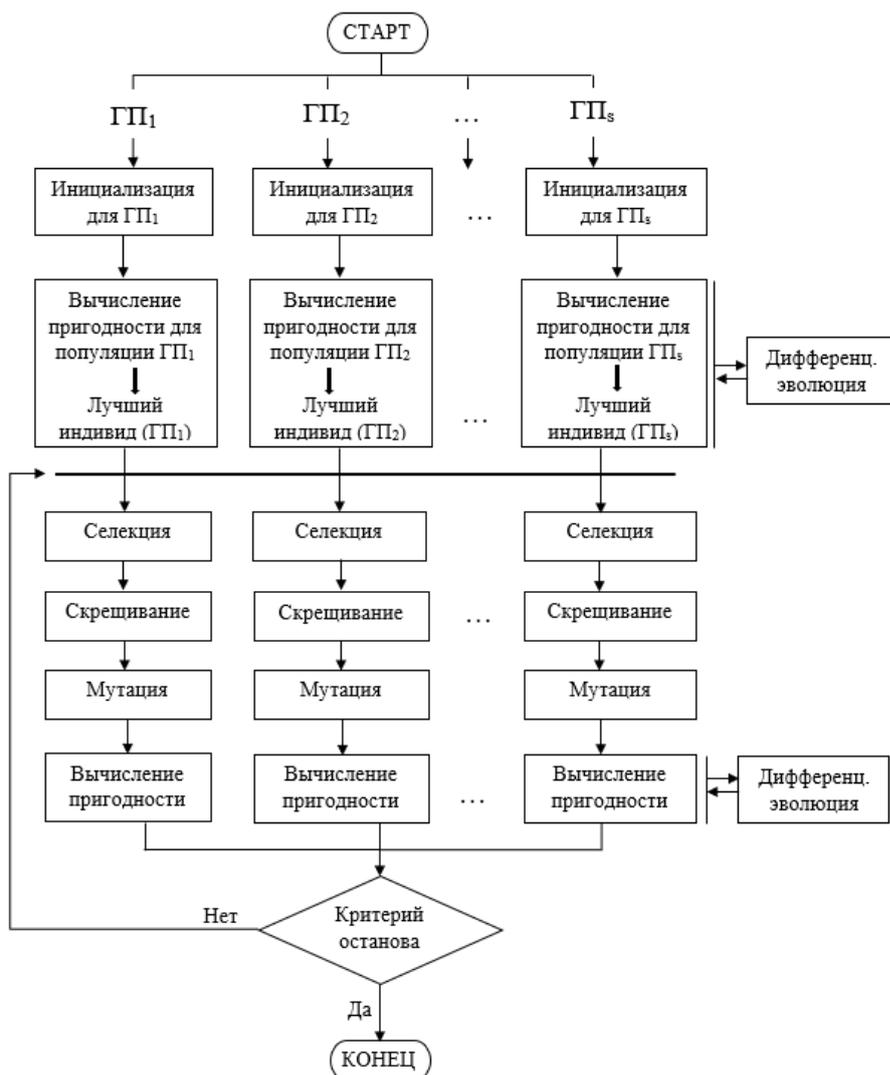


Рисунок 2.6 – Схема эволюционного подхода к идентификации динамических систем в виде системы дифференциальных уравнений

Далее каждый алгоритм генетического программирования формирует популяцию индивидов, являющихся потенциальными представлениями каждого из s дифференциальных уравнений в системе [93].

Для всех индивидов вычисляется пригодность (однократный полный перебор всевозможных комбинаций индивидов, без учета порядка), на основании полученных значений в каждой популяции определяется лучший индивид. Вычисление пригодности для каждого индивида каждой популяции осуществляется подстановкой в каждое из уравнений системы, в качестве остальных уравнений выбираются лучшие индивиды соответствующих популяций. Вычисление осуществляется в соответствии с формулами:

$$fitness = \frac{1}{1 - error}, \quad (2.13)$$

$$error = \frac{\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \hat{y}_{ij})^2}{sn}, \quad (2.14)$$

где n – размер выборки, s – количество уравнения в системе, y_{ij} значения исходной выборки, \hat{y}_{ij} – значения модели.

В представленном подходе отсутствуют ограничения на количество дифференциальных уравнений, входящих в систему, их порядок и структуру. А полученные в символьном виде модели возможно интерпретировать в контексте рассматриваемой предметной области.

2.4 Самонастраивающийся алгоритм генетического программирования для символьного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Как было отмечено выше, решение дифференциального уравнения может служить его альтернативой для прогнозирования и управления технологическими процессами, если полученное дифференциальное уравнение имеет сложную для исследования структуру. При идентификации линейного динамического процесса, который является стационарным, он может быть представлен как решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения [10, 94].

Представим постановку задачи. Пусть имеется уравнение в виде:

$$F(y', \dots, y^{(k)}, y, x) = 0 \quad (2.15)$$

и начальные условия:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y'_0, \\ y''(x_0) &= y''_0, \\ &\dots \\ y^{(k-1)}(x_0) &= y_0^{(k-1)}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

определенные вещественными числами, необходимые для единственного решения задачи Коши, где $y, y', y'', \dots, y^{(k)}$ – неизвестная функция и ее производные до k -го порядка; x_0 – начальная точка интервала, на котором определена функция.

Требуется найти решение дифференциального уравнения в виде функции $y = \varphi(x)$, то есть функцию, которая при подстановке в уравнение (2.15) обращает его в тождество.

Существуют два основных пути решения задачи Коши для дифференциальных уравнений: аналитический и численный. Аналитический подход позволяет получить точное, теоретически обоснованное решение в удобной для дальнейшего исследования форме. Однако с помощью аналитических методов возможно решать уравнения строго определенных типов. В противоположном случае дифференциальное уравнение решают численно. Но результаты численных методов ограничивают возможности дальнейших исследований.

При необходимости поиска решения в символьном виде описанную задачу возможно решать путем сведения ее к процедуре поиска наименьшего значения функции ошибки на множестве символьных выражений. При решении данной задачи оптимизации глобальный оптимум равен нулю и достигается на символьном выражении, точно повторяющем истинное решение задачи Коши.

В данной постановке для решения задачи Коши целесообразно применять алгоритм генетического программирования, позволяющий получить решение в символьном виде, для подбора структуры решения дифференциального уравнения.

Применение алгоритма генетического программирования для решения задачи Коши рассматривается в ряде работ [95-96]. Существенным недостатком данных алгоритмов является отсутствие процедур автоматизации выбора настроек алгоритмов.

В данной диссертационной работе представлен гибридный метод решения, объединивший численный метод, самонастраивающийся алгоритм генетического программирования для подбора структуры решения дифференциального

уравнения и метод дифференциальной эволюции для оптимизации числовых значений в полученном выражении (Рисунок 2.7) [97].

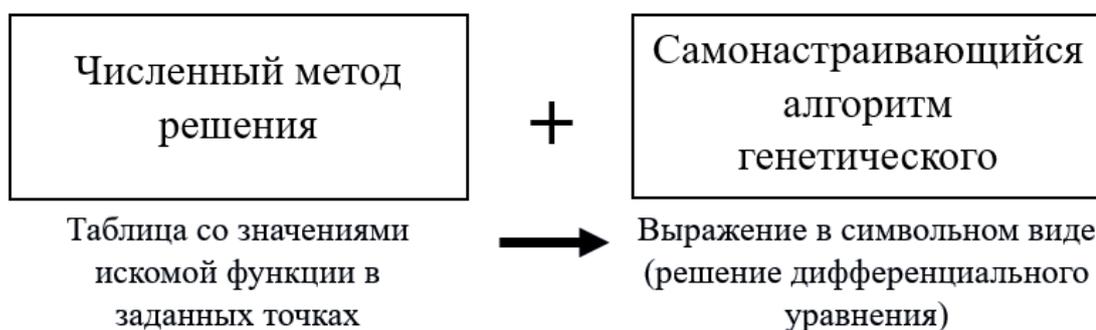


Рисунок 2.7. Гибридный метод решения задачи Коши в символьной форме

На первом этапе осуществляется численное решение дифференциального уравнения методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Данный метод часто применяется для решения дифференциальных уравнений из-за его высокой точности.

В результате решения дифференциального уравнения численным методом будет получена таблица чисел, представляющих значения искомой функции в заданных точках. Данная таблица и будет входными данными для алгоритма генетического программирования. На их основании будет найдена структура выражения в символьном виде. Затем проводится оптимизация числовых значений, входящих в выражение, методом дифференциальной эволюции.

В данном подходе не требуется модификация основных эволюционных этапов.

Если для решаемой задачи Коши не выполнено условие единственности решения, то представленный подход позволяет найти одно из возможных решений.

Результаты Главы 2

В данной главе представлен модифицированный алгоритм генетического программирования для поиска структуры дифференциального уравнения в символьной форме. Были модифицированы основные эволюционные этапы для возможности работы с индивидами, кодирующими дифференциальные уравнения. Основными особенностями модифицированного алгоритма генетического программирования является то, что при формировании дерева порядок дифференциального уравнения только ограничивается, но не фиксируется, и таким образом при решении задачи идентификации в одной популяции присутствуют индивиды (потенциальные модели), кодирующие дифференциальные уравнения различного порядка. Применение генетического программирования позволяет избежать ограничений, накладываемых на структуру правой части дифференциального уравнения, что позволяет получать как линейные, так и нелинейные уравнения. Но очевидно, что дифференциальные уравнения содержат числовые параметры и начальные условия системы, поэтому для оптимизации их значений предложено применение метода дифференциальной эволюции. Таким образом, подход к структурно-параметрической идентификации динамических систем основан на модифицированном алгоритме генетического программирования для формирования структуры и методе дифференциальной эволюции для оптимизации числовых параметров и начальных условий. Для построения моделей объектов с несколькими выходными воздействиями предложен подход к идентификации в виде системы дифференциальных уравнений. Основная его идея заключается в одновременной работе нескольких алгоритмов, каждый из которых осуществляет поиск одного из уравнений системы. Ключевой особенностью является вычисление пригодности системы в целом, а не каждого отдельного индивида (уравнения, соответствующего некоторому выходному воздействию). Во всех предложенных подходах реализована процедура самонастройки параметров эволюционных алгоритмов, в которой подразумевается как адаптация числовых параметров, так и выбор типов

операторов. Представленные подходы к структурно-параметрической идентификации позволяют получить модели динамических систем в виде дифференциальных уравнений и их систем без ограничений на количество входных и выходных характеристик, структуру уравнений и его predetermined порядка. В следующей главе проводится тестирование предложенных подходов и анализ устойчивости к наличию шума в данных и их малому объему.

3 Практическая реализация и тестирование эволюционных подходов к решению задач структурно-параметрической идентификации динамических систем

В данной главе проводится исследование предложенных подходов на основе самонастраивающегося алгоритма генетического программирования и метода дифференциальной эволюции для структурно-параметрической идентификации динамических объектов в виде дифференциальных уравнений и их систем [98, 99]. При решении тестовых задач идентификации в данной работе ключевыми показателями эффективности являются ошибка модели и символьная точность полученных решений (т.е. степень символьного совпадения с формулой известного решения).

Для подходов к идентификации динамических систем сначала было проведено исследование на данных, сгенерированных по дифференциальным уравнениям и системам различного вида, порядка и количества входных переменных. На тестовых задачах исследована зависимость ошибки получаемых решений от наличия шума в данных и их объема, определена принадлежность получаемых моделей к классам символьно точные (полное соответствие структуры и параметров полученного уравнения или системы известным истинным), символьно условно точные (полученная структура соответствует известной истинной после выполнения простейших математических операций) и приближенные.

Как было отмечено в Главе 1 существует большое число методов идентификации динамических систем. В данной работе предлагается провести сравнение предложенных эволюционных подходов с рекуррентной нейронной сетью и непараметрической ядерной оценкой регрессии. Выбор данных методов обусловлен тем, что они применяются для анализа временных рядов и не требуют наличия априорных знаний о структуре модели.

3.1 Исследование эффективности эволюционных подходов к идентификации динамических систем на задачах, представленных дифференциальными уравнениями и их системами

Проведем исследование предложенных подходов. Сначала исследуем эффективность на данных, сгенерированных по известным дифференциальным уравнениям и их системами.

Для тестирования эволюционного подхода к идентификации динамических систем в виде дифференциального уравнения были использованы задачи, представленные в Таблице 3.1 [100]. Данные задачи представлены дифференциальными уравнениями различного типа и порядка.

Таблица 3.1 – Тестовые задачи для эволюционного подхода к идентификации динамической системы в виде дифференциального уравнения

№	Дифференциальное уравнение	Интервал варьирования переменной	Начальные условия
1	$y' = -2y$	$x \in [0; 5]$	$y(x_0) = 2$
2	$y' = -\frac{xy}{x+1}$	$x \in [0; 5]$	$y(x_0) = -7,389$
3	$y' = \frac{y + x^2 \cos x}{x}$	$x \in [0,1; 6]$	$y(x_0) = 0,06$
4	$y' = -\frac{y \ln y}{x}$	$x \in [1; 7]$	$y(x_0) = e$
5	$y' = \frac{2xy + 3}{x^2}$	$x \in [1; 7]$	$y(x_0) = -1$
6	$y' = \frac{3x^2 e^{-x} - (x+y)y}{x}$	$x \in [1; 6]$	$y(x_0) = 0$
7	$y'' = 2y' + 10y$	$x \in [0; 6]$	$y(x_0) = 0$
8	$y'' = \frac{2(y')^2}{y-1}$	$x \in [0; 6]$	$y(x_0) = 2$
9	$y'' = \frac{4(y^4 - 1)}{y^3}$	$x \in [0; 5]$	$y(x_0) = \sqrt{2}$

Продолжение таблицы 3.1

№	Дифференциальное уравнение	Интервал варьирования переменной	Начальные условия
10	$y'' = \cos(3x) - 9y$	$x \in [0; 6]$	$y(x_0) = 0$
11	$y'' = -2y' - 2y + 2x^2 + 8x + 6$	$x \in [0; 6]$	$y(x_0) = 1$
12	$y'' = y'e^y$	$x \in [0; 6]$	$y(x_0) = 0$
13	$y'' = 6y' - 9y + 6xe^{3x}$	$x \in [0; 6]$	$y(x_0) = 3$
14	$y'' = \frac{1}{y^3}$	$x \in [-2; 3]$	$y(x_0) = 1$
15	$y'' = -\frac{(y')^2}{1+x^2}$	$x \in [1; 6]$	$y(x_0) = 1$
16	$y'' = 12y' - 36y + 32 \cos(2x) + 24 \sin(2x)$	$x \in [0; 5]$	$y(x_0) = 2$
17	$y''' = \frac{6}{x^3}$	$x \in [1; 6]$	$y(x_0) = 0$
18	$y''' = 4y' + 24e^{2x} - 4 \cos(2x) + 8 \sin(2x)$	$x \in [0; 4]$	$y(x_0) = 1$
19	$y^{IV} = -4y''' - 4y'' + x - x^2$	$x \in [0; 5]$	$y(x_0) = 0$
20	$y^{IV} = y + 2 \cos(x)$	$x \in [0; 5]$	$y(x_0) = 0$
21	$y^V = y^{IV} + 2x + 3$	$x \in [0; 6]$	$y(x_0) = 2$
22	$y' = \frac{y + x_1^2 \cos x_2}{x_3}$	$x_1 \in [0, 1; 6]$ $x_2 \in [3; 3, 9]$ $x_3 \in [4, 5; 10, 4]$	$y(x_0) = 0, 06$
23	$y'' = \frac{y' + x_1^2 y y'}{x_2^2}$	$x_1 \in [1; 6]$ $x_2 \in [27; 512]$	$y(x_0) = 0$
24	$y' = \frac{3x_1^2 e^{-x_2} - (x_1 + y)y}{x_2}$	$x_1 \in [-1; 1]$ $x_2 \in [3; 8]$	$y(\bar{x}_0) = 0$
25	$y'' = -2y' - 2y + 2x_1^2 + 8x_2 + 6$	$x_1 \in [0; 5]$ $x_2 \in [2, 5; 7, 5]$	$y(\bar{x}_0) = 3$

В Таблице 3.2 представлены результаты идентификации по данным, сгенерированным по задачам из Таблицы 3.1. Для каждой задачи были сгенерированы данные разного объема без шума и с шумом. Шум распределен по нормальному закону. Для каждой задачи было проведено по 100 запусков разработанного эволюционного подхода. Результаты представлены значениями ошибки (усредненными по 100 запускам) в зависимости от объема выборки и наличия шума в данных.

Таблица 3.2 – Результаты тестирования эволюционного подхода к идентификации динамических систем в виде дифференциального уравнения

№	Объем выборки								
	150			100			50		
	Шум, %								
	0	5	10	0	5	10	0	5	10
1	0	0	0,0001	0	0	0,0001	0	0	0,0001
2	0	0	0,0001	0	0	0	0	0,0001	0,0001
3	0	0	0,0001	0	0,0001	0,0001	0	0	0,0001
4	0	0	0,0001	0	0	0,0001	0	0,0001	0,0001
5	0,0001	0,0007	0,0007	0,0001	0,0008	0,0008	0,0004	0,0008	0,0011
6	0,0003	0,0003	0,0004	0,0003	0,0006	0,0007	0,0003	0,0008	0,001
7	0	0	0,0001	0	0	0,0001	0	0	0,0001
8	0,0001	0,0008	0,0008	0,0001	0,0008	0,0008	0,0002	0,0009	0,0012
9	0	0,0004	0,0006	0	0,0005	0,0007	0,0001	0,0007	0,0007
10	0,0003	0,0003	0,0004	0,0002	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0005
11	0,0002	0,0004	0,0005	0,0003	0,0003	0,0004	0,0003	0,0005	0,0005
12	0,0006	0,0007	0,0008	0,0006	0,0007	0,0007	0,0008	0,0009	0,0009
13	0,0002	0,0003	0,0003	0,0002	0,0003	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005
14	0	0,0002	0,0003	0	0,0003	0,0003	0,0001	0,0007	0,0007
15	0	0	0,0003	0	0,0001	0,0002	0,0001	0,0002	0,0002
16	0,0007	0,0012	0,0013	0,0007	0,0013	0,0013	0,0008	0,0013	0,0014
17	0,0001	0,0002	0,0003	0,0001	0,0003	0,0003	0,0001	0,0007	0,0007
18	0,0001	0,0005	0,0007	0	0,0006	0,0007	0,0001	0,0008	0,0008
19	0	0	0,0002	0	0,0003	0,0003	0,0001	0,0005	0,0005
20	0	0,0001	0,0002	0	0,0002	0,0003	0,0001	0,0004	0,0005
21	0	0,0008	0,0009	0,0001	0,0009	0,0009	0,0001	0,0013	0,0014
22	0,0046	0,0055	0,0059	0,0074	0,0092	0,0104	0,0113	0,0201	0,0287
23	0,0017	0,0047	0,0053	0,002	0,0049	0,0051	0,0033	0,0058	0,0075
24	0,0045	0,0053	0,0056	0,005	0,0058	0,0087	0,0091	0,009	0,0097
25	0,0011	0,0033	0,0041	0,0023	0,0037	0,0042	0,0024	0,0037	0,0039

На Рисунке 3.1 представлен пример модели, описывающей набор данных по задаче 3 из таблицы 3.1. Набор данных содержит 30 точек, сгенерированных с нормально распределенным шумом (10%). Можно сделать вывод, что даже при наличии шума в данных была получена модель символично совпадающая с дифференциальным уравнением, по которому были сгенерированы тестовые данные. Как видно на Рисунке 3.1 линия, изображающая полученное решение, совпадает с линией, изображающей исходную модель.

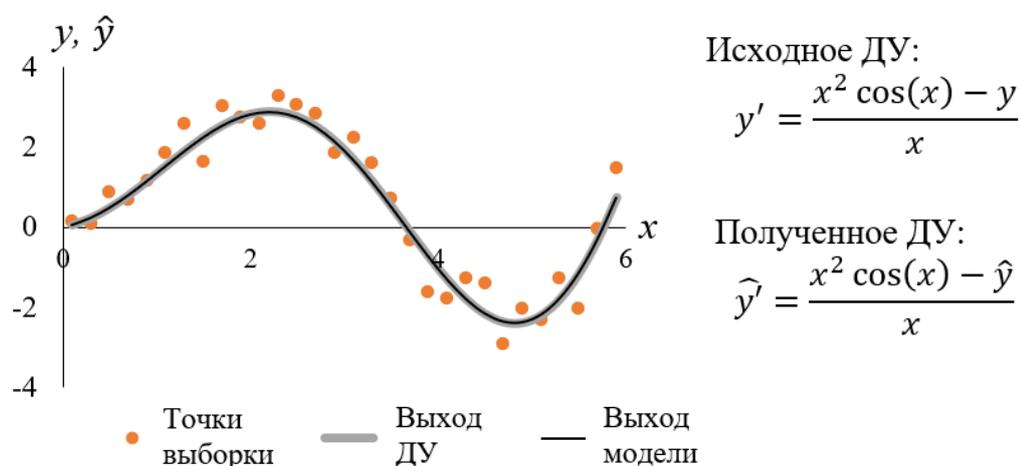


Рисунок 3.1 – Соответствие выхода модели точкам исходной выборки (для объекта в виде дифференциального уравнения (ДУ))

Рассмотрим модели, принадлежащие к различным классам символической точности. Так, на основании данных, сгенерированных по дифференциальному уравнению 8 из Таблицы 3.1 были получены модели, относящиеся к классам символично условно точные (3.1) и приближенные (3.2) и (3.3):

$$y'' = \frac{4y'y'}{2\left(0,834y + \frac{0,113y^2}{y} - \frac{x}{x}\right)} = \frac{2y'^2}{0,947y - 1'} \quad (3.1)$$

$$y'' = 0,285y' \quad (3.2)$$

$$y'' = 0,115y'u \quad (3.3)$$

Далее рассмотрим результаты тестирования подхода к идентификации динамических систем в виде системы дифференциальных уравнений

Для тестирования предложенного подхода были использованы задачи, представленные в Таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Тестовые задачи для эволюционного подхода к идентификации динамических систем в виде системы дифференциальных уравнений

№	Система дифференциальных уравнений	Начальные условия
1	$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 3y_1 - y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = 4y_1 - y_2 \end{cases}$	$\begin{aligned} y_1(0) &= 5 \\ y_2(0) &= 7 \end{aligned}$
2	$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = 3y_1 + te^t \end{cases}$	$\begin{aligned} y_1(1) &= 1 \\ y_2(1) &= 2 \end{aligned}$
3	$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_1 + 2y_2 + e^{-2t} \\ \frac{dy_2}{dt} = 4y_1 - y_2 \end{cases}$	$\begin{aligned} y_1(0,1) &= 5 \\ y_2(0,1) &= 8 \end{aligned}$
4	$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 - y_1^2 - y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = 3y_1 - y_2^2 - y_1 \end{cases}$	$\begin{aligned} y_1(0) &= 0 \\ y_2(0) &= 1 \end{aligned}$
5	$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 \\ \frac{dy_3}{dt} = y_1 - y_4 \\ \frac{dy_4}{dt} = y_2 + y_3 \end{cases}$	$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= 0 \\ y_3(0) &= 0 \\ y_4(0) &= 0 \end{aligned}$
6	$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 - y_2 - y_3 \\ \frac{dy_2}{dt} = 3y_1 - 2y_2 - 3y_3 + 2t \\ \frac{dy_3}{dt} = 2y_3 - y_1 - y_2 - t^2 \end{cases}$	$\begin{aligned} y_1(0) &= 2 \\ y_2(0) &= 3 \\ y_3(0) &= 2 \end{aligned}$
7	$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -10y_1 + 10y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = 25y_1 - y_2 - y_1y_2 \\ \frac{dy_3}{dt} = y_1y_2 - 10y_3 \end{cases}$	$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= 0 \\ y_3(0) &= -1 \end{aligned}$

Продолжение таблицы 3.3

№	Система дифференциальных уравнений	Начальные условия
8	$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 3y_1 + 2y_2 \\ \frac{d^2y_2}{dt^2} = -10y_1 - y_2 \end{cases}$	$\begin{aligned} y_1(0) &= -1 \\ y_2(0) &= 7 \end{aligned}$
9	$\begin{cases} \frac{d^2y_1}{dt^2} = -ty_2 \\ \frac{d^2y_2}{dt^2} = y_2 - 2\frac{dy_1}{dt} \end{cases}$	$\begin{aligned} y_1(1) &= 4 \\ y_2(1) &= -4 \end{aligned}$
10	$\begin{cases} \frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_2}{dt} + e^{-t} + \cos t \\ \frac{d^2y_2}{dt^2} = \frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_2}{dt} - 2e^t - \sin t \end{cases}$	$\begin{aligned} y_1(0) &= 2 \\ y_2(0) &= 0 \end{aligned}$

В качестве примера рассмотрим результат поиска модели для задачи 1. Была получена модель символично идентичная известной системе дифференциальных уравнений (3.4):

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 3y_1 - y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = 4y_1 - y_2 \end{cases} \quad (3.4)$$

График соответствия выходов модели выходам известного объекта представлен на Рисунке 3.2:

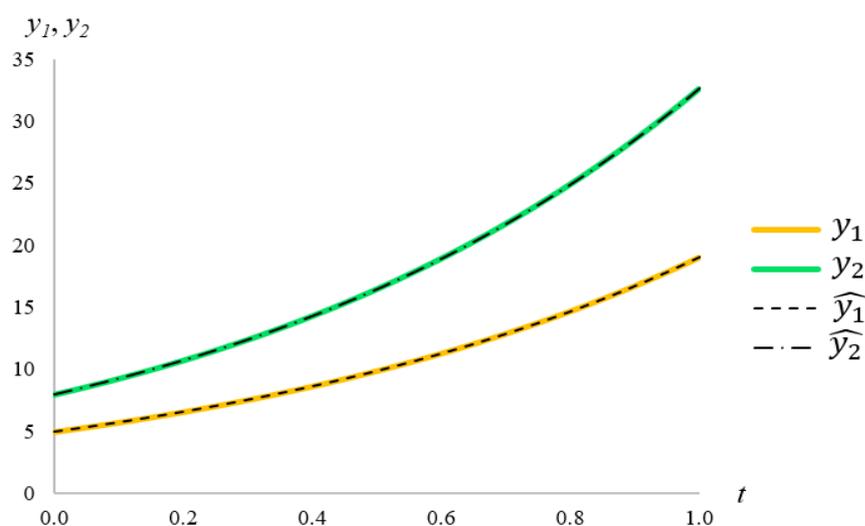


Рисунок 3.2 – Соответствие выхода модели точкам исходной выборки (для объекта в виде системы дифференциальных уравнений)

Аналогично предыдущей схеме тестирования был проведен анализ ошибки полученных моделей в зависимости от объема данных и наличия шума (Таблица 3.4).

Таблица 3.4 – Результаты тестирования эволюционного подхода к идентификации динамических объектов в виде систем дифференциальных уравнений

№	Объем выборки								
	150			100			50		
	Шум, %								
	0	5	10	0	5	10	0	5	10
1	0	0,0001	0,027	0,002	0,016	0,031	0,022	0,034	0,04
2	0,018	0,023	0,024	0,018	0,024	0,024	0,019	0,025	0,024
3	0,018	0,051	0,057	0,018	0,052	0,057	0,019	0,055	0,058
4	0	0,0001	0,001	0	0,0001	0,001	0,002	0,002	0,003
5	0	0,0001	0,002	0	0,0001	0,002	0	0,001	0,003
6	0,022	0,024	0,025	0,031	0,035	0,39	0,038	0,039	0,038
7	0,027	0,031	0,032	0,028	0,029	0,033	0,031	0,032	0,039
8	0	0,0001	0,002	0	0,001	0,002	0,002	0,003	0,003
9	0	0,002	0,002	0	0,002	0,002	0,001	0,002	0,003
10	0,041	0,042	0,053	0,042	0,045	0,054	0,039	0,045	0,053

Приведем пример модели в виде системы дифференциальных уравнений, относящейся к классу приближенные. Для задачи 2 из Таблицы 3.3 получена следующая модель, ошибка которой составила 0,0004:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 + 1,995y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = 2,923y_2 \end{cases} \quad (3.5)$$

Далее была исследована эффективность подхода на основе самонастраивающегося алгоритма генетического программирования для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. В ходе исследования были рассмотрены задачи Коши, представленные в Таблице 3.5.

Таблица 3.5 – Тестовые задачи Коши

№	Уравнение	Начальные условия	Интервал	Точное решение
1	$xy + (x + 1)y' = 0$	$y(0) = 1$	$[0; 3]$	$(x + 1)e^{-x}$
2	$xy' - 2y - 2x^4 = 0$	$y(-1) = 2$	$[-1; 1]$	$x^2 + x^4$
3	$2x(x^2 + y) - y' = 0$	$y(-1,4) = 4,14$	$[-1,4; 1,4]$	$e^{x^2} - x^2 - 1$
4	$(y - xy') + x^2 \cos(x) = 0$	$y(0,1) = 0,06$	$[0,1; 6]$	$x(0,5 + \sin(x))$
5	$y' - 3e^{-2x}y^2 - y = 0$	$y(0) = 1$	$[0;4]$	e^{2x}
6	$y''(y - 1) - 2(y')^2 = 0$	$y(0) = 2$ $y'(0) = 2$	$[0;5]$	$1 + \frac{1}{1 - 2x}$
7	$y'' + 2 \sin(x) = 0$	$y(0) = 0$ $y'(0) = 2$	$[0; 6]$	$2 \sin(x)$
8	$y'' + 2y' + 2y - 2x^2 - 8x - 6 = 0$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 4$	$[0;4]$	$(x^3 - 2x + 3)e^{3x}$

Рассмотрим результат работы алгоритмы на примере Задачи 1. В Таблице 3.6 представлены решения, получаемые алгоритмом, и номер поколения, на котором решение было найдено.

Таблица 3.6 – Результат работы эволюционного подхода к решению задачи Коши для Задачи 1

Номер запуска	Полученное решение	Номер поколения
1	$((-0,999 - x)/(-0,999 * \exp(x)))$	25
2	$((0,999 + x)/\exp(x))$	12
3	$((x + (0,21/0,21))/\exp(x))$	38
4	$((1 + x)/(0,999 * \exp(x)))$	35
5	$((0,999/0,999) * (0,999/\exp(x)) * (x + 0,999))$	28
6	$((x - (-1)) * \exp((-1) * x))$	39
7	$((\exp(x)/\exp(x)) + x)/\exp(x)$	44
8	$((\exp(x)/\exp(x)) + x)/\exp(x)$	34
9	$((\exp(x)/\exp(x)) + x)/\exp(x)$	41
10	$((\exp(0,992)/\exp((0,987 + x))) * (0,992 * (0,992 + x)))$	84

По результатам работы эволюционного подхода, представленным в Таблице 3.6 можно сделать вывод, что решения задачи Коши, соответствующие номерам запуска 2 и 4 относятся к классу символьно точных, к символьно условно точным относятся решения, полученные на 1, 3, 5, 7, 8 и 9 запусках, а приближенным является решение на запуске 10.

В Таблице 3.7 представлены значения ошибки, полученные по 100 запускам для каждой задачи и усредненные в соответствии с особенностями задач.

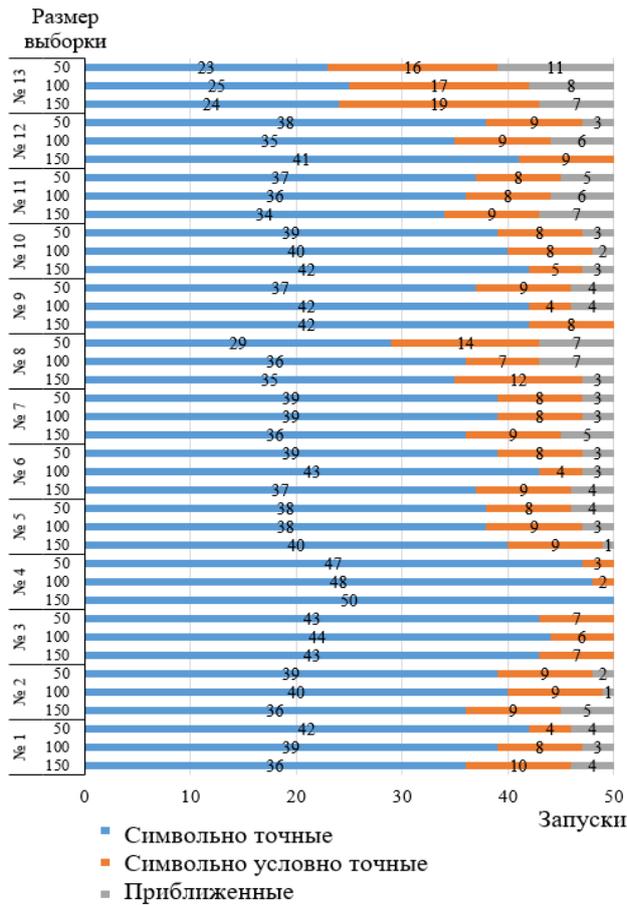
Согласно полученным данным все предложенные эволюционные подходы, устойчивы к наличию шума в данных и малому объему выборки.

Важной особенностью трех данных подходов является возможность получения моделей в символьном виде. Однако ожидается, что такое представление будет соответствовать истинной природе процесса. Поэтому для моделей, полученных при идентификации тестовых задач была определена принадлежность к видам символьно точные, символьно условно точные и приближенные на основании 50 запусков для каждого критерия исследования (шум и объем выборки) [101].

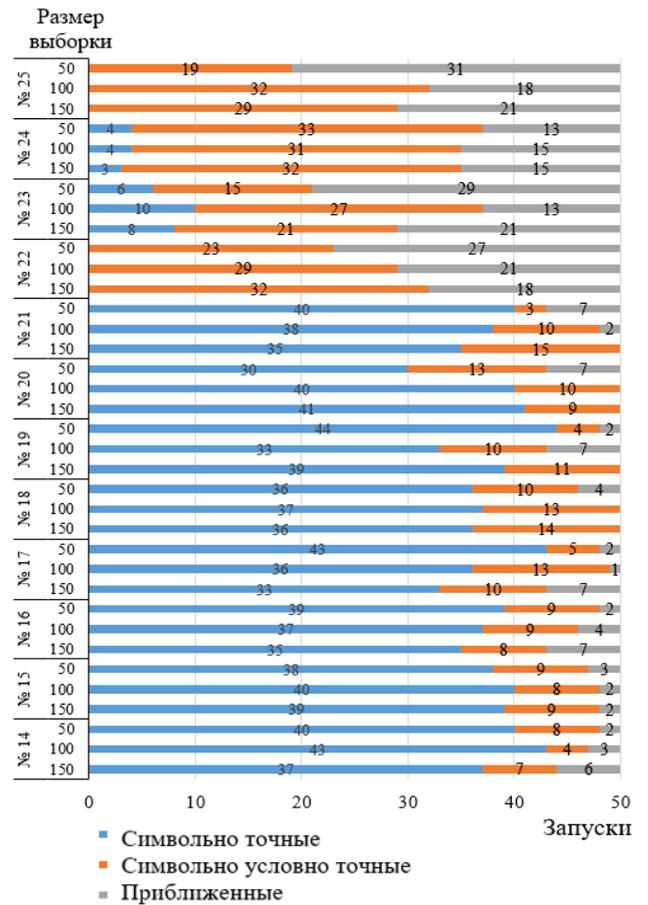
Таблица 3.7 – Результаты тестирования эволюционных подходов к идентификации динамических систем

Особенности задач (наибольший порядок производной)	Объем данных (точек выборки)								
	150			100			50		
	Шум, %								
	0	5	10	0	5	10	0	5	10
Ошибка модели в виде дифференциального уравнения									
y'	0	0,0002	0,0003	0	0,0003	0,0003	0,0001	0,0003	0,0004
y''	0,0002	0,0004	0,0005	0,0002	0,0005	0,0005	0,0003	0,0006	0,0007
$y''' - y^V$	0	0,0003	0,0005	0	0,0005	0,0005	0,0001	0,0007	0,0008
Несколько входов	0,003	0,0047	0,0052	0,0042	0,0059	0,0071	0,0065	0,0097	0,0125
Ошибка модели в виде системы дифференциальных уравнений									
y'	0,0106	0,0162	0,0213	0,0121	0,0197	0,0675	0,0166	0,0239	0,026
y''	0,0205	0,022	0,0275	0,021	0,0235	0,028	0,02	0,0235	0,028
Ошибка решения задачи Коши									
$y' - y''$	0	0,0001	0,0001	0	0,0001	0,0002	0,0001	0,0002	0,0002

На Рисунках 3.3-3.5 представлены результаты исследования символической точности моделей в виде дифференциальных уравнений, на Рисунке 3.6 приводится принадлежность к классам для моделей в виде систем дифференциальных уравнений и на Рисунке 3.7 – для решений задачи Коши.

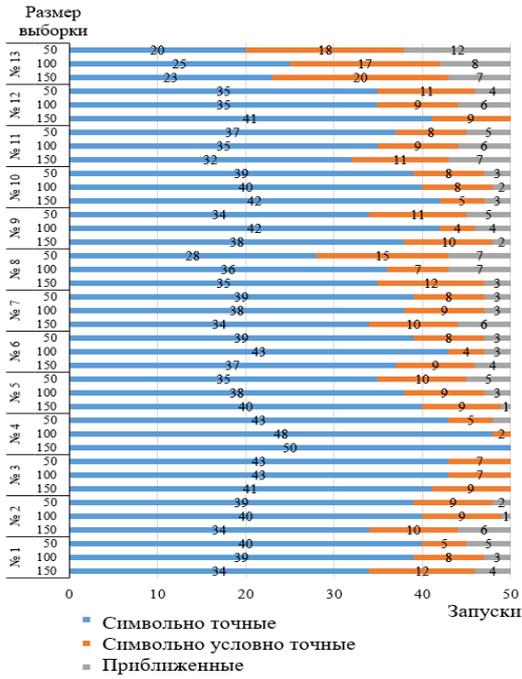


а)

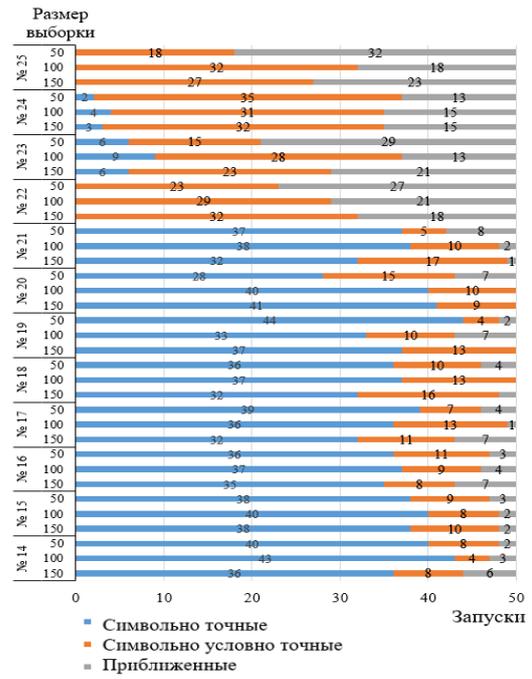


б)

Рисунок 3.3 – Символическая точность полученных дифференциальных уравнений (данные без шума): а) Задачи 1-13; б) Задачи 14-25

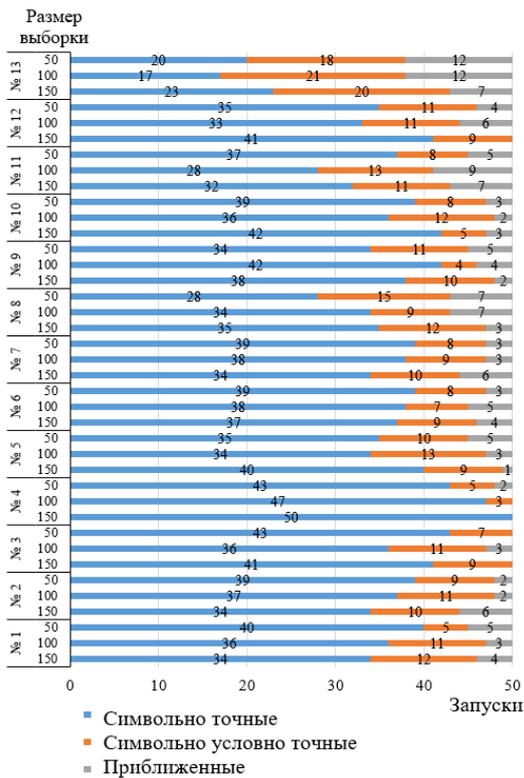


а)

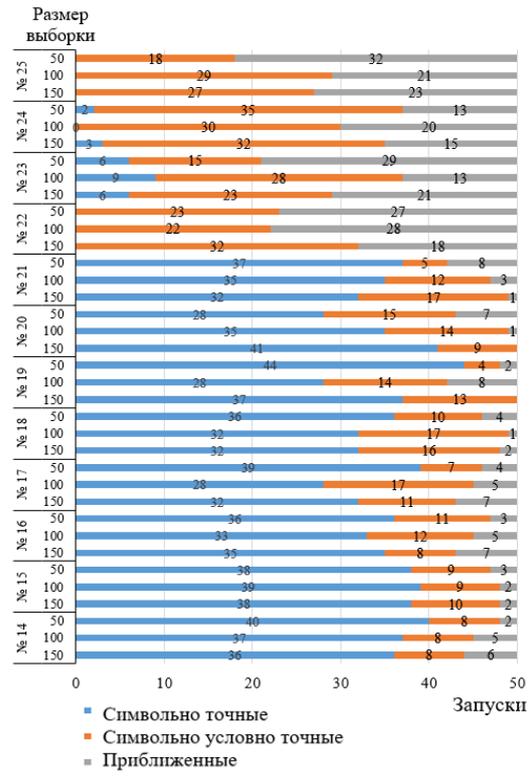


б)

Рисунок 3.4 – Символьная точность полученных дифференциальных уравнений (шум 5%): (а) Задачи 1-13; (б) Задачи 14-25

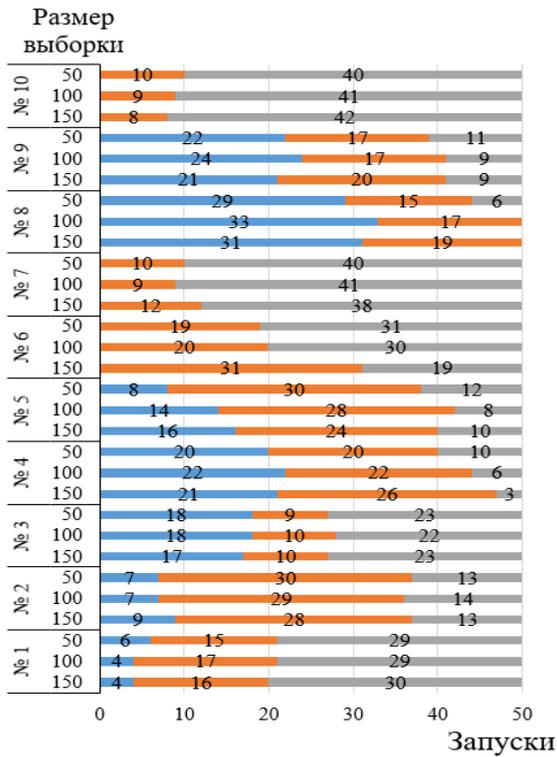


а)



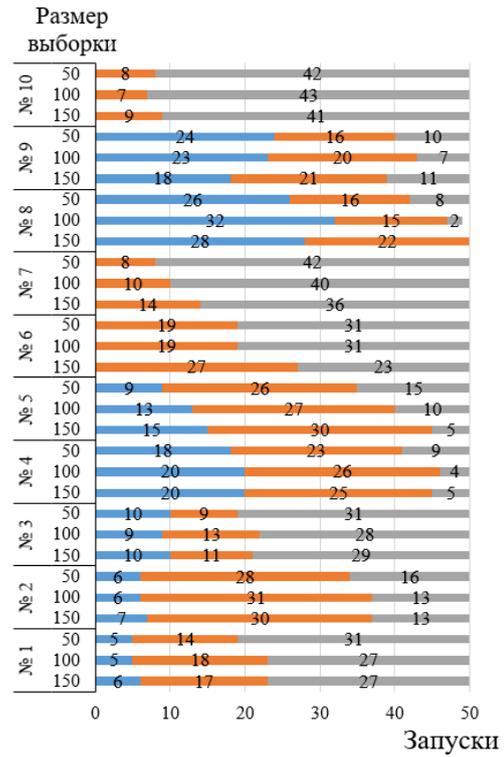
б)

Рисунок 3.5 – Символьная точность полученных дифференциальных уравнений (шум 10%): а) Задачи 1-13; б) Задачи 14-25



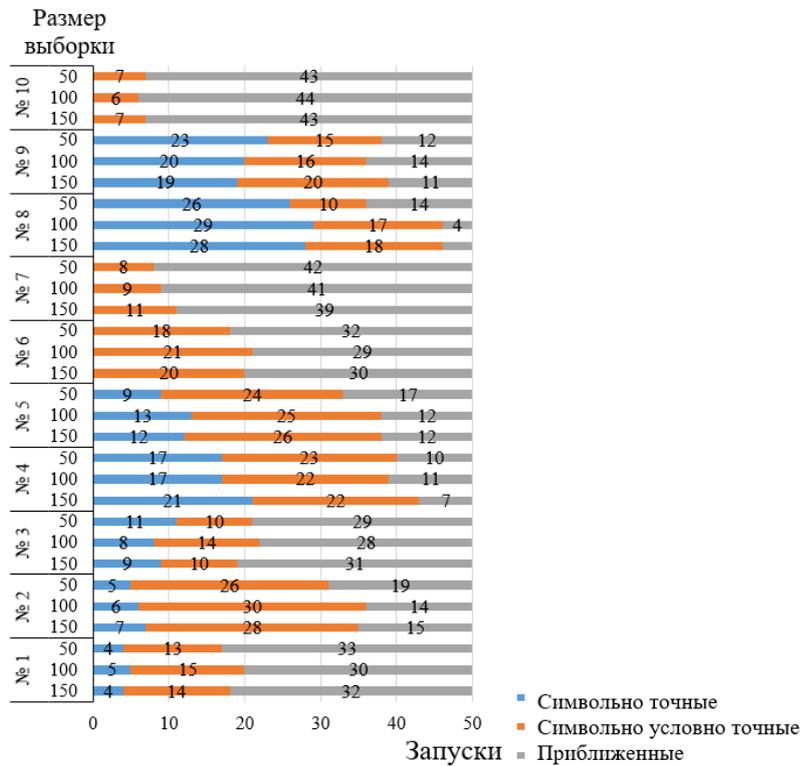
- Символьно точные
- Символьно условно точные
- Приблизженные

а)



- Символьно точные
- Символьно условно точные
- Приблизженные

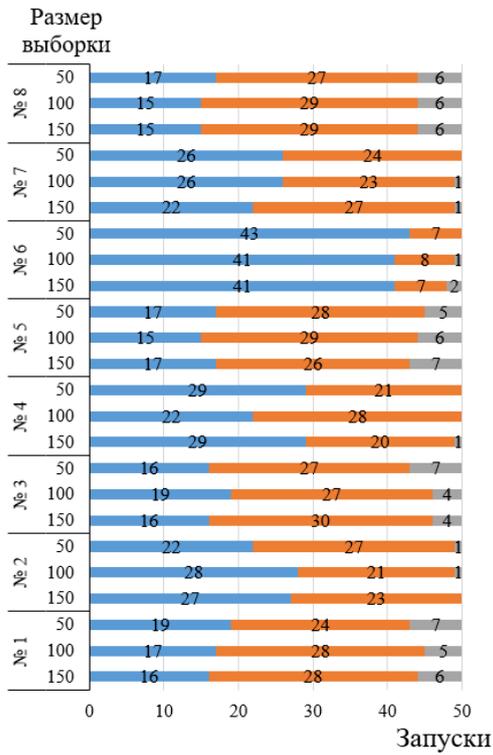
б)



- Символьно точные
- Символьно условно точные
- Приблизженные

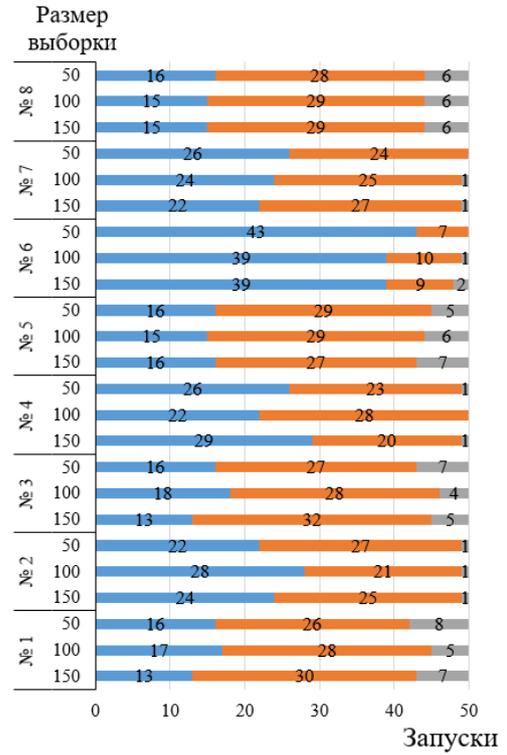
в)

Рисунок 3.6 – Символьная точность полученных систем дифференциальных уравнений: а) Шум 0; б) Шум 5%; в) Шум 10%



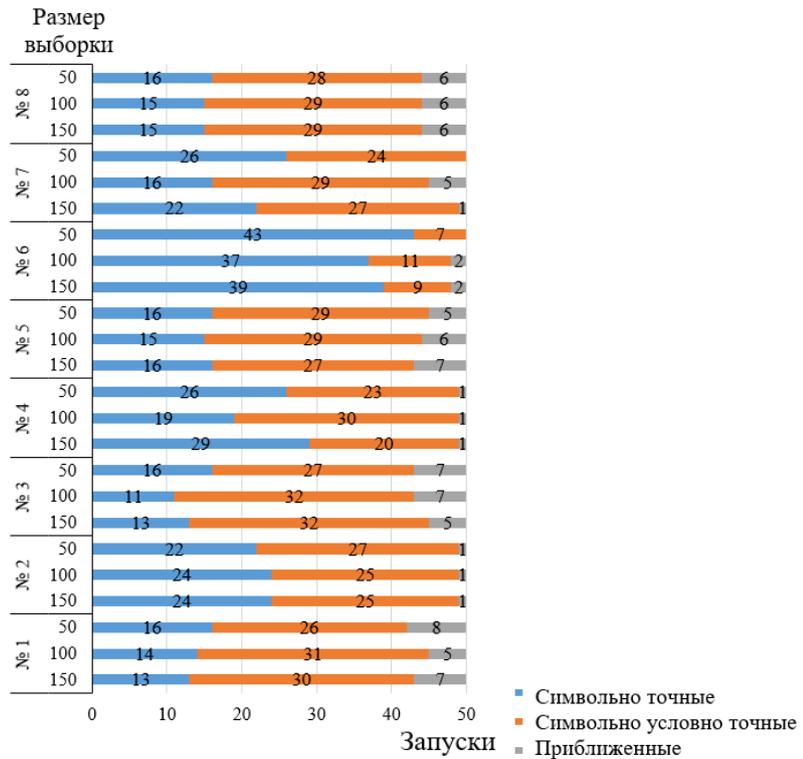
- Символьно точные
- Символьно условно точные
- Приближенные

а)



- Символьно точные
- Символьно условно точные
- Приближенные

б)



- Символьно точные
- Символьно условно точные
- Приближенные

в)

Рисунок 3.7 – Символьная точность полученных решений задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений: а) Шум 0; б) Шум 5%; в) Шум 10%

При исследовании на символьную точность моделей, полученных предложенными эволюционными подходами, на тестовых задачах было установлено, что объем выборки и уровень шума в данных не влияют на символьную точность получаемых решений.

Для доказательства эффективности предложенных подходов к идентификации динамических объектов в виде дифференциальных уравнений и их систем проведено сравнение ошибки полученных решений со значениями ошибки моделей, полученных с помощью рекуррентной нейронной сети, и непараметрической ядерной оценкой регрессии.

Для сравнения использованы рекуррентные нейронные сети, реализованные в библиотеке TensorFlow на Python [102]. Для нейронной сети установили следующие параметры: размер батча – 256; размер буфера – 10000 [103]. Нейронная сеть состоит из четырех слоев: входной слой, содержит количество нейронов по количеству параметров задачи умноженному на количество значений выборки, которые использовались как серия событий во времени; второй слой состоит из 32 нейронов с активационной функцией тангенс и обратной активационной функцией сигмоид; третий слой состоит из 16 нейронов с активационной функцией линейный выпрямитель и обратной активационной функцией сигмоид; выходной слой имеет количество нейронов по количеству предсказуемых значений целевых переменных умноженное на количество таких переменных [104]. В процессе обучения выполнялось 10 эпох с шагом 256 105. Данные параметры выбраны исходя из анализа существующего опыта решения задач специалистами.

В непараметрической ядерной оценке регрессии используется Гауссова колоколообразная функция. Коэффициент размытости настраивался отдельно для каждой задачи [106]. Для тестовых задач в качестве серии событий на вход алгоритмам подаются 10 объектов, а на выходе алгоритмы должны спрогнозировать 4 следующих значения целевых переменных [107]. Представлена оценка следующим образом:

$$y_s = \frac{\sum_{i=1}^{s-1} y_i \prod_{j=1}^m \Phi(x_s, x_i, c)}{\sum_{i=1}^{s-1} \prod_{j=1}^m \Phi(x_s, x_i, c)}, \quad (3.6)$$

$$\Phi(x, x_i, c) = 0.335 - 0.067 \left(\frac{x - x_i}{c} \right)^2. \quad (3.7)$$

Результаты сравнения ошибок моделей, полученных разными подходами, представлены в Таблице 3.8.

Таблица 3.8 – Значения ошибки моделей, полученных различными подходами к идентификации динамических систем

Особенности задач (максимальный порядок производной)	Предложенный эволюционный подход	Рекуррентная нейронная сеть	Непараметрическая ядерная оценка регрессии
Модели в виде дифференциального уравнения			
y'	0,0001	0,1189	0,0633
y''	0,0001	0,133	0,1012
$y''' - y^V$	0	0,1681	0,0534
Несколько входов	0,0034	0,21	0,1453
Модели в виде системы дифференциальных уравнений			
y'	0,017	0,1821	0,0636
y''	0,0136	0,0595	0,0309

Согласно данным, представленным в Таблице 3.8, можно утверждать, что предложенные эволюционные подходы структурно-параметрической идентификации позволили получить модели с меньшей ошибкой на исследуемых задачах чем модели, полученные рекуррентной нейронной сетью и непараметрической ядерной оценкой регрессии. Кроме того, и рекуррентная нейронная сеть, и непараметрическая ядерная оценка регрессии получают модели, являющиеся черным ящиком.

3.2 Исследование эффективности эволюционных подходов к идентификации динамических систем при различных входных воздействиях

Далее рассматривается возможность идентификации динамических объектов в виде дифференциального уравнения при нетривиальных входных воздействиях.

Для исследования возможностей применения подходов к идентификации динамических объектов было проведено тестирование при воздействии на объект следующих входных воздействий $u=u(t)$ (Рисунки 3.8-3.10) [108].

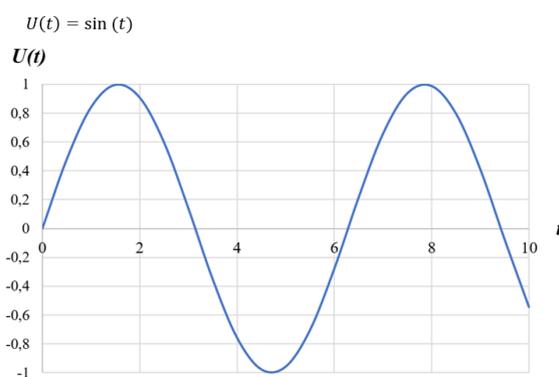


Рисунок 3.8 – График первого входного воздействия

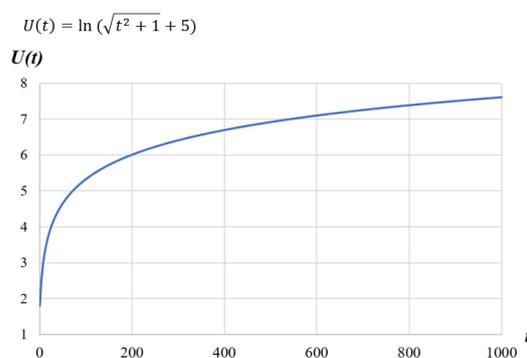


Рисунок 3.9 – График второго входного воздействия

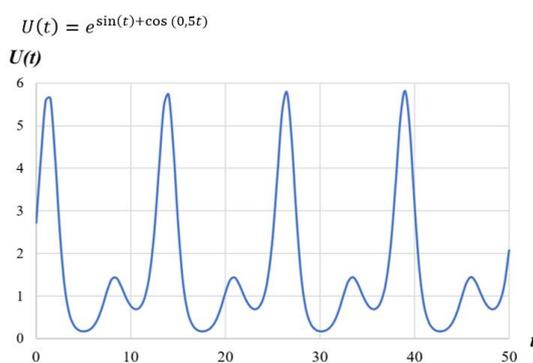


Рисунок 3.10 – График третьего входного воздействия

Данные с разным уровнем шума (0, 5%, 10%) генерировались на основе каждого объекта, представленного либо дифференциальным уравнением (Таблица 3.9), либо системой дифференциальных уравнений (Таблица 3.11) и указанных выше входных воздействий. Объем выборки для каждого набора составлял 50 точек. Таким образом, для каждой системы было задано 9 наборов данных. Кроме того, для каждого набора было проведено по 30 запусков. В Таблицах 3.10 и 3.12 представлены значения ошибок для заданных условий, усредненные по 30 запускам.

Для исследования эффективности подхода к идентификации в виде дифференциальных уравнений были использованы следующие задачи (Таблица 3.9):

Таблица 3.9 – Дифференциальные уравнения для исследования подхода к идентификации при различных входных воздействиях

№	Дифференциальное уравнение
1	$y' = -\frac{y \ln y}{u}$
2	$y' = -\frac{uy}{u+1}$
3	$y' = \frac{1}{\cos(u)} - y \frac{\sin(u)}{\cos(u)}$
4	$y'' = -2y' - 2y + 2u^2 + 8u + 6$
5	$y'' = -\frac{(y')^2}{1+u^2}$
6	$y''' = e^{2u}$
7	$y''' = \frac{6}{u^3}$
8	$y''' = -y' + \frac{1}{\cos(u)}$
9	$y^{IV} = -4y''' - 4y'' + u - u^2$
10	$y^{IV} = 2e^u - y''$

Результаты представлены в Таблице 3.10:

Таблица 3.10 – Результаты тестирования подхода к идентификации в виде дифференциальных уравнений при различных входных воздействиях

№	Входное воздействие	Ошибка		
		Шум 0	Шум 5%	Шум10%
1	$u(t) = \sin(t)$	0,0001	0,0001	0,0002
	$u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$	0	0,0002	0,0002
	$u(t) = e^{\sin(t)+\cos(0.5t)}$	0,0002	0,0003	0,0004
2	$u(t) = \sin(t)$	0,0021	0,0028	0,0029
	$u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$	0	0,0002	0,0003
	$u(t) = e^{\sin(t)+\cos(0.5t)}$	0	0,0001	0,0002
3	$u(t) = \sin(t)$	0,0073	0,0076	0,0079
	$u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$	0,0061	0,0059	0,0062
	$u(t) = e^{\sin(t)+\cos(0.5t)}$	0,021	0,026	0,028
4	$u(t) = \sin(t)$	0,0017	0,0019	0,0018
	$u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$	0,0034	0,0041	0,0039
	$u(t) = e^{\sin(t)+\cos(0.5t)}$	0,0025	0,0026	0,0032
5	$u(t) = \sin(t)$	0,0018	0,0019	0,0022
	$u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$	0,0008	0,0009	0,0013
	$u(t) = e^{\sin(t)+\cos(0.5t)}$	0,0009	0,0008	0,0012
6	$u(t) = \sin(t)$	0,001	0,0013	0,0014
	$u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$	0,0017	0,0021	0,0019
	$u(t) = e^{\sin(t)+\cos(0.5t)}$	0	0,0002	0,0002
7	$u(t) = \sin(t)$	0,0008	0,0008	0,0009
	$u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$	0,0001	0,0002	0,0003
	$u(t) = e^{\sin(t)+\cos(0.5t)}$	0	0,0001	0,0002
8	$u(t) = \sin(t)$	0,004	0,0044	0,0048
	$u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$	0	0,0001	0,0003
	$u(t) = e^{\sin(t)+\cos(0.5t)}$	0,0131	0,0138	0,014
9	$u(t) = \sin(t)$	0,0002	0,0003	0,0003
	$u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$	0	0,0002	0,0005
	$u(t) = e^{\sin(t)+\cos(0.5t)}$	0,0007	0,0008	0,0009
10	$u(t) = \sin(t)$	0,0001	0,0003	0,0011
	$u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$	0	0,0001	0,0002
	$u(t) = e^{\sin(t)+\cos(0.5t)}$	0	0,0002	0,0003

Далее представлены Рисунки 3.11-3.39, демонстрирующие эффективность разработанного эволюционного подхода к идентификации объектов в виде дифференциальных уравнений. На графиках зеленым цветом обозначен выход объекта (выборочные значения), а красным цветом – выход модели (графики, построены по данным без шума).

Объект 1:
$$y' = -\frac{y \ln y}{u}$$

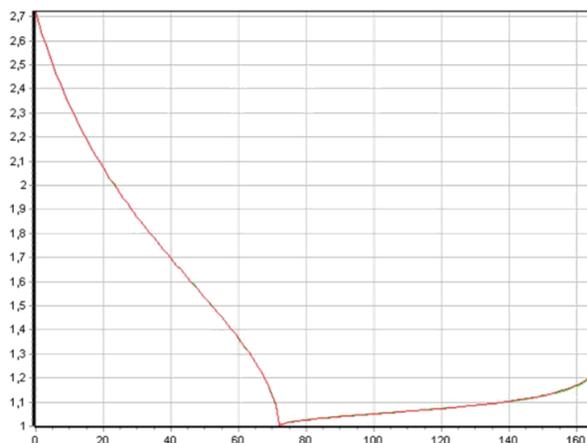


Рисунок 3.11 – Реакция объекта 1 на входное воздействие $u(t) = \sin(t)$

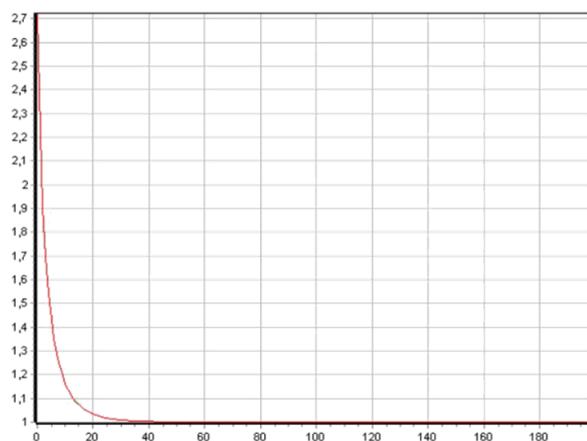


Рисунок 3.12 – Реакция объекта 1 на входное воздействие $u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$

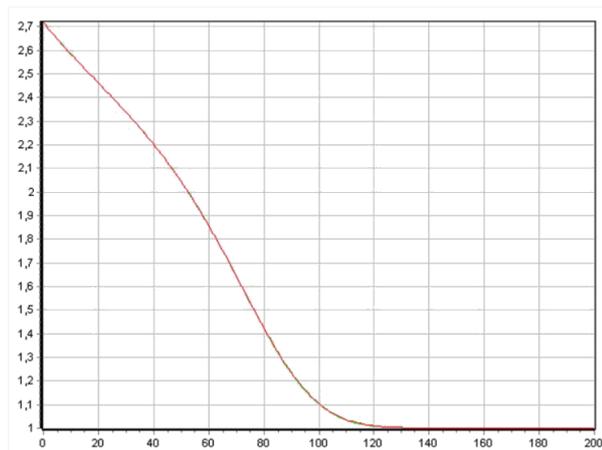


Рисунок 3.13 – Реакция объекта 1 на входное воздействие $u(t) = e^{\sin(t)+\cos(0,5t)}$

Объект 2:
$$y' = -\frac{uy}{u+1}$$

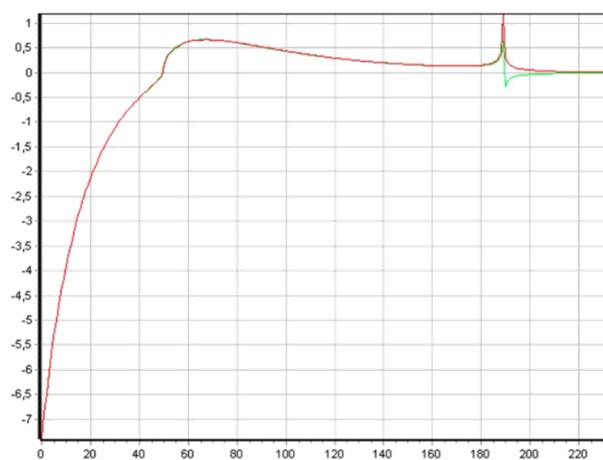


Рисунок 3.14 – Реакция объекта 2 на входное воздействие $u(t) = \sin(t)$

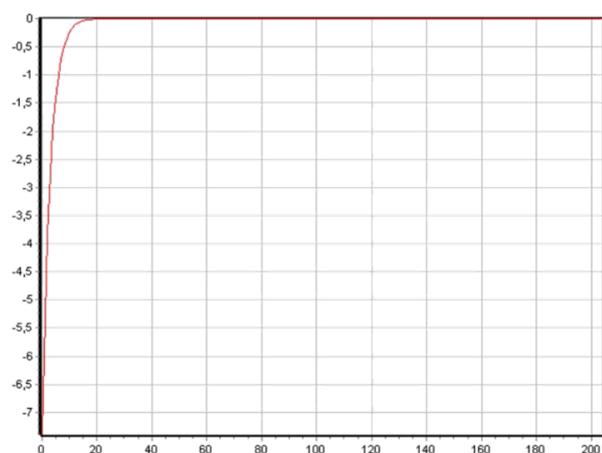


Рисунок 3.15 – Реакция объекта 2 на входное воздействие $u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$

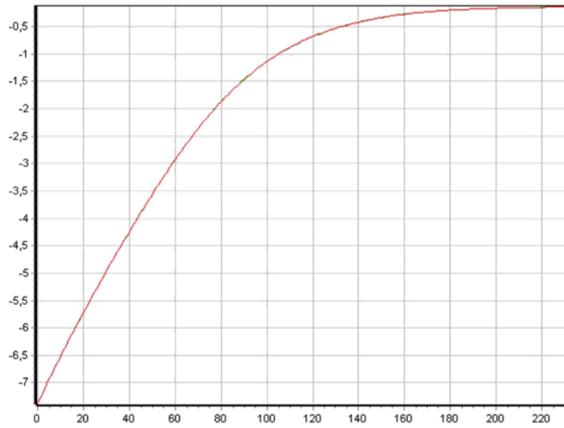


Рисунок 3.16 – Реакция объекта 2 на входное воздействие $u(t) = e^{\sin(t)+\cos(0,5t)}$

Объект 3:
$$y' = \frac{1}{\cos(u)} - y \frac{\sin(u)}{\cos(u)}$$

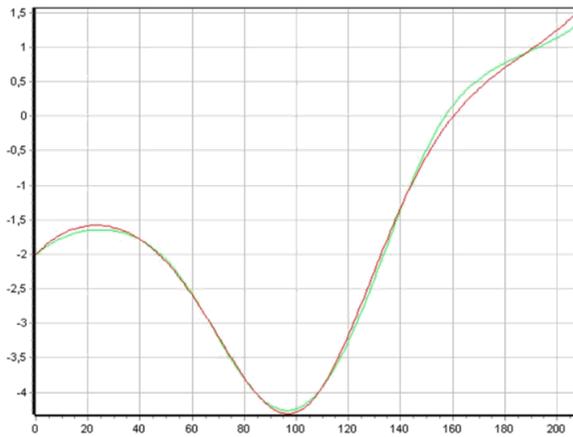


Рисунок 3.17 – Реакция объекта 3 на входное воздействие $u(t) = \sin(t)$



Рисунок 3.18 – Реакция объекта 3 на входное воздействие $u(t) = \ln(\sqrt{t^2+1}+5)$

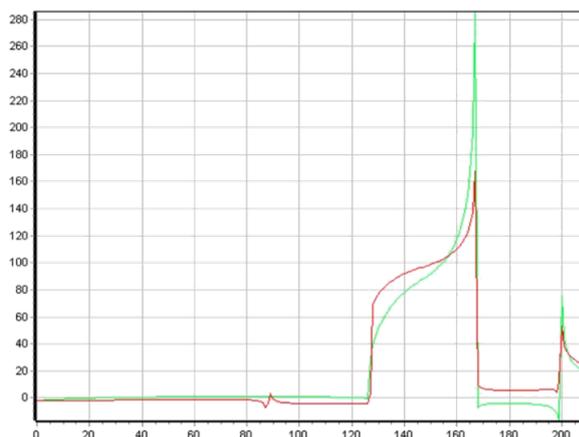


Рисунок 3.19 – Реакция объекта 3 на входное воздействие $u(t) = e^{\sin(t)+\cos(0,5t)}$

Объект 4: $y'' = -2y' - 2y + 2x^2 + 8x + 6.$

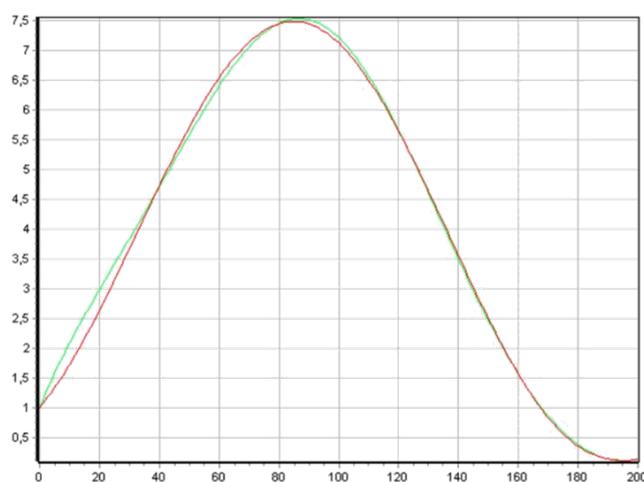


Рисунок 3.20 – Реакция объекта 4 на входное воздействие $u(t) = \sin(t)$

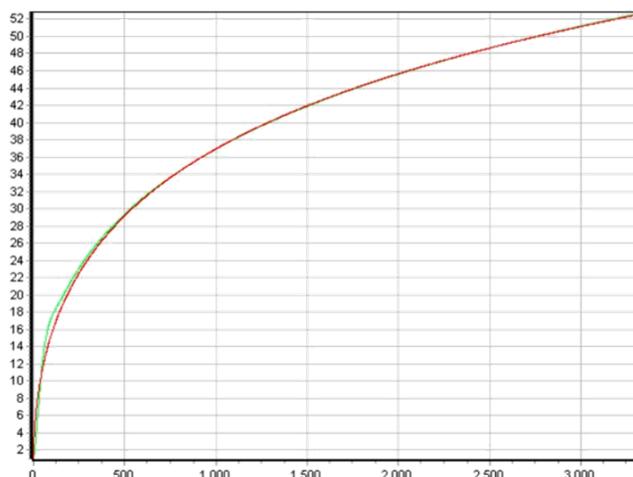


Рисунок 3.21 – Реакция объекта 4 на входное воздействие $u(t) = \ln(\sqrt{t^2+1}+5)$

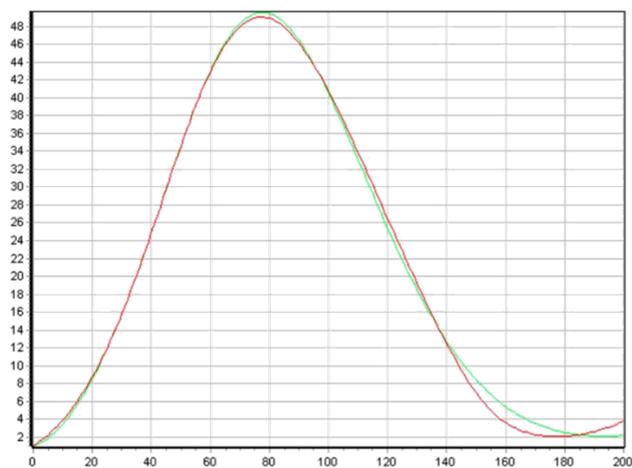


Рисунок 3.22 – Реакция объекта 4 на входное воздействие $u(t) = e^{\sin(t)+\cos(0,5t)}$

Объект 5:
$$y'' = -\frac{(y')^2}{1+x^2}.$$

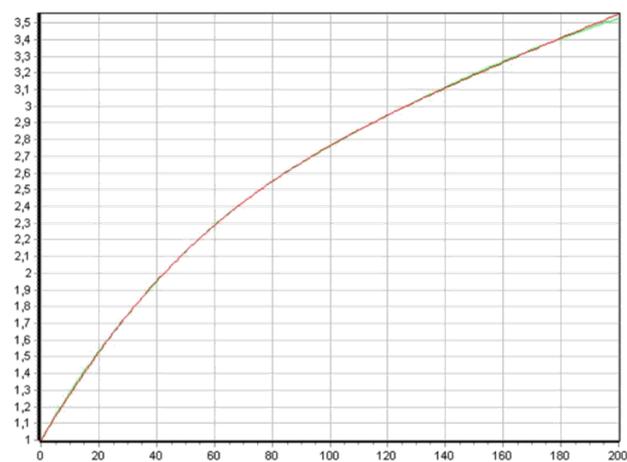


Рисунок 3.23 – Реакция объекта 5 на входное воздействие $u(t) = \sin(t)$

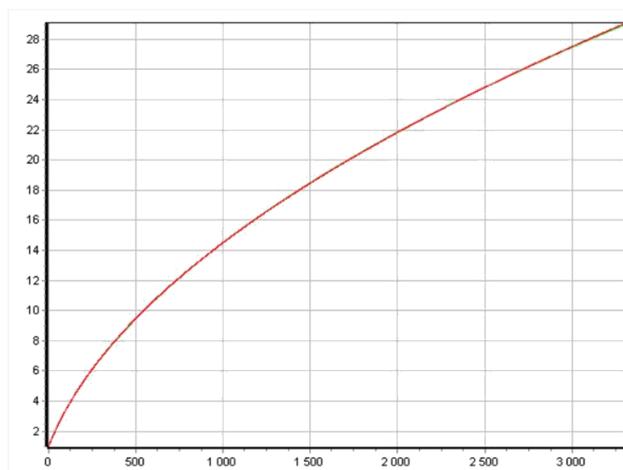


Рисунок 3.24 – Реакция объекта 5 на входное воздействие $u(t) = \ln(\sqrt{t^2+1}+5)$

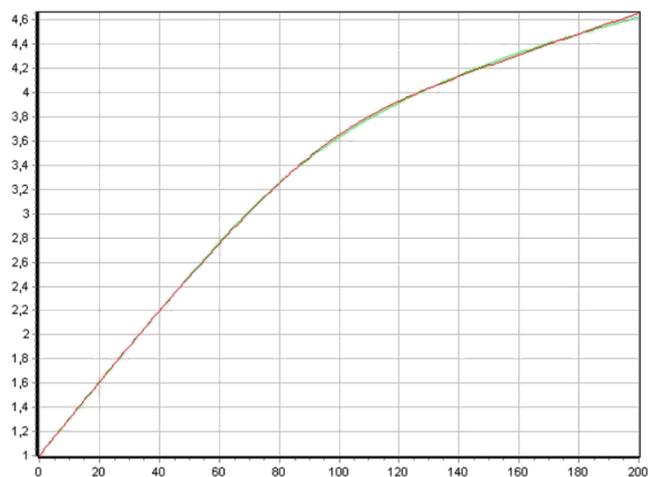


Рисунок 3.25 – Реакция объекта 5 на входное воздействие $u(t) = e^{\sin(t)+\cos(0,5t)}$

Объект 6: $y''' = e^{2x}$.

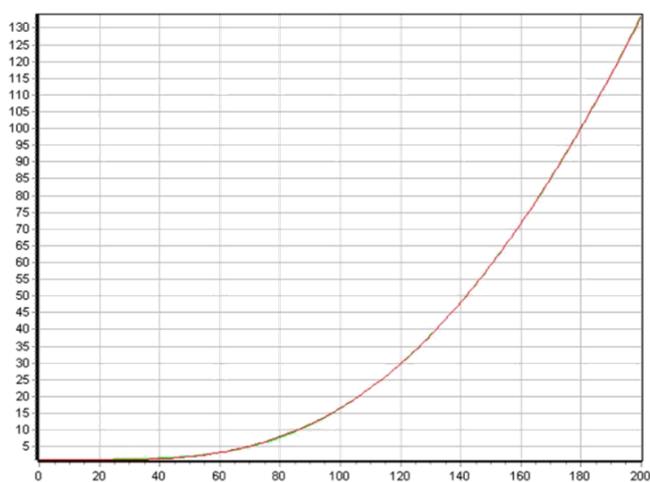


Рисунок 3.26 Реакция объекта 6 на входное воздействие $u(t) = \sin(t)$

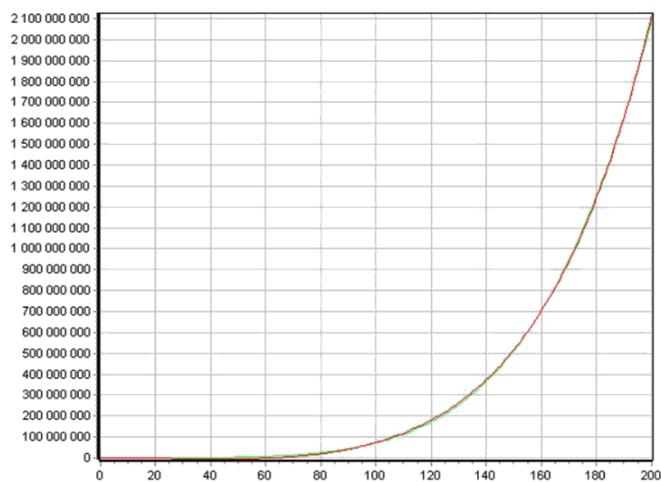


Рисунок 3.27 – Реакция объекта 6 на входное воздействие $u(t) = \ln(\sqrt{t^2+1}+5)$

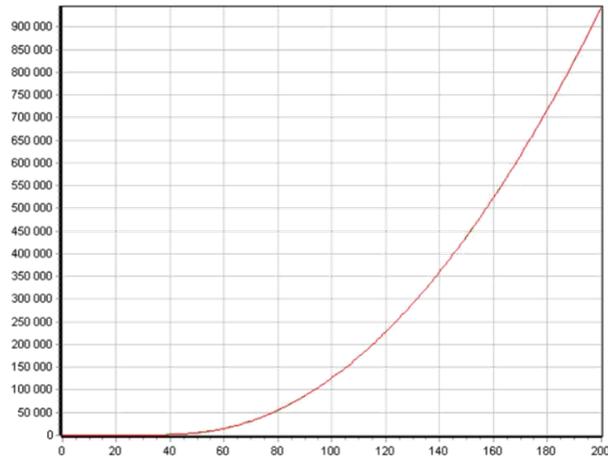


Рисунок 3.28 – Реакция объекта 6 на входное воздействие $u(t) = e^{\sin(t)+\cos(0,5t)}$

Объект 7: $y''' = \frac{6}{x^3}$.

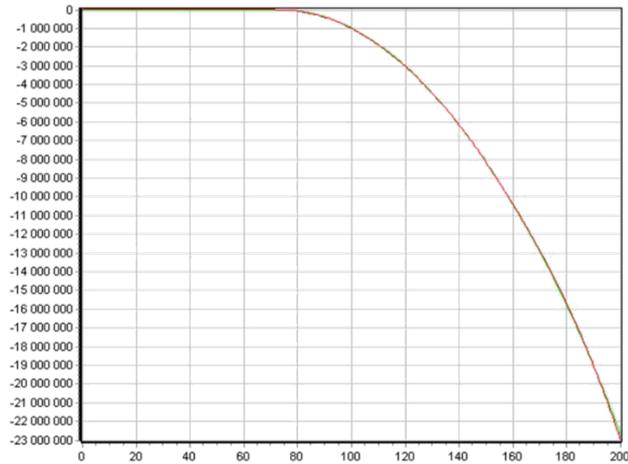


Рисунок 3.29 – Реакция объекта 7 на входное воздействие $u(t) = \sin(t)$

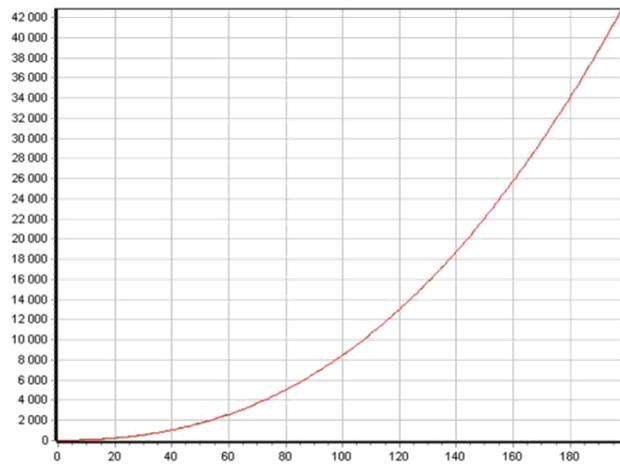


Рисунок 3.30 – Реакция объекта 7 на входное воздействие $u(t) = \ln(\sqrt{t^2+1}+5)$

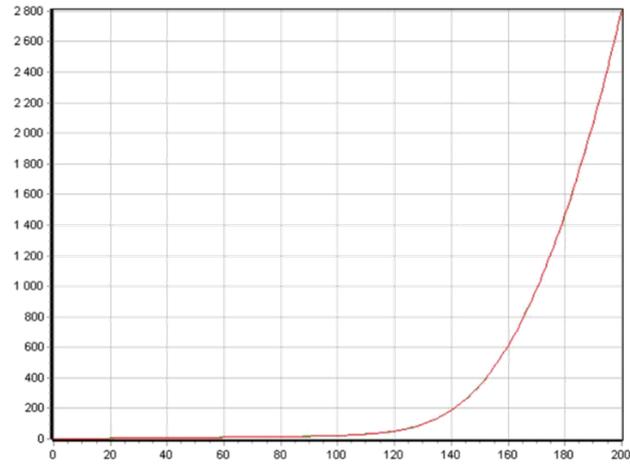


Рисунок 3.31 – Реакция объекта 7 на входное воздействие $u(t) = e^{\sin(t)+\cos(0,5t)}$

Объект 8:
$$y''' = -y' + \frac{1}{\cos(x)}$$

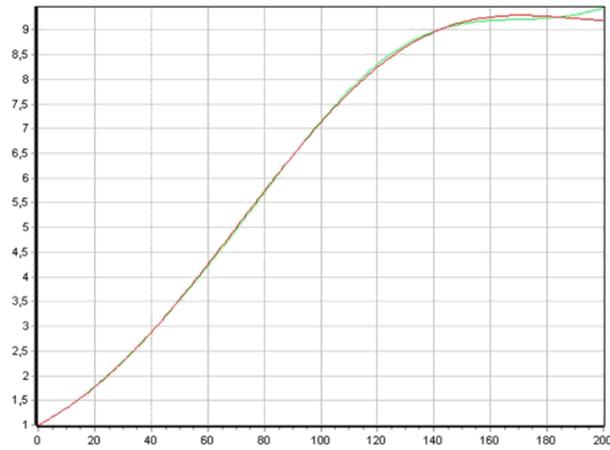


Рисунок 3.32 – Реакция объекта 8 на входное воздействие $u(t) = \sin(t)$

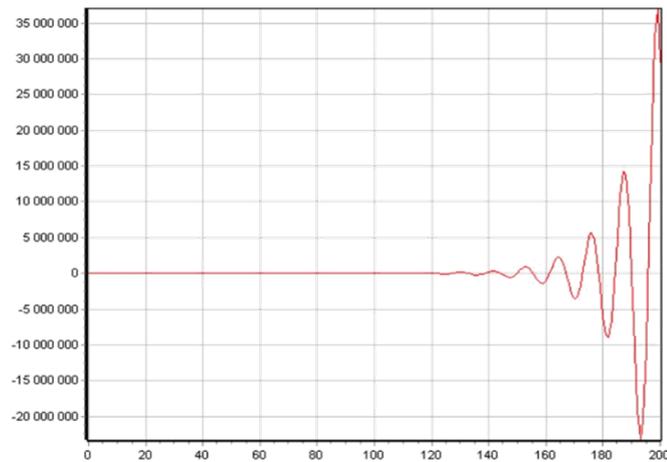


Рисунок 3.33 – Реакция объекта 8 на входное воздействие $u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$

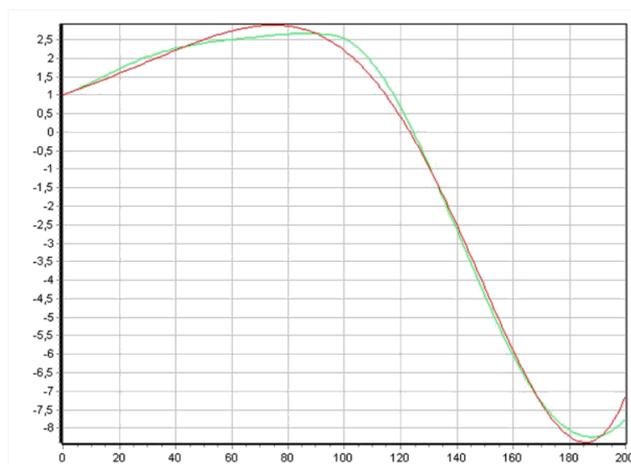


Рисунок 3.34 – Реакция объекта 8 на входное воздействие $u(t) = e^{\sin(t)+\cos(0,5t)}$

Объект 9: $y^{IV} = -4y''' - 4y'' + x - x^2$.

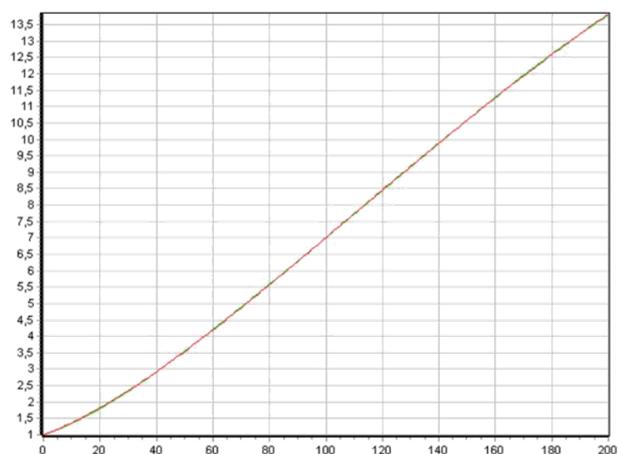


Рисунок 3.35 – Реакция объекта 9 на входное воздействие $u(t) = \sin(t)$

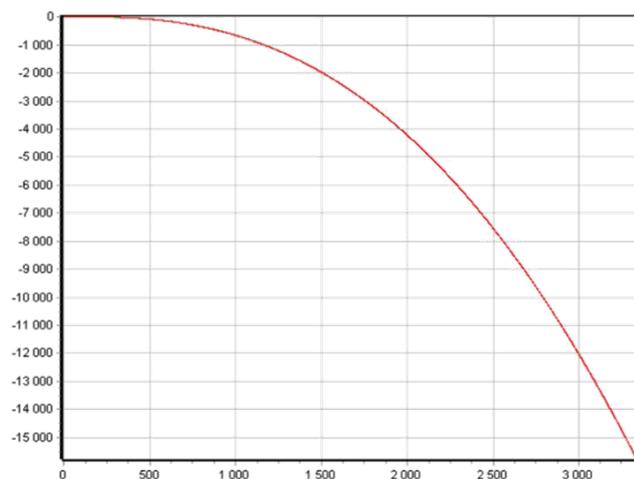


Рисунок 3.36 – Реакция объекта 9 на входное воздействие $u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$

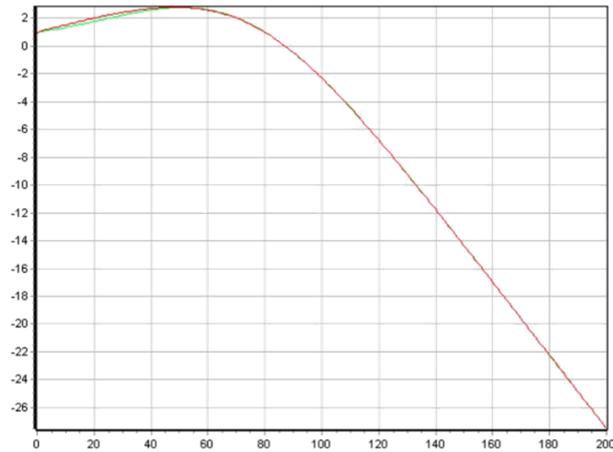


Рисунок 3.37 – Реакция объекта 9 на входное воздействие $u(t) = e^{\sin(t)+\cos(0,5t)}$

Объект 10: $y^{IV} = 2e^x - y''$

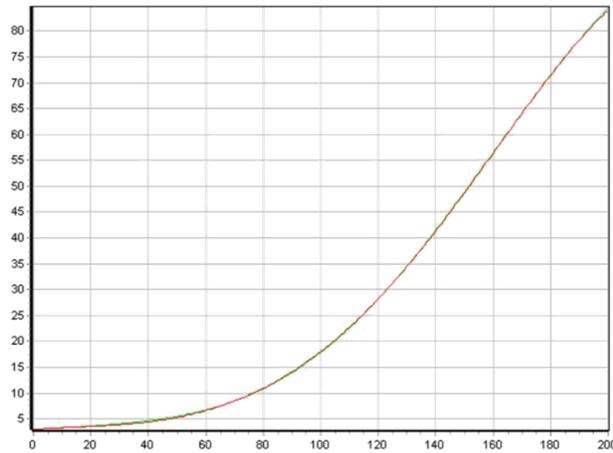


Рисунок 3.38 – Реакция объекта 10 на входное воздействие $u(t) = \sin(t)$

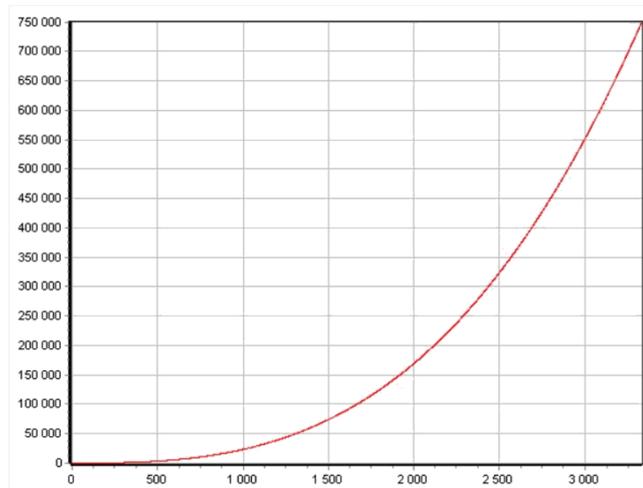


Рисунок 3.39 – Реакция объекта 10 на входное воздействие $u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$

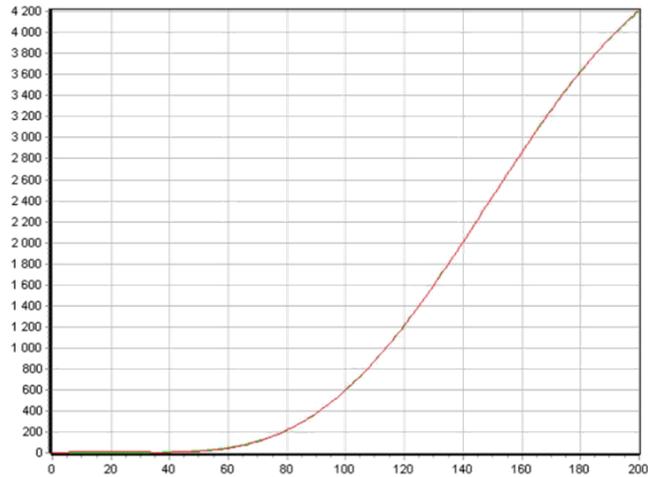


Рисунок 3.40 – Реакция объекта 10 на входное воздействие $u(t) = e^{\sin(t)+\cos(0,5t)}$

Далее проведем исследование эффективности разработанного эволюционного подхода к идентификации в виде системы дифференциальных уравнений. Для этого были определены следующие задачи (Таблица 3.11):

Таблица 3.11 – Системы дифференциальных уравнений для исследования подхода к идентификации при различных входных воздействиях

№ объекта	Система дифференциальных уравнений
11	$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 5y_2 + 3 \\ y_2' = 5y_1 - 6y_2 - 1 \end{cases}$
12	$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 3y_1 + ue^u \end{cases}$
13	$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' = 3y_1 - 2y_2 - 3y_3 + 2u \\ y_3' = 2y_3 - y_1 - y_2 - u^2 \end{cases}$
14	$\begin{cases} y_1'' = -uy_2 \\ y_2'' = y_2 - 2y_1' \end{cases}$
15	$\begin{cases} y_1'' = y_1' - y_2' + e^{-u} + \cos u \\ y_2'' = y_1' - y_2' - 2e^u - \sin u \end{cases}$

Результаты для объектов 11-15 представлены далее в Таблице 3.12:

Таблица 3.12 – Результаты тестирования подхода к идентификации в виде системы дифференциальных уравнений при различных входных воздействиях

№	Входное воздействие	Ошибка		
		Шум 0	Шум 5%	Шум10%
11	$u(t) = \sin(t)$	0.053	0.058	0.060
	$u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$	0.066	0.072	0.077
	$u(t) = e^{\sin(t) + \cos(0.5t)}$	0.099	0.104	0.107
12	$u(t) = \sin(t)$	0.043	0.042	0.044
	$u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$	0.001	0.001	0.001
	$u(t) = e^{\sin(t) + \cos(0.5t)}$	0.001	0.001	0.002
13	$u(t) = \sin(t)$	0.001	0.001	0.001
	$u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$	0.012	0.013	0.012
	$u(t) = e^{\sin(t) + \cos(0.5t)}$	0.001	0.002	0.002
14	$u(t) = \sin(t)$	0.026	0.022	0.024
	$u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$	0.002	0.002	0.003
	$u(t) = e^{\sin(t) + \cos(0.5t)}$	0.025	0.027	0.031
15	$u(t) = \sin(t)$	0.001	0.001	0.001
	$u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$	0.001	0.001	0.002
	$u(t) = e^{\sin(t) + \cos(0.5t)}$	0.001	0.001	0.001

На Рисунках 3.41-3.55 представлены графики соответствия полученных моделей исходным объектам. Зеленые и синие линии обозначают выходы исходных объектов, красные и желтые линии соответствуют выходам полученных моделей (если выходов больше двух, фиолетовые линии — выходы исходных объектов, а голубые линии — выходы полученных моделей). Возможно полное перекрытие линий с минимальной ошибкой модели.

Объект 11:
$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 5y_2 + 3 \\ y_2' = 5y_1 - 6y_2 - 1 \end{cases}$$

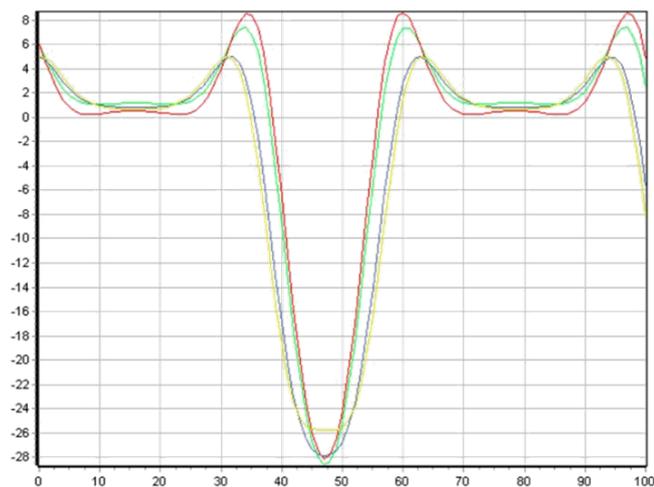


Рисунок 3.41 – Реакция объекта 11 на входное воздействие $u(t) = \sin(t)$

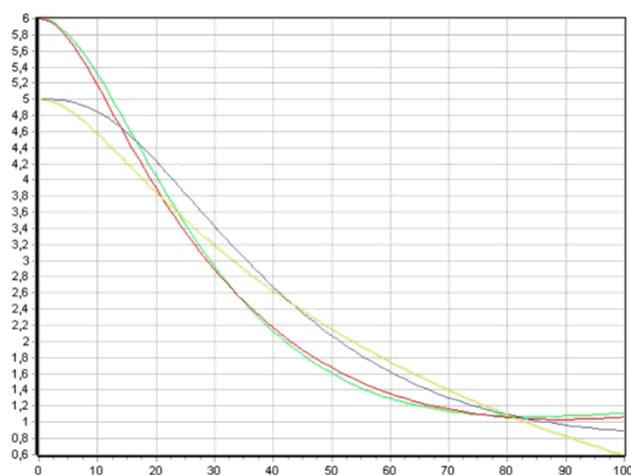


Рисунок 3.42 – Реакция объекта 11 на входное воздействие $u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$

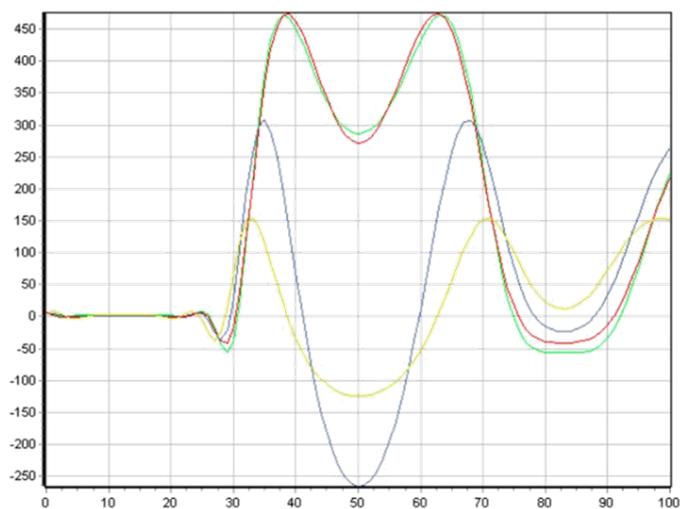


Рисунок 3.43 – Реакция объекта 11 на входное воздействие $u(t) = e^{\sin(t) + \cos(0,5t)}$

Объект 12:

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 3y_1 + ue^u \end{cases}$$

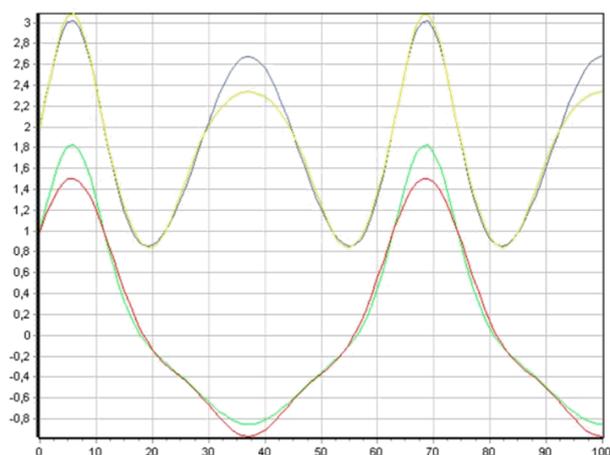


Рисунок 3.44 – Реакция объекта 12 на входное воздействие $u(t) = \sin(t)$

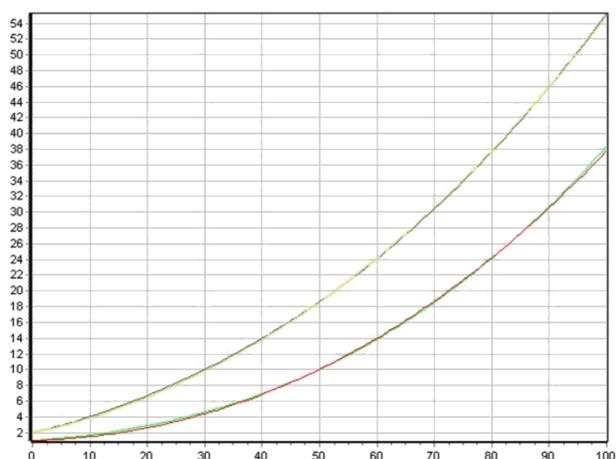


Рисунок 3.45 – Реакция объекта 12 на входное воздействие $u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$

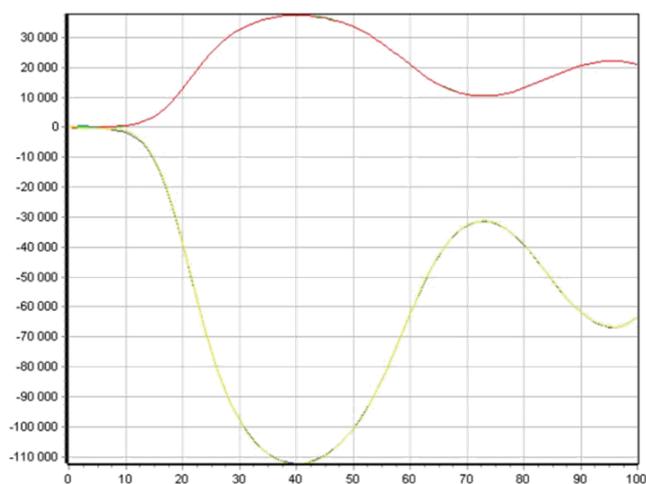


Рисунок 3.46 – Реакция объекта 12 на входное воздействие $u(t) = e^{\sin(t) + \cos(0.5t)}$

Объект 13:

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' = 3y_1 - 2y_2 - 3y_3 + 2u. \\ y_3' = 2y_3 - y_1 - y_2 - u^2 \end{cases}$$

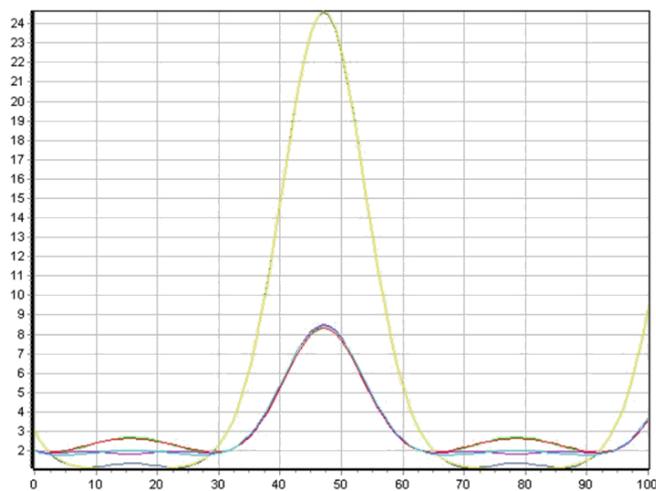


Рисунок 3.47 – Реакция объекта 13 на входное воздействие $u(t) = \sin(t)$

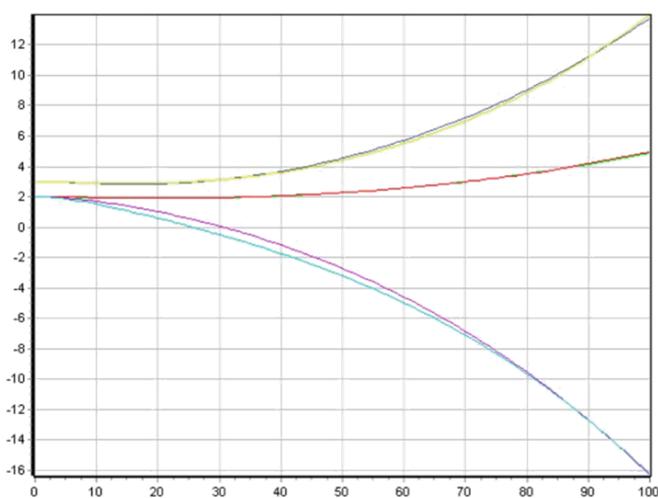


Рисунок 3.48 – Реакция объекта 13 на входное воздействие $u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$

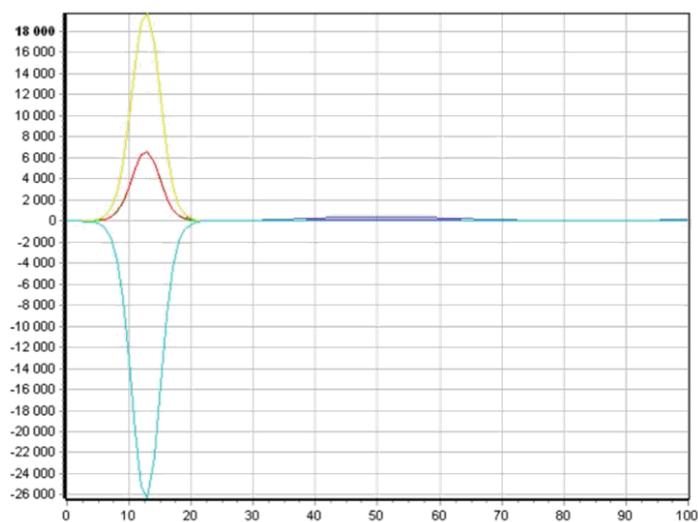


Рисунок 3.49 – Реакция объекта 13 на входное воздействие $u(t) = e^{\sin(t) + \cos(0.5t)}$

Объект 14:

$$\begin{cases} y_1'' = -uy_2 \\ y_2'' = y_2 - 2y_1' \end{cases}$$

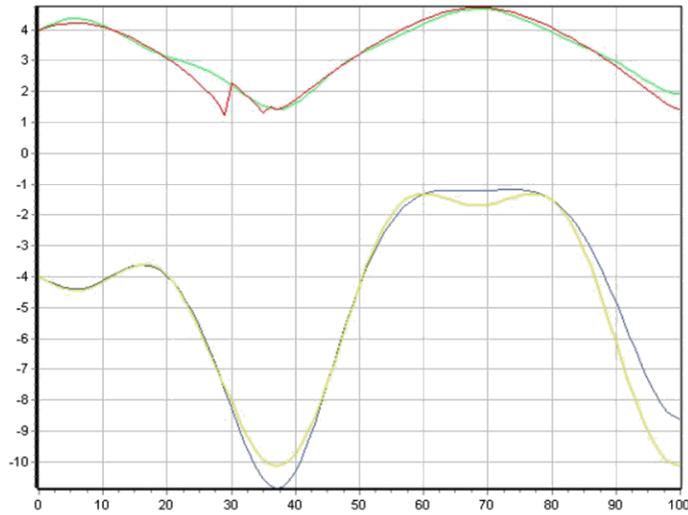


Рисунок 3.50 – Реакция объекта 14 на входное воздействие $u(t) = \sin(t)$

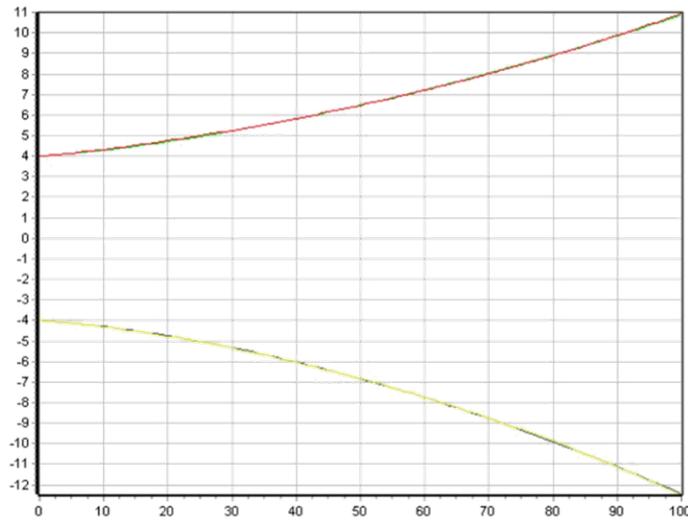


Рисунок 3.51 – Реакция объекта 14 на входное воздействие $u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$

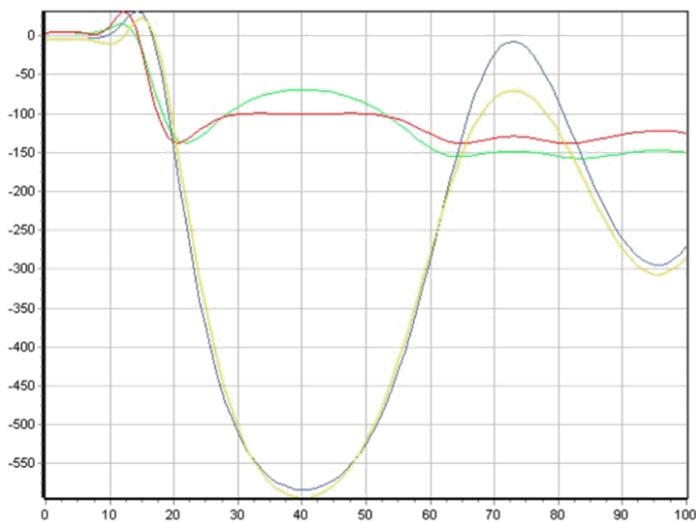


Рисунок 3.52 – Реакция объекта 14 на входное воздействие $u(t) = e^{\sin(t) + \cos(0.5t)}$

Объект 15:

$$\begin{cases} y_1'' = y_1' - y_2' + e^{-u} + \cos u \\ y_2'' = y_1' - y_2' - 2e^u - \sin u \end{cases}$$

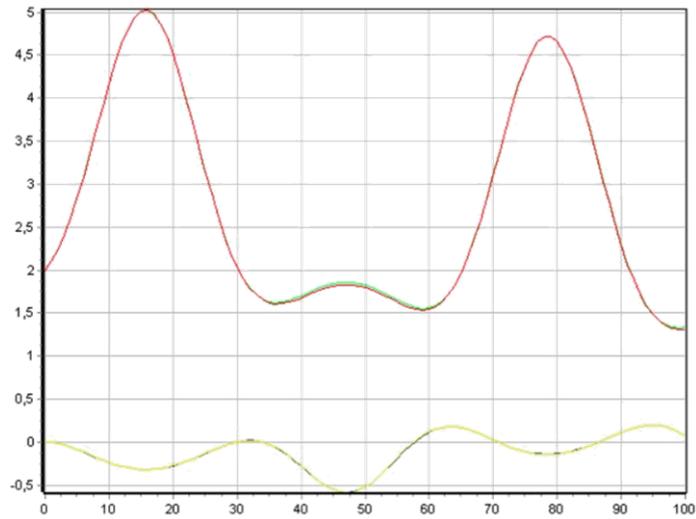


Рисунок 3.53 – Реакция объекта 15 на входное воздействие $u(t) = \sin(t)$

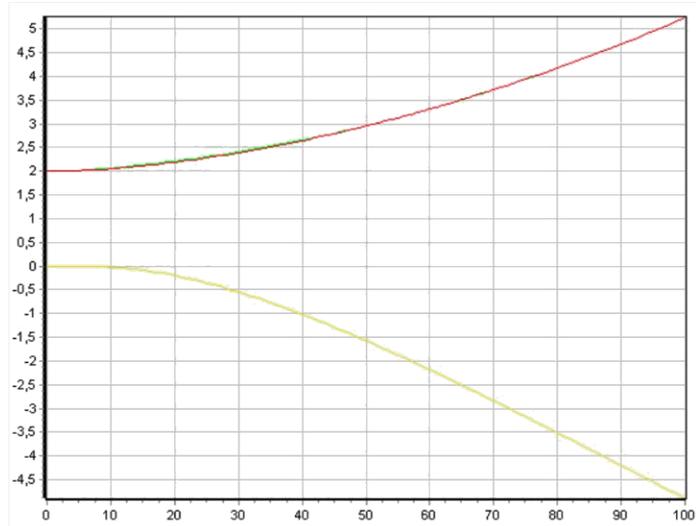


Рисунок 3.54 – Реакция объекта 15 на входное воздействие $u(t) = \ln(\sqrt{t^2 + 1} + 5)$

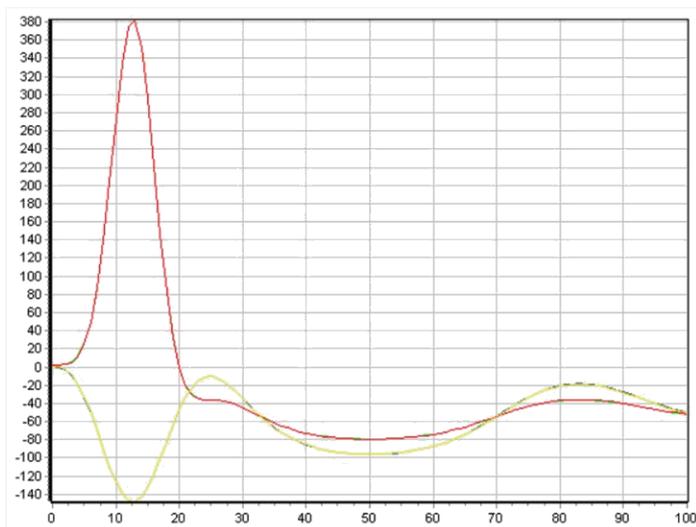


Рисунок 3.55 – Реакция объекта 15 на входное воздействие $u(t) = e^{\sin(t)+\cos(0,5t)}$

Проведено исследование качества идентификации при разных входных воздействиях. Объекты представлены дифференциальными уравнениями различных видов до четвертого порядка включительно и системами дифференциальных уравнений. Представленные рисунки демонстрируют соответствие полученных моделей точкам исходной выборки. Стоит отметить, что на большинстве рисунков наблюдается наложение графиков выходов исходного объекта с заданным управляющим воздействием и графиков, полученных по моделям.

3.3 Тестирование эволюционных подходов к идентификации динамических систем на задачах, описывающие практические примеры из различных областей

Следующим этапом исследования предложенных подходов стало их тестирование на данных, сгенерированных по реальным закономерностям из физики, биологии и экономики.

Задача 1. Модель естественного роста

В первой задаче проводится идентификация модели, выраженной дифференциальным уравнением естественного роста. Данное уравнение, предложенное Якобом Бернулли, в экономической теории применяется в задачах о долге, росте населения, инфляционных процессах. В текущей работе исходные данные были сгенерированы по следующим условиям. Пусть требуется в условиях ненасыщенности рынка построить модель изменения объема производства с течением времени при норме инвестиций $m=0,6$, продажной цене $p=0,15$ денежных единиц, коэффициенте пропорциональности между величиной инвестиции и скоростью выпуска продукции $l=0,4$, а в начальный момент времени объем производства составил 24 денежных единиц [109].

Исходя из того, что задано условие ненасыщенности рынка, доход к моменту времени t будет составлять $py(t)$. Полагая, что величина инвестиций $I(t)$ составляет фиксированную часть дохода, получаем $I(t) = mY(t) = mpy(t)$. Зная,

что $k = mpl$, приходим к уравнению $y' = ky(t) = mply(t)$. Таким образом, исходные данные генерируются по решению дифференциального уравнения:

$$y'(t) = 0,036y(t), y(0) = 24. \quad (3.8)$$

При поиске модели естественного роста эволюционный подход нашел дифференциальные уравнения символично совпадающие с известным истинным. Графики соответствия полученных моделей точкам исходных выборок для задачи 3 представлены на Рисунках 3.55-3.58.

y , объем производства

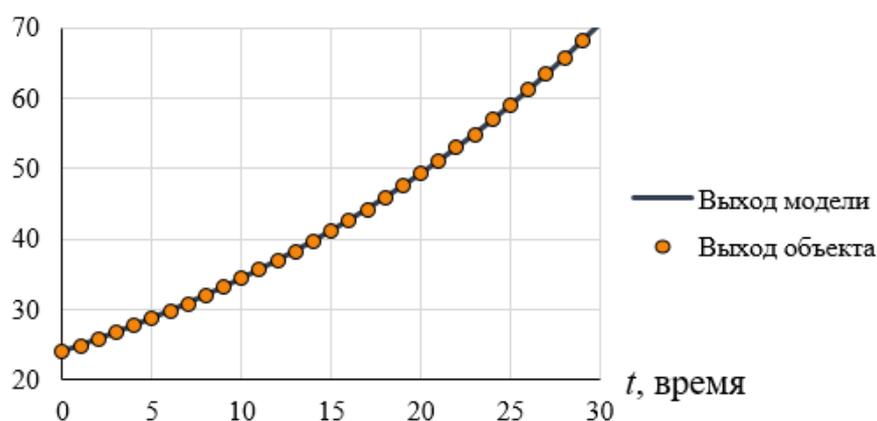


Рисунок 3.56 – Соответствие исходной выборки выводу полученной модели (задача 1, объем выборки 30, шум 0)

y , объем производства

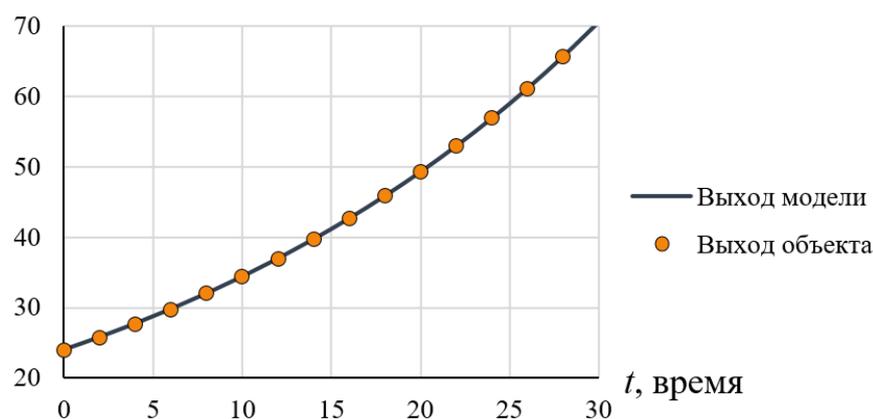


Рисунок 3.57 – Соответствие исходной выборки выводу полученной модели (задача 1, объем выборки 15, шум 0)

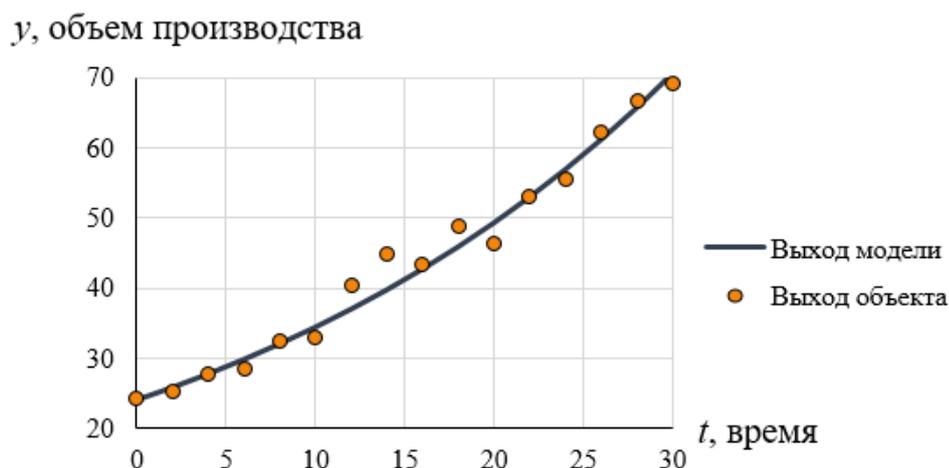


Рисунок 3.58 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели (задача 1, объем выборки 15, шум 5%)

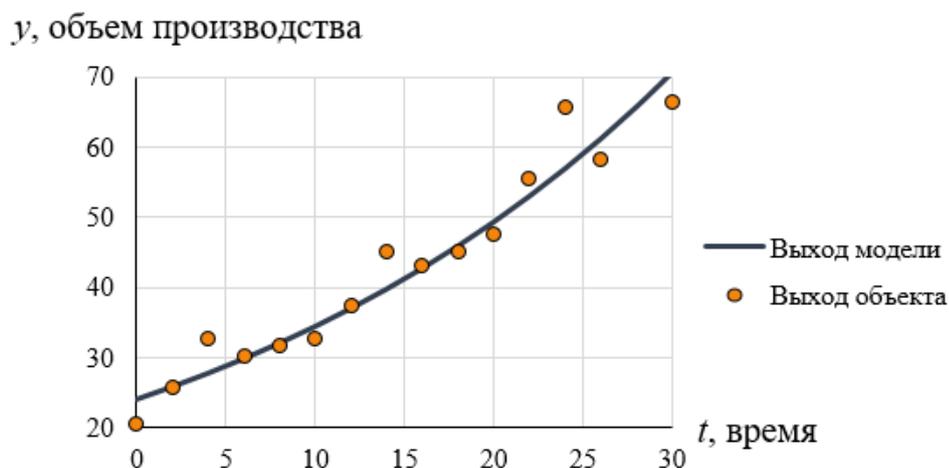


Рисунок 3.59 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели (задача 1, объем выборки 15, шум 10%)

Задача 2. Модель социальной диффузии

Вторая задача рассматривала возможность идентификации модели «социальной диффузии» эволюционным подходом. Данная модель была аналитически построена на основе уравнения Ферхюльста с коэффициентами, уточненными Дж. Коулменом [110]. Данное уравнение описывает распространение в определенных социальных группах некоторых образцов поведения, моды, новшеств (3.9):

$$y'(t) = \psi\beta \left(1 - \frac{y(t)}{b}\right) y(t), \quad (3.9)$$

где $y(t)$ – число сторонников новшества в текущий момент времени t , b – общая численность рассматриваемой группы, β – число контактов, завязываемых сторонниками в единицу времени, ψ – значение из диапазона $[0;1]$, указывающее на то, что не все «агитации» приводят к успеху.

Для задачи 2 данные были сгенерированы при следующих коэффициентах: $b=3000$; $\beta=2$; $\psi=0,4$.

При отсутствии шума в исходных данных получаемые модели соответствовали известной теоретической формуле:

$$y'(t) = 0,8 \left(1 - \frac{y(t)}{3000} \right) y(t) \quad (3.10)$$

При наличии в исходных данных 5% нормально распределенного шума модели с наибольшей пригодностью также соответствовали истинной, при увеличении шума до 10% модель с наибольшей пригодностью была получена следующая:

$$\begin{aligned} y'(t) &= (y(t) - 3017,29) \left(\frac{y(t)}{-3792,08} \right) + 0,147 \approx \\ &\approx -0,0003y^2(t) + 0,8y(t) + 0,174. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Графики моделей, описывающих исходные данные представлены на Рисунках 3.59-3.62.

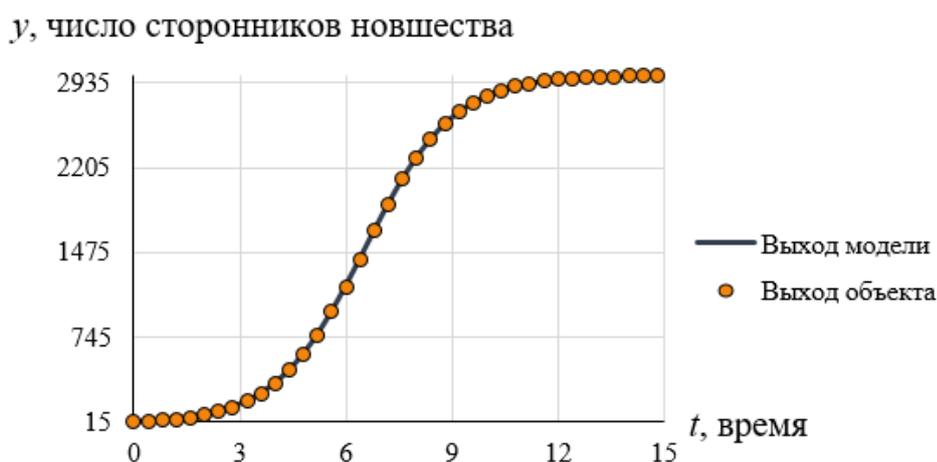


Рисунок 3.60 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели (задача 2, объем выборки 40, шум 0)

y , число сторонников новшества

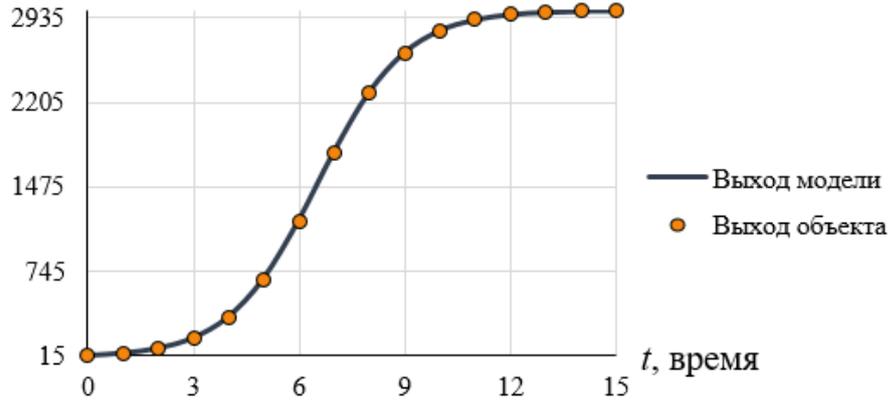


Рисунок 3.61 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели (задача 2, объем выборки 16, шум 0)

y , число сторонников новшества

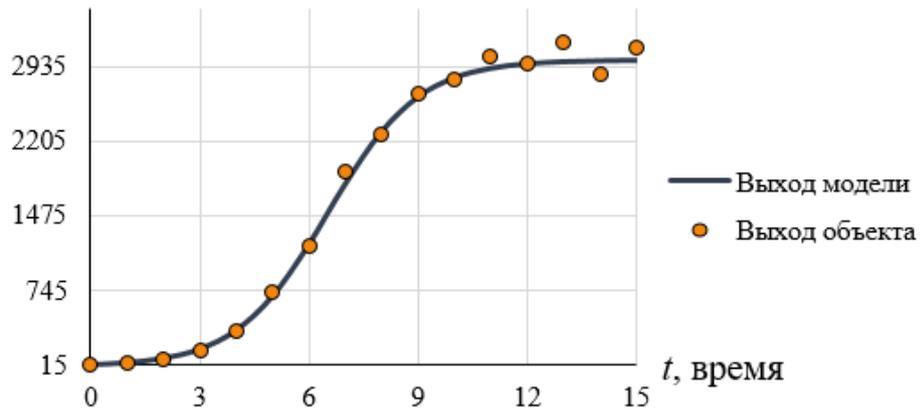


Рисунок 3.62 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели (задача 2, объем выборки 16, шум 5%)

y , число сторонников новшества

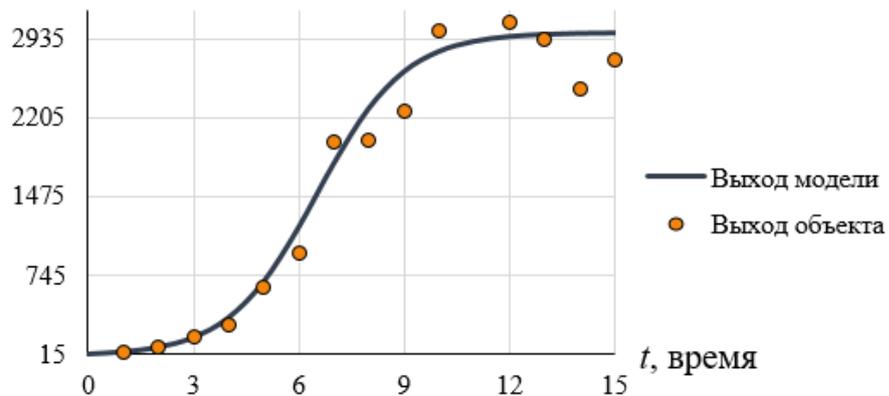


Рисунок 3.63 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели (задача 2, объем выборки 16, шум 10%)

Задача 3. Модель колебания рыночных цен/объема производства

Данная модель в экономике основана на аналогии с уравнением пружинного маятника, так как оно применимо к любой системе, испытывающей колебания. В соответствии с законом Ньютона возможно построить модель в виде дифференциального уравнения второго порядка, описывающую изменение объема производства в некоторой замкнутой экосистеме [109]:

$$y''(t) = -2ky'(t) - \omega^2 y(t). \quad (3.12)$$

Для данной задачи выбраны коэффициенты $k=0,1$; $\omega^2=0,25$ и начальное условие $y(0)=0,1$ [111].

Для данных без шума получены следующие модели (соответственно Рисункам 3.63 и 3.64):

$$y''(t) = -0,2y'(t) - 0,25y(t); \quad (3.13)$$

$$y''(t) = \frac{y(t) + \frac{y'(t)}{0,8492}}{-5,125} \approx -0,27y'(t) - 0,196y(t). \quad (3.14)$$

Пригодность модели (3.9) составила 1, модели (3.10) соответствует пригодность 0,999.

y , объем производства

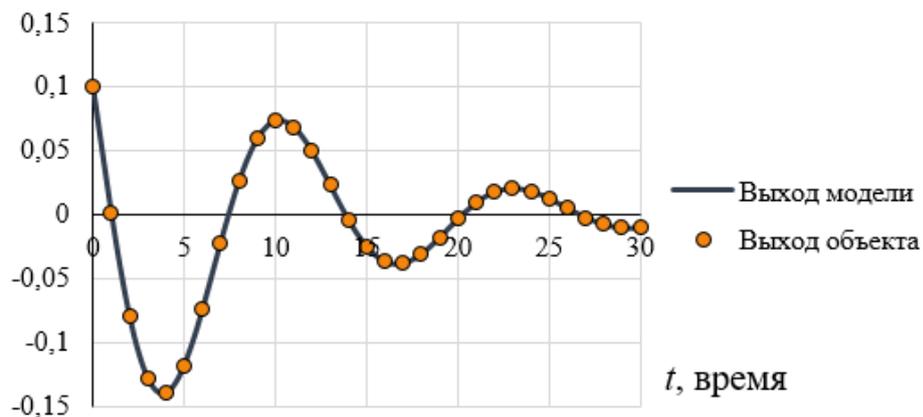


Рисунок 3.64 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели (задача 3, объем выборки 30, шум 0)



Рисунок 3.65 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели (задача 3, объем выборки 16, шум 0)

Для зашумленные данных получены следующие модели с наибольшей пригодностью:

$$y''(t) = -0,22y(t) - 0,234y'(t); \quad (3.15)$$

$$y''(t) = -0,221(y(t) + y'(t)). \quad (3.16)$$

Пригодность модели (3.15) составила 0,993, модели (3.16) соответствует пригодность 0,985 (Рисунки 3.65-3.66)).

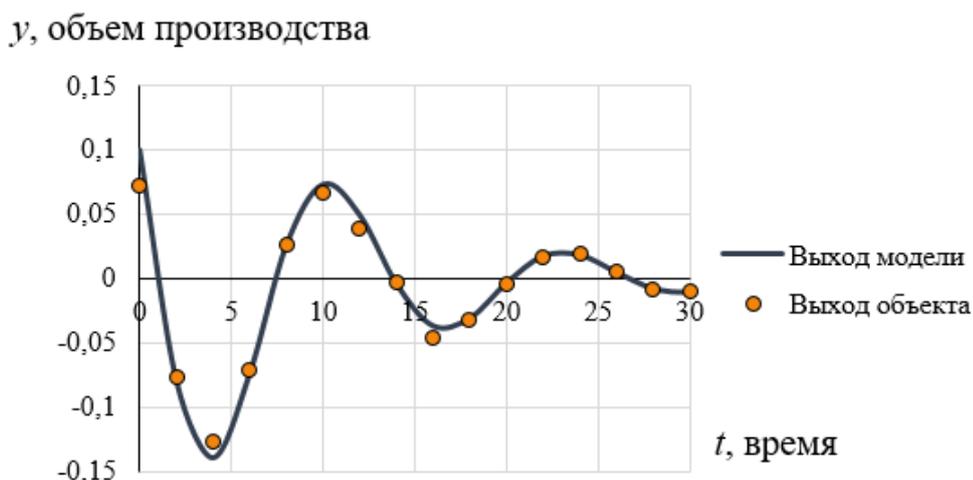


Рисунок 3.66 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели (задача 3, объем выборки 16, шум 10%)

y , объем производства

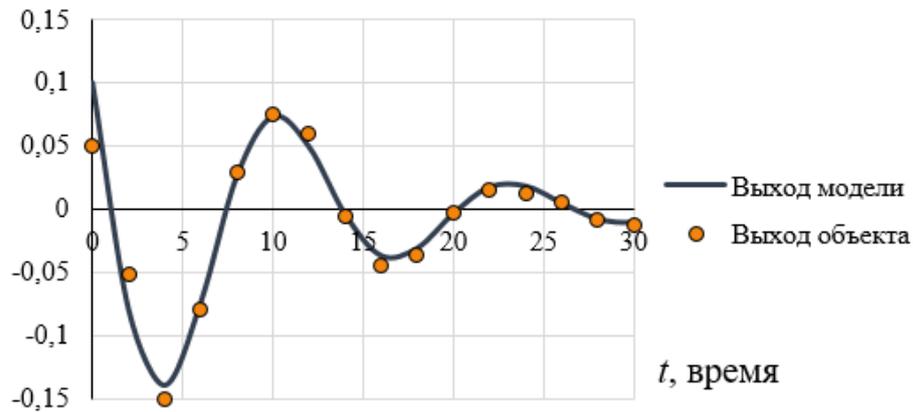


Рисунок 3.67 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели (задача 3, объем выборки 16, шум 20%)

Задача 4. Модель «хищник-жертва»

Далее было исследовано применение разработанного подхода при решении практической задачи из области биологии. Пусть в некоторой экосистеме даны значения, описывающие изменение численности популяции хищников и жертв с течением времени. Объем выборки составил 50 точек. Необходимо определить изменение численности популяций жертвы и хищника с течением времени.

В результате для данных, содержащих 50 точек без шума, было получено выражение, представленное системой дифференциальных уравнений (3.17) [112]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0.998x - \frac{xy}{1.023 + 2x - x} - 0.124x^2 + 0.009x^2 \\ \frac{dy}{dt} = \frac{(0.255 - 0.101\frac{y}{x} + 0.08)y^2}{y} \end{cases} = \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left(0.998 - \frac{y}{1.023 + x} - 0.115x\right)x \\ \frac{dy}{dt} = \left(0.175 - 0.101\frac{y}{x}\right)y \end{cases} \quad (3.17)$$

Представленная система дифференциальных уравнений соответствует модели Холлинга-Тэннера, которая в общем виде представляется следующим образом (3.18):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left(a - \frac{cy}{g+x} - ex \right) x \\ \frac{dy}{dt} = \left(b - f \frac{y}{x} \right) y \end{cases} . \quad (3.18)$$

где x – численность популяции хищников, y – численность популяции жертв, $\frac{cy}{g+x}$ – коэффициент хищничества, a, b, f – положительные параметры [113].

Для данных с шумом были также получены модели со структурой приводимой к известной истинной. На Рисунках 3.67-3.70 представлены графики, соответствующие исходным данным и точкам, полученным по моделям.

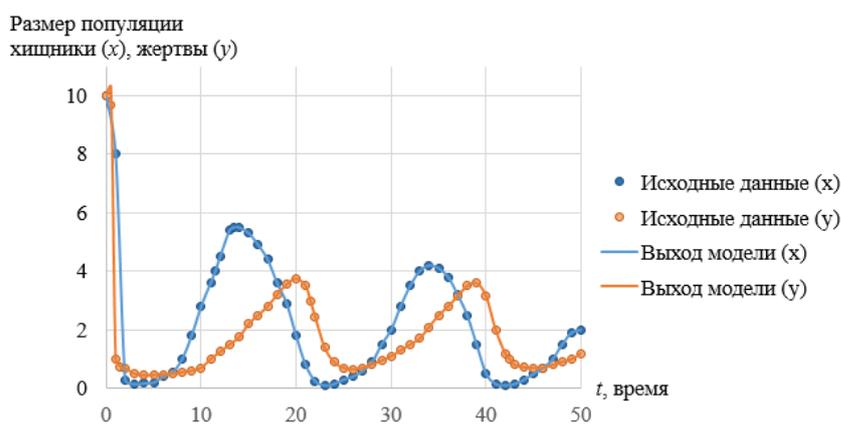


Рисунок 3.68 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели (задача 4, объем выборки 50, шум 0)

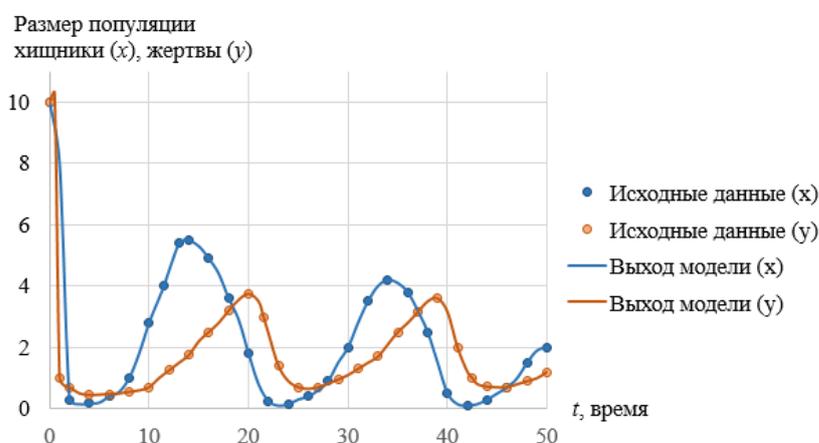


Рисунок 3.69 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели (задача 4, объем выборки 25, шум 0)

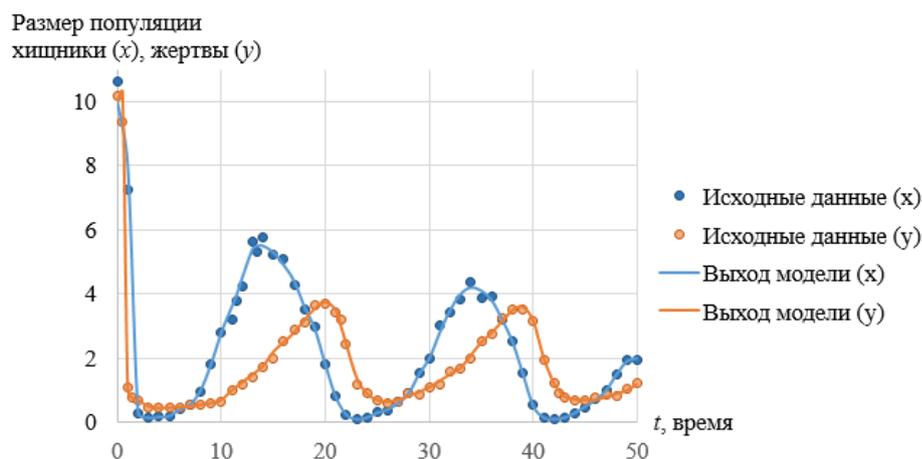


Рисунок 3.70 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели (задача 5, объем выборки 50, шум 5%)

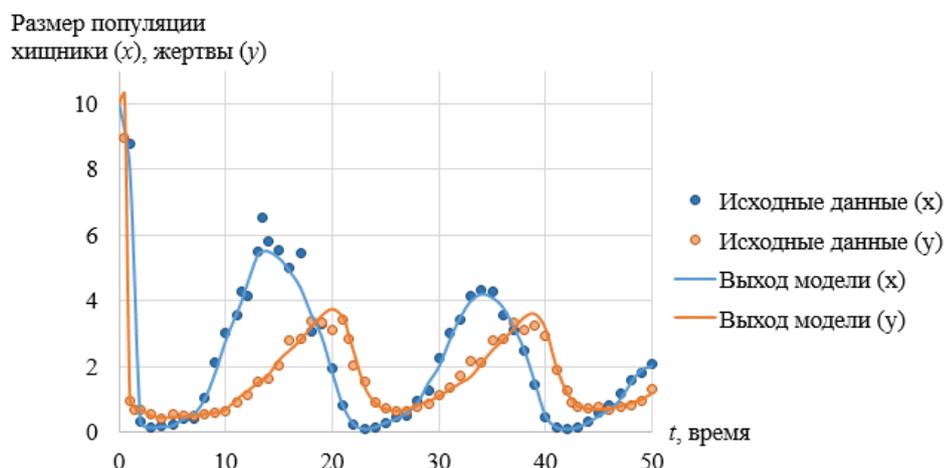


Рисунок 3.71 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели (задача 4, объем выборки 50, шум 10%)

Задача 5. Моделирование изменчивости состояний магнитного поля Земли (модель динамо Рикитаки)

Данная модель из области физики описывает изменение магнитного поля (в том числе смену магнитных полюсов) Солнца и других планет. Согласно теории геофизика Рикитаки при объяснении непредсказуемого переворота магнитного поля Земли необходимо рассматриваемую конвективную ячейку или вихрь в данном физическом процессе считать одним диском динамо [114]. Тогда, согласно модели простейшего двухдискового динамо, ток от первого диска перетекает во второй диск, генерируя магнитное поле. Ток от второго диска, в свою очередь,

усиливает магнитное поле около первого. Токи и магнитные поля колеблются сначала около некоторого стационарного состояния, а затем, увеличивая амплитуду, внезапно начинают испытывать колебания уже вокруг другого стационарного состояния [12]. Рикитаке предложил следующую простую нелинейную математическую модель этого процесса:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -vx_1 + y_1x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -vx_2 + y_2x_1 \\ \frac{dy_1}{dt} = 1 - \sigma_1y_1 - x_1x_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = 1 - \sigma_2y_2 - x_1x_2 \end{cases}, \quad (3.19)$$

где v , σ_1 , σ_2 – параметры модели, x_1 и x_2 – безразмерные токи первого и второго дисков, y_1 и y_2 – безразмерные угловые скорости дисков, σ_1 , σ_2 – коэффициенты трения в дисках, v – омическая диссипация.

Для исследования разработанного подхода к необходимо построить модель изменения состояний магнитного поля Земли по данным, сгенерированным по модели Рикитаке. При формировании данных были заданы следующие параметры модели: $v=0,66$, $\sigma_1=0,009$, $\sigma_2=0,0009$, $x_1(0)=1$, $x_2(0)=-1$, $y_1(0)=-1$, $y_2(0)=2$.

Для данных без шума была найдена модель в форме системы дифференциальных уравнений, приведенная путем математических преобразований к виду:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -0,692x_1 + 0,989y_1x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -0,694x_2 + y_2x_1 \\ \frac{dy_1}{dt} = 1 - 0,0091y_1 - x_1x_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = 1 - 0,0009y_2 - x_1x_2 \end{cases}. \quad (3.20)$$

Для данных с шумом 5% была получена следующая модель:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = -0,701(x_1 - 0,951y_1x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = y_2(1 + x_1) - 0,644x_2 - y_2 \\ \frac{dy_1}{dt} = \frac{3,781}{-420,1} - x_2x_1 + \frac{x_1 + 0,001}{x_1} \\ \frac{dy_2}{dt} = x_1 \left(-x_2 + \frac{1}{x_1} \right) - 4,24y_2 - 4,2411y_2 \end{array} \right. \quad (3.21)$$

На Рисунках 3.72-3.75 представлены графики моделей с наибольшей пригодностью, описывающие исходные данные.

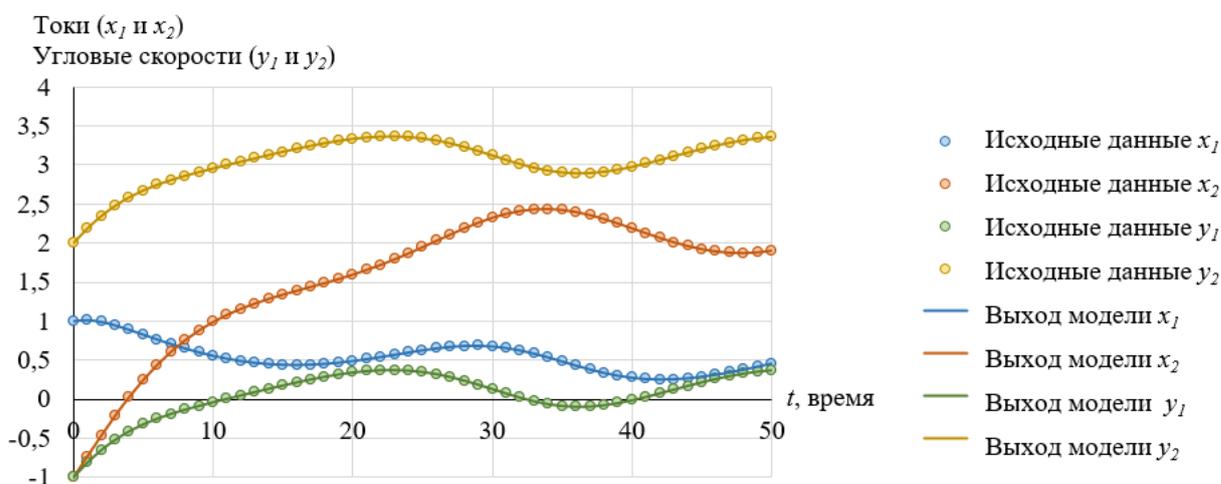


Рисунок 3.72 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели (задача 5, объем выборки 50, шум 0)

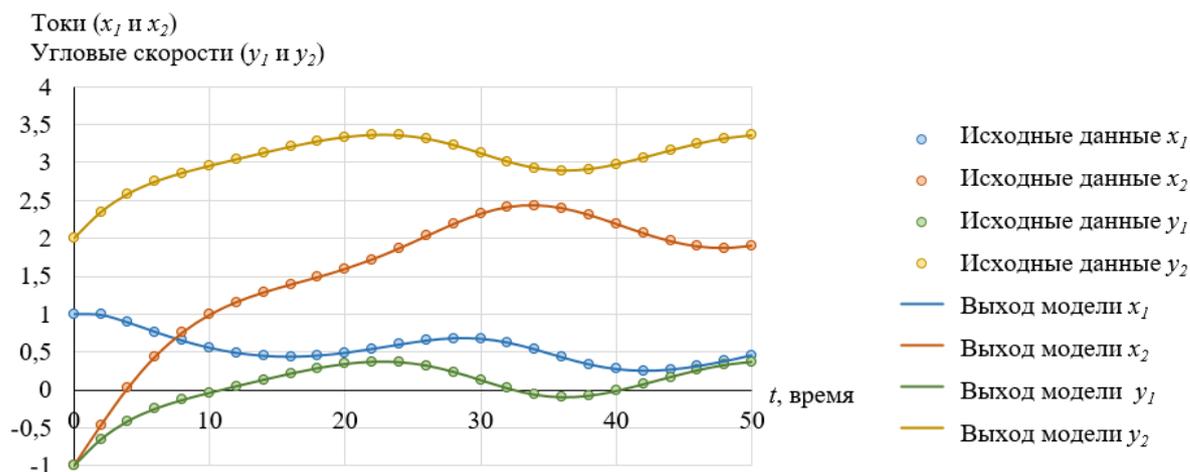


Рисунок 3.73 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели (задача 5, объем выборки 25, шум 0)

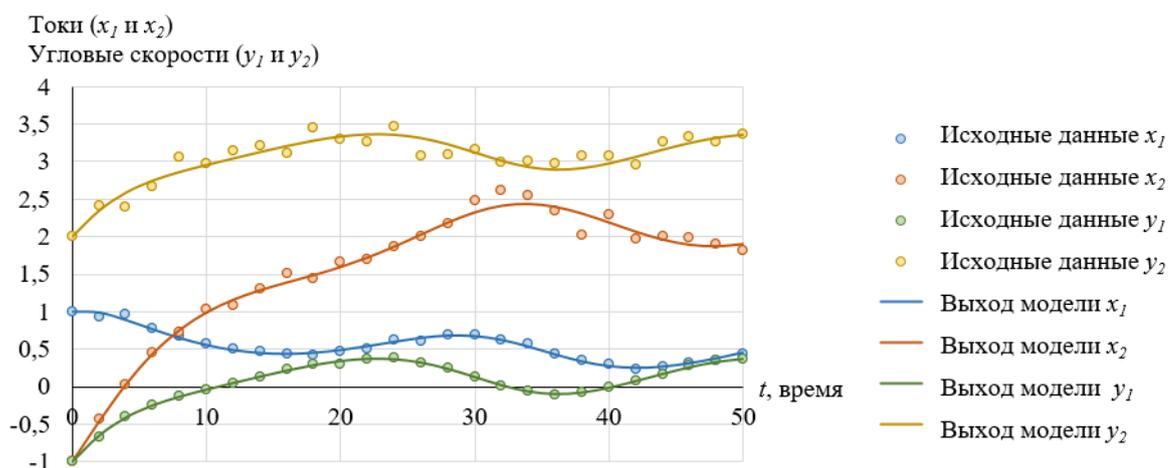


Рисунок 3.74 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели (задача 5, объем выборки 25, шум 5%)

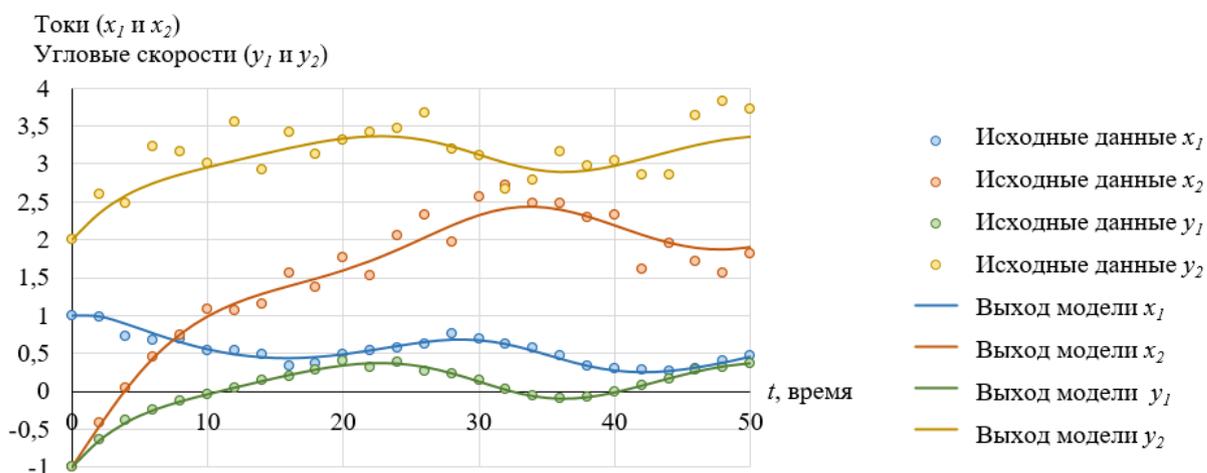


Рисунок 3.75 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели (задача 5, объем выборки 25, шум 10%)

Задача 6. Модель продольного возмущенного движения самолета

В данной задаче необходимо получить модель, описывающую движение самолета [115]. Исследуется прямолинейный установившийся полет самолета, который осуществляется в процессе возмущенного движения без скольжения с небольшим отклонением параметров от начальных значений. В такой постановке отдельно рассматривается боковое и продольное движения [12].

Известная теоретическая модель описывается системой уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = -k_{v1}v + k_{v2}\alpha - k_{v3}\beta \\ \frac{d\alpha}{dt} = -k_{\alpha1}v - k_{\alpha2}\alpha + \varphi \\ \frac{d\beta}{dt} = \varphi \\ \frac{d\varphi}{dt} = -k_{\varphi1}v - k_{\varphi2}\alpha - k_{\varphi3}\varphi \end{array} \right. , \quad (3.22)$$

На основании данных, описывающих изменения скорости, угла атаки, угла между хордой крыла и горизонтом, угла тангажа с течением времени необходимо получить модель с помощью разработанного алгоритма. При формировании исходных данных были заданы следующие коэффициенты: $k_{v1}=0,104$, $k_{v2}=0,043$, $k_{v3}=0,1$, $k_{\alpha1}=0,57$, $k_{\alpha2}=5,12$, $k_{\alpha3}=1$, $k_{\varphi1}=12,574$, $k_{\varphi2}=43,690$, $k_{\varphi3}=9,672$.

Для данных без шума были найдены модели, соответствующие известной истинной структуре (Рисунки 3.76-3.77).

Модели, полученные для данных с шумом 5% и 10% имеют точность 0,95 и 0,945 соответственно и представлены далее (Рисунки 3.78-3.79):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = 0,1 - 0,111\beta \\ \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\varphi}{0,207} \\ \frac{d\beta}{dt} = -2,306\beta - 1,684 \\ \frac{d\varphi}{dt} = -4,165\varphi - 1,648\varphi^2 + \frac{\varphi}{v} \end{array} \right. , \quad (3.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = -0,188\beta - 0,154 \\ \frac{d\alpha}{dt} = -2,544\beta - 1,832 + \varphi \\ \frac{d\beta}{dt} = -3,609 - 7,321\beta - 7,321\alpha \\ \frac{d\varphi}{dt} = -4,115\varphi - 0,032 \end{array} \right. \quad (3.24)$$

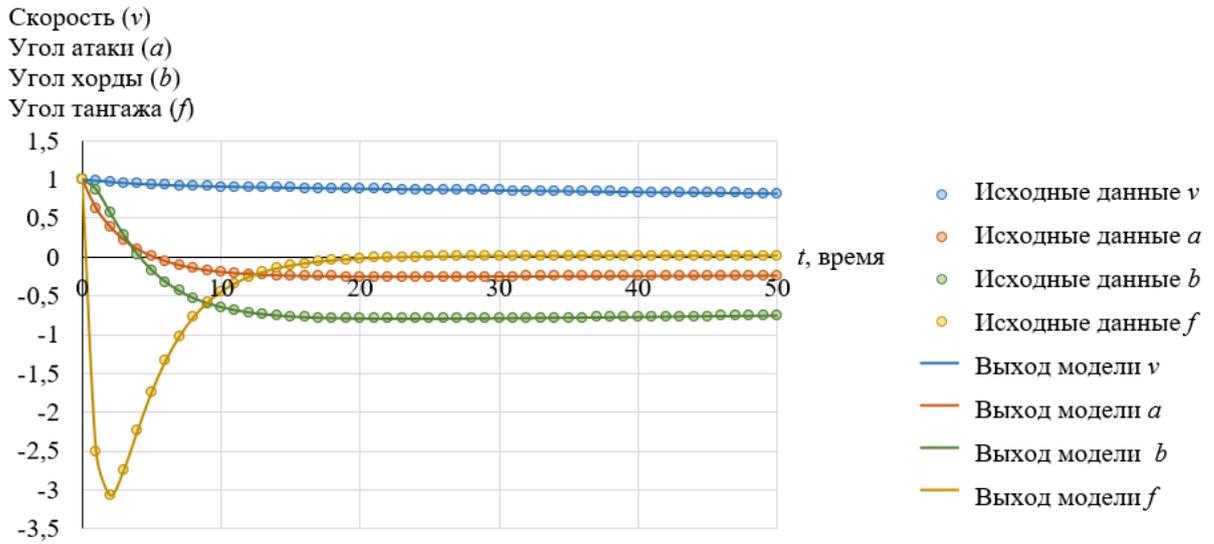


Рисунок 3.76 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели
(задача 6, объем выборки 50, шум 0)

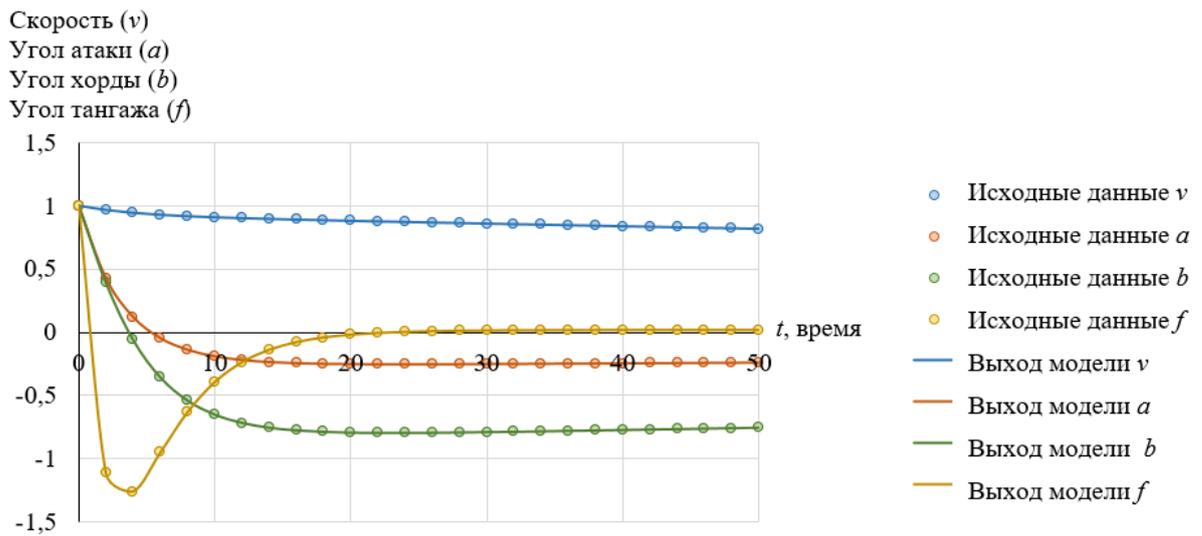


Рисунок 3.77 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели
(задача 6, объем выборки 25, шум 0)

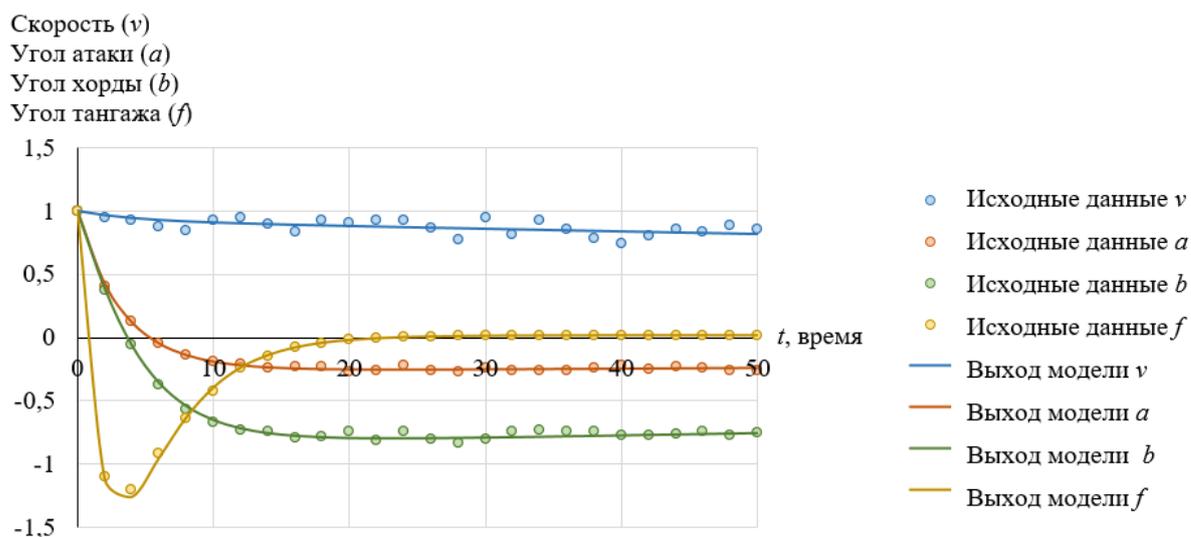


Рисунок 3.78 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели
(задача 6, объем выборки 25, шум 5%)

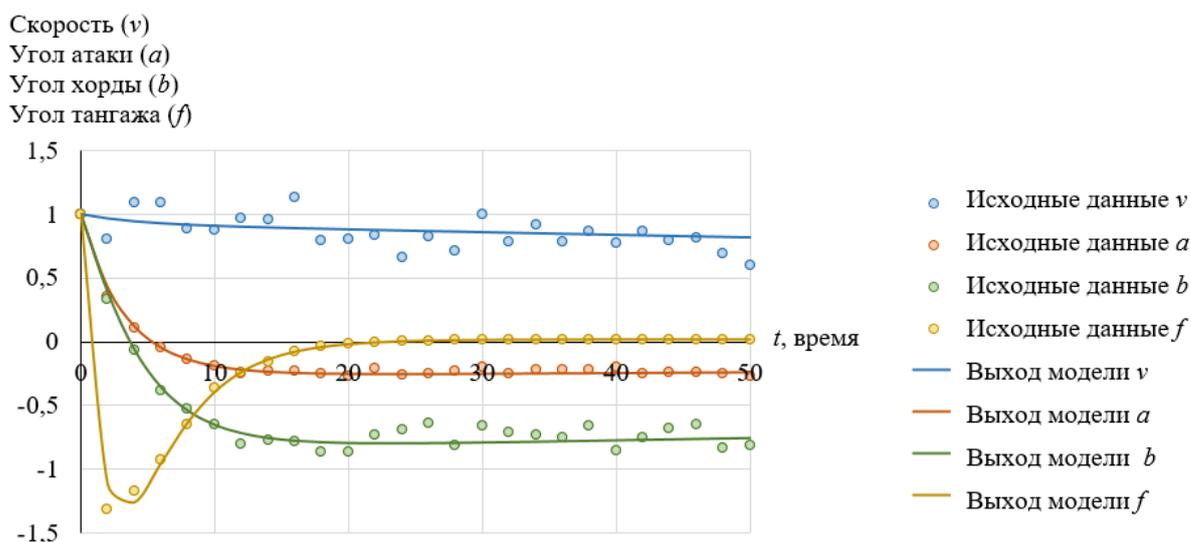


Рисунок 3.79 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели
(задача 6, объем выборки 25, шум 10%)

Задача 7. Моделирование движения вязкой жидкости при ее нагреве снизу

При нагревании жидкости снизу возникает разница температур в верхнем и нижнем слоях, что приводит к тому, что теплая жидкость всплывает, а холодная, наоборот, опускается. Согласно физике процесса, в жидкости могут возникать горизонтальные цилиндрические вала, вращающиеся навстречу друг другу, а при увеличении подогрева каждый из них распадается еще на два вала меньшего размера и т. д., так что в пределе может возникать хаос (турбулентность) [12].

Данный процесс описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений, называемой системой Лоренца:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(r - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \quad (3.25)$$

где t – время; x скорость вращения валов, y – разница температур между слоями, z – характеризует отклонение вертикального температурного профиля от линейной зависимости; r, σ, b – параметры, пропорциональные числу Прандтля, числу Рэлея и некоторому коэффициенту, отражающему геометрию области [117]

Для исследования предложенного эволюционного подхода к идентификации в виде систем дифференциального уравнения были сгенерированы данные по системе Лоренца со следующими значениями: $\sigma=10, b=8/3, r=10, x(0)=1, y(0)=1, z(0)=1$.

Для данных, состоящих из 50 точек без шума, получена модель идентичная известной истинной. Для остальных наборов данных были получены следующие модели с наименьшей ошибкой:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10,002(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(9,999 - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} = xy - 2,671z \end{cases} \quad (3.26)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = z - \frac{x^2}{0,937} + 16,262 \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x(8,761 - z) + \frac{x}{y}}{1,552}, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{y(y - 0,034 - x)}{0,418} \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 13,893 - z - y \\ \frac{dy}{dt} = y(1,897x - z), \\ \frac{dz}{dt} = z - x(z - 1,467y) \end{cases} \quad (3.28)$$

Графики, полученные по найденным моделям представлены на Рисунках 3.80-3.83.

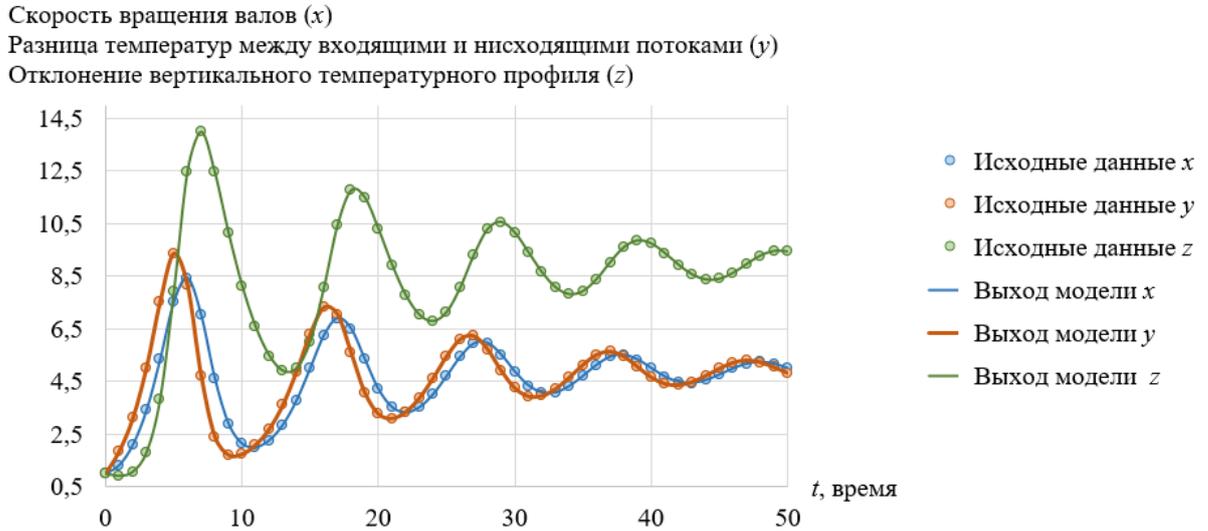


Рисунок 3.80 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели (задача 7, объем выборки 50, шум 0)

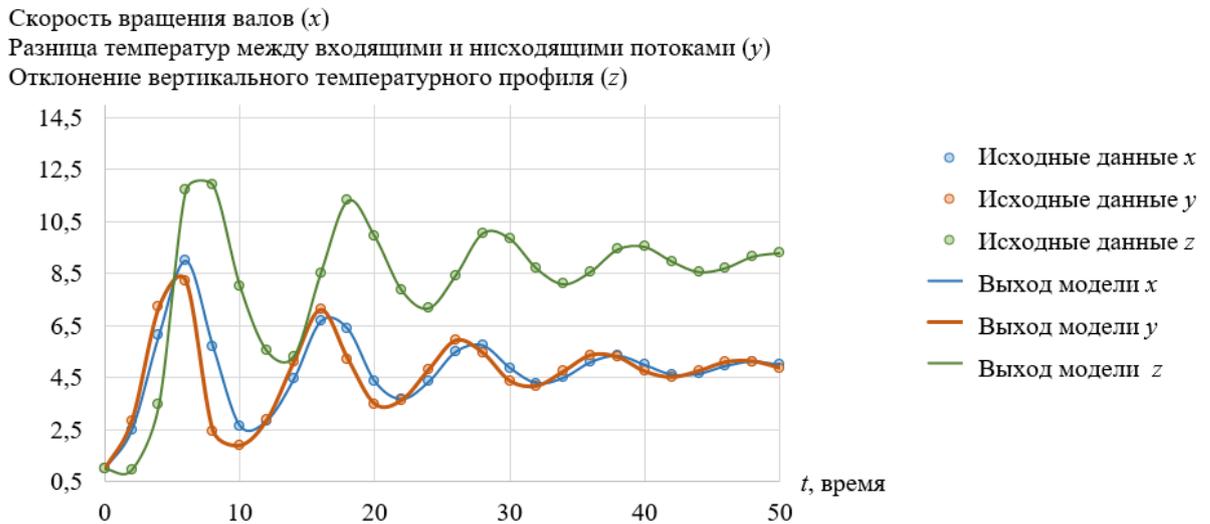


Рисунок 3.81 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели (задача 7, объем выборки 25, шум 0)

Скорость вращения валов (x)
 Разница температур между входящими и нисходящими потоками (y)
 Отклонение вертикального температурного профиля (z)

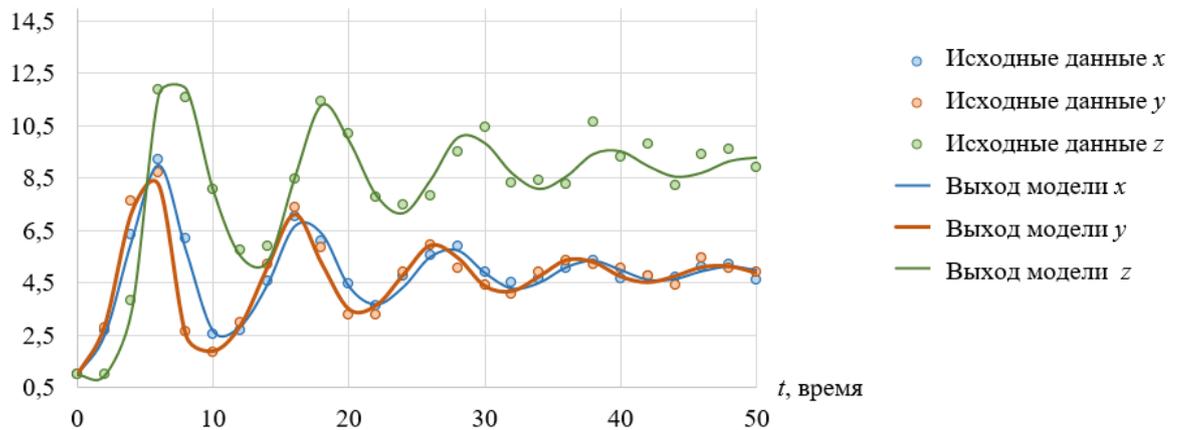


Рисунок 3.82 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели (задача 7, объем выборки 25, шум 5%)

Скорость вращения валов (x)
 Разница температур между входящими и нисходящими потоками (y)
 Отклонение вертикального температурного профиля (z)

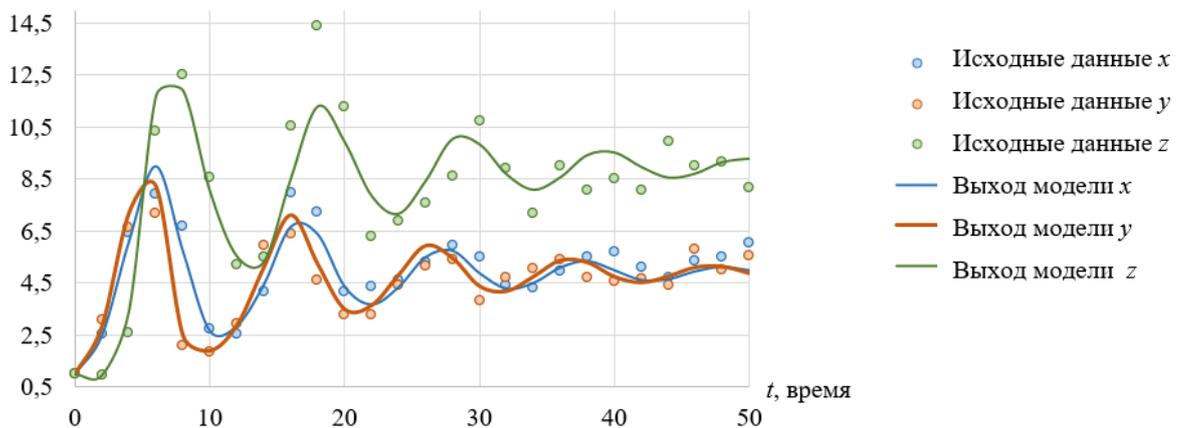


Рисунок 3.83 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели (задача 7, объем выборки 25, шум 10%)

Исследование подходов на тестовых задачах, соответствующих известным законам из области экономики, химии, биологии демонстрирует, что предложенный в диссертации подход может строить модели со структурой, совпадающей с известной истинной структурой [116].

3.4 Исследование эволюционных подходов к идентификации динамических систем на практических задачах

Рассмотрим применение разработанных подходов при идентификации реальных процессов [118].

Для исследования подходов были выбраны данные из репозитория [119].

Задача 1. Мониторинг состояния гидравлических систем

Первая задача связана с мониторингом состояния гидравлических систем.

Исследуемые данные были получены экспериментально с помощью гидравлического испытательного стенда. Данный стенд состоит из основного рабочего и вторичного контуров охлаждения-фильтрации, которые соединяются через маслобак. Система повторяет циклы постоянной нагрузки (длительностью 60 секунд) и измеряет технологические параметры, такие как давление, объемный расход и температура, в то время как состояние четырех гидравлических компонентов (охладитель, клапан, насос и аккумулятор) количественно варьируется. Требуется определить изменение коэффициента полезного действия (КПД) η для данной системы.

В качестве входных переменных были рассмотрены:

- показания шести датчиков давления (бар) (x_1, \dots, x_6) ;
- показания датчика мощности двигателя (Вт) (x_7) ;
- показания двух датчиков объемного расхода (л/мин) (x_8, x_9) ;
- показания четырех датчиков температуры ($^{\circ}\text{C}$) (x_{10}, \dots, x_{13}) ;
- показания датчика вибрации (мм/с) (x_{14}) ;

Исходный набор данных содержит 1100 экземпляров, но для генерации модели в виде дифференциального уравнения эволюционным подходом были использованы первые 500 точек. Использование неполного объема данных связано с необходимостью проверки корректности модели на данных, которые не были использованы при поиске решения.

Представим найденную предложенным подходом модель в виде дифференциального уравнения (3.25), которая позволяет отследить изменение

коэффициента полезного действия в зависимости от изменения входных характеристик:

$$y' = \frac{-14,76x_5x_6(0,38 + 4,06x_1 + 1,44x_{11} + x_{12})}{(7,57x_3 - 82,11x_5x_6)(0,38 + 4,06x_1 + 1,44x_1 + x_{12}) + 3,21x_5x_6} - \frac{(x_1 + 2,47)(yx_1 + 19,37x_1 - 12,43x_1x_7 + 2,89x_7x_9)}{x_1} \quad (3.29)$$

Ошибка полученной модели на тестовых данных составила 5,4%. График соответствия модели точкам исходной выборке представлен на Рисунке 3.84:

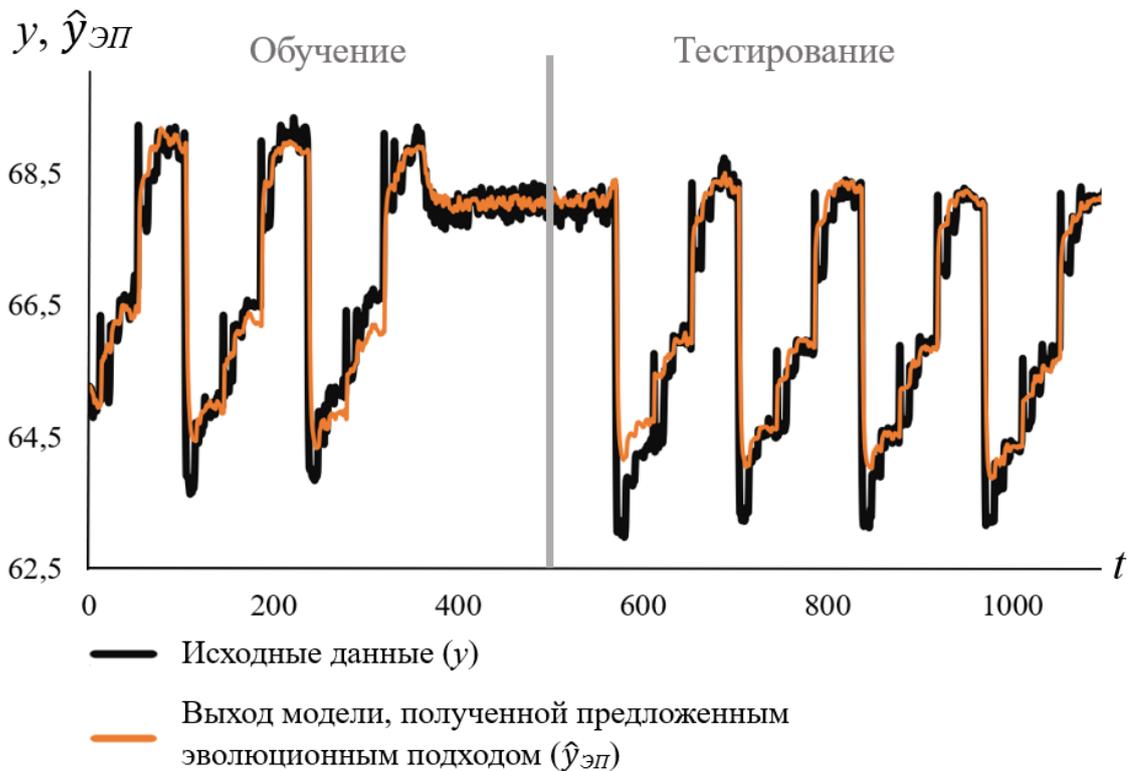


Рисунок 3.84 – Соответствие модели, полученной разработанным эволюционным подходом, точкам исходной выборки для задачи мониторинга состояния гидравлической системы

Для доказательства эффективности разработанного эволюционного подхода было проведено сравнение с рекуррентной нейронной сетью и непараметрической ядерной оценкой регрессии. В отличие от тестовых задач в качестве серии событий на вход алгоритмам подаются 100 объектов, а на выходе алгоритмы должны спрогнозировать 40 следующих значений целевых переменных.

На Рисунке 3.85 представлены графики соответствия моделей, полученных указанными методами, точкам исходной выборки. Ошибки моделей на тестовых данных, полученные рекуррентной нейронной сетью и непараметрической ядерной оценкой регрессии, составили 27,88% и 19,02% соответственно.

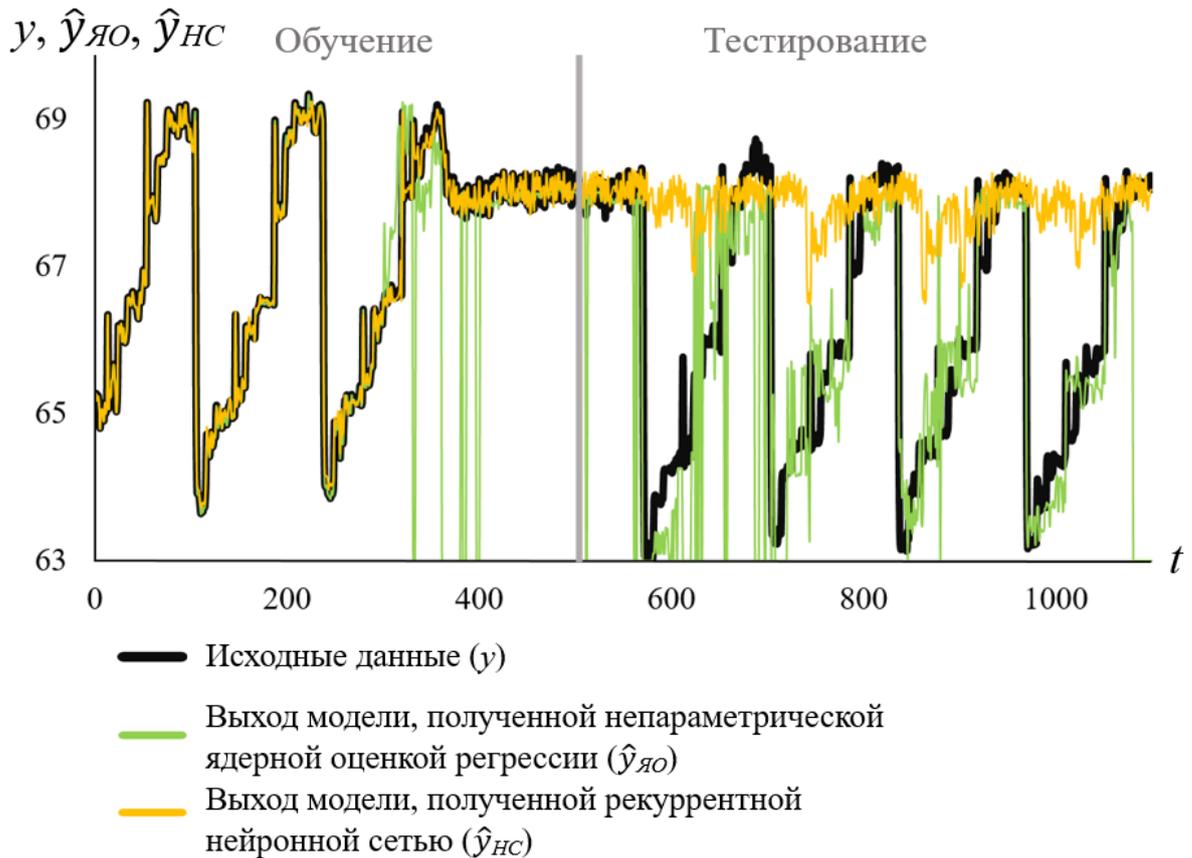


Рисунок 3.85 – Соответствие моделей, полученных рекуррентной нейронной сетью и непараметрической ядерной оценкой регрессии, точкам исходной выборки для задачи мониторинга состояния гидравлической системы

Стоит отметить, что если в обучающую выборку не входят данные при $t \in [360; 570]$, то модели, полученные нейронной сетью и непараметрической ядерной оценкой регрессии не подходят для описания тестовых данных, так как происходящие на данном промежутке изменения входных переменных делают модели непригодными для описания тестовых данных а модель, полученная предложенным эволюционным подходом, напротив, корректно описывает тестовые данные, ошибка на которых составила 7,85% (Рисунок 3.84).

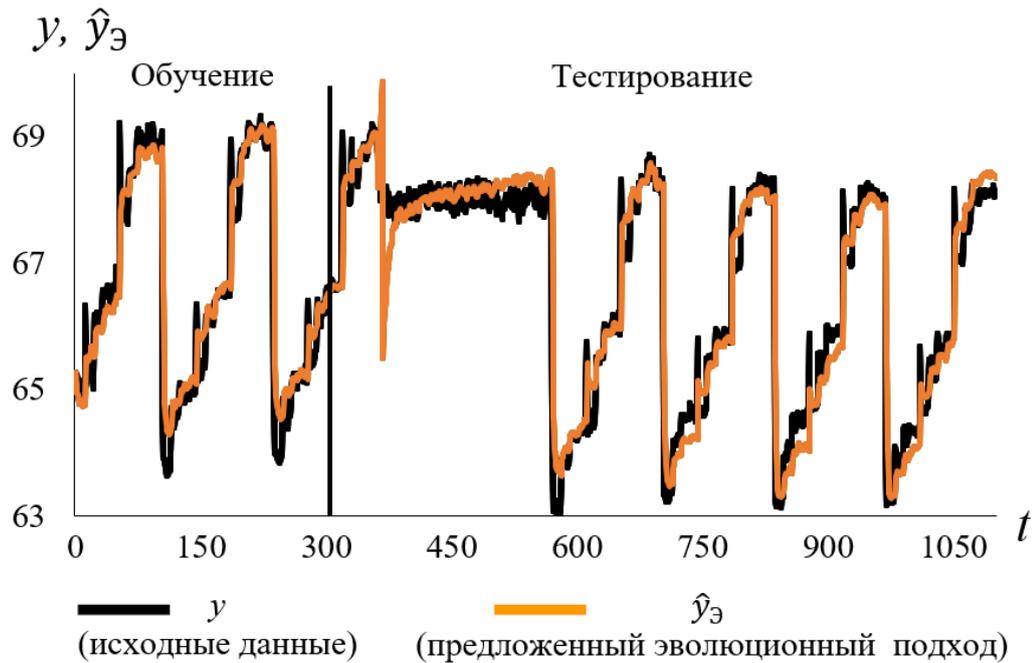


Рисунок 3.86 – Соответствие моделей точкам исходной выборки для задачи мониторинга состояния гидравлической системы (объем обучающей выборки: 300 первых точек)

График соответствия модели точкам исходной выборки доказывает высокую точность полученной модели не только на обучающих данных.

Задача 2. Исследование качества воздуха

Следующая задача требует построения модели по набору данных, который содержит значения усредненных почасовых откликов 5 химических датчиков оксидов металлов, встроенных в мультисенсорное устройство химического контроля качества воздуха. Согласно описанию данных, устройство находилось на поле в сильно загрязненной местности на уровне дороги в пределах итальянского города. Усредненные почасовые концентрации монооксида углерода, неметановых углеводородов, бензола, общего количества оксидов азота и диоксида азота были получены с помощью расположенного рядом эталонного анализатора.

В данной задаче несколько взаимосвязанных предсказываемых переменных (среднечасовые концентрации монооксида углерода и бензола), следовательно, конечная модель должна быть представлена в виде системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим переменные, которые включены в исследуемый набор данных.

Для построения модели в виде системы дифференциальных уравнений были определены следующие входные переменные, которые представляют собой временной ряд:

- среднечасовой отклик датчика на основе оксида олова (x_1);
- среднечасовой отклик датчика на основе титана (x_2);
- среднечасовая реакция датчика на основе оксида вольфрама № 1 (x_3);
- среднечасовая реакция датчика на основе оксида вольфрама № 2 (x_4);
- среднечасовая реакция датчика на основе оксида индия (x_5);
- температура в °C (x_6);
- относительная влажность (x_7);
- абсолютная влажность (x_8).

Полученная модель предсказывает концентрации следующих веществ:

- среднечасовая концентрация монооксида углерода в мг/м³ (y_1);
- среднечасовая концентрация бензола в мг/м³ (y_2).

Исходный набор данных содержит 830 экземпляров, для генерации модели в виде системы дифференциальных уравнений эволюционным подходом были использованы 300 точек.

Представим модель в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = \frac{y_1(x_2 + 279,2 - (x_5 + y_2)(5,14y_1 + 7,62))}{-(x_5 + y_2)(y_1 + 542,02)} \\ y_2' = \frac{0,03x_1^2x_2x_8(x_7 - 26,8)}{x_8(0,9 - 83,47x_2) + x_1x_2(x_7 - 26,8)(x_5 - x_8(0,03x_4 + 0,03y_1 + 1267,78))} \end{cases} \quad (3.30)$$

Ошибка полученной модели на тестовой части данных составила 8,54%.

Далее на Рисунке 3.87 представлены графики, описывающие изменения концентраций исследуемых веществ, и графики полученной предложенным эволюционным подходом модели.

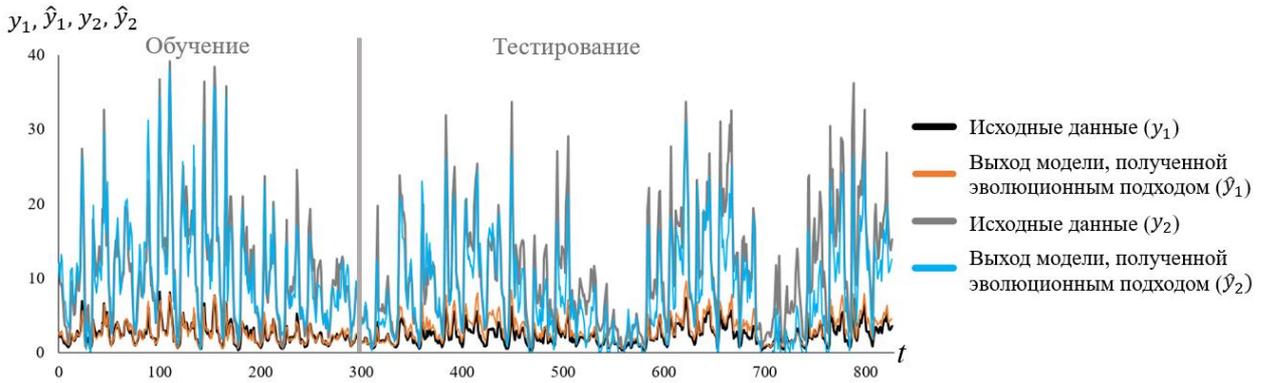


Рисунок 3.87 – Соответствие модели, полученной разработанным эволюционным подходом, точкам исходной выборки для задачи анализа состава воздуха

Ошибки моделей, полученных рекуррентной нейронной сетью и непараметрической ядерной оценкой регрессии, составили 18,47% и 19,21% соответственно (Рисунки 3.88, 3.89).

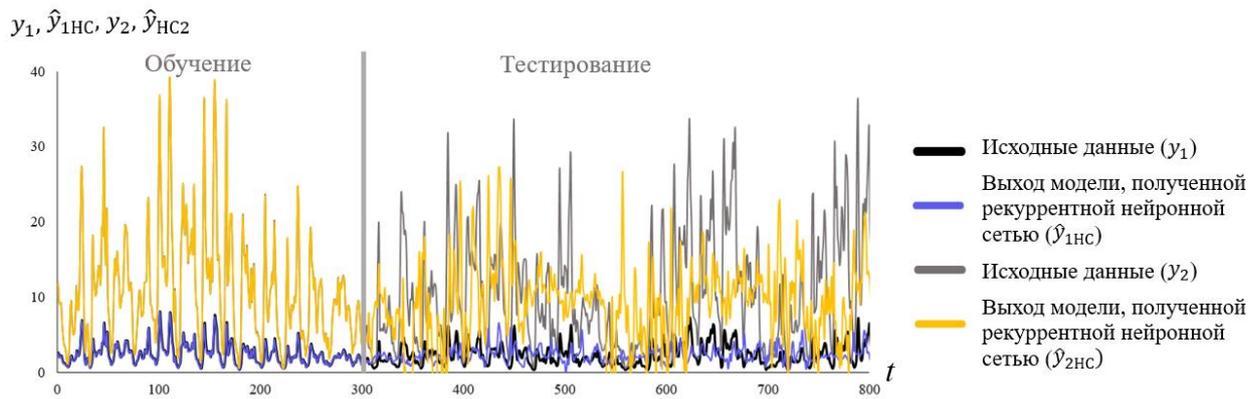


Рисунок 3.88 – Соответствие модели, полученной рекуррентной нейронной сетью, точкам исходной выборки для задачи анализа состава воздуха

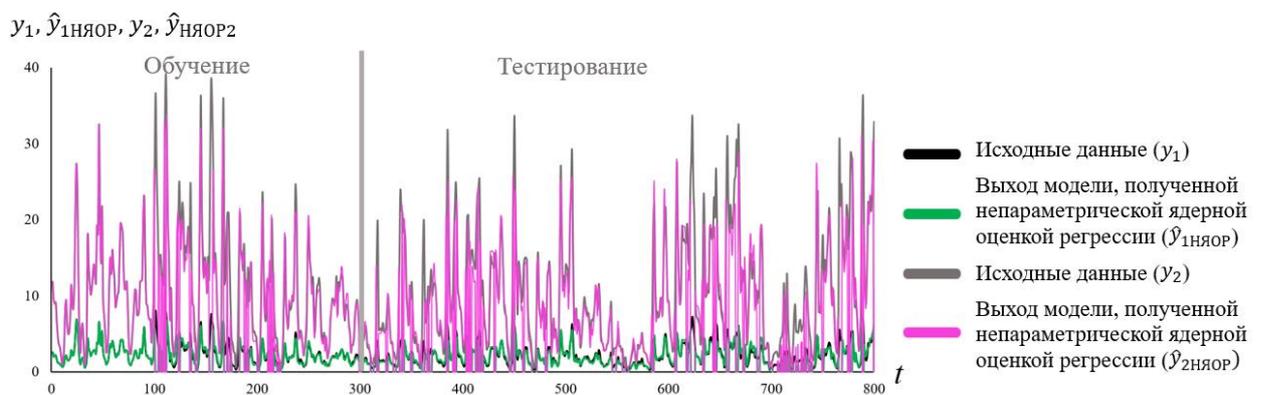


Рисунок 3.89 – Соответствие модели, полученной непараметрической ядерной оценкой регрессии, точкам исходной выборки для задачи анализа состава воздуха

По результатам проведенных исследований можно заключить, что предложенные эволюционные подходы позволили найти модели исследуемых процессов с достаточно высокой точностью.

Результаты Главы 3

В данной главе проведено поэтапное исследование эффективности эволюционных подходов к структурно-параметрической идентификации динамических систем. На первом этапе проведено тестирование подходов при поиске моделей, представленных дифференциальными уравнениями и их системами по сгенерированным данным. Данное исследование позволило рассмотреть применение подходов при поиске моделей в виде дифференциальных уравнений различной структуры, порядка, количества входных переменных и моделей в виде систем дифференциальных уравнений различного порядка, количества уравнений в системе. Показано, что предложенные подходы устойчивы к наличию шума в данных и их малому объему. С помощью разработанных подходов были построены также модели в виде дифференциальных уравнений и их систем при различных входных воздействиях. Это доказывает, что алгоритм позволяет найти модель при различных управляющих воздействиях на динамический объект. Следующим этапом проведенного исследования стал поиск моделей по данным, описывающим известные процессы из биологии, физики, экономики. На следующем этапе с помощью разработанных подходов были решены две практические задачи. Ошибки моделей, полученные с помощью разработанных эволюционных подходов структурно-параметрической идентификации, меньше, чем у моделей, полученных рекуррентной нейронной сетью и непараметрической ядерной оценкой регрессии, что демонстрирует эффективность разработанных в диссертации подходов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения диссертационной работы получены следующие результаты:

1. Разработаны модификации алгоритма генетического программирования для поиска решения задачи символьной регрессии в виде деревьев, кодирующих дифференциальные уравнения.

2. Разработан эволюционный подход к структурно-параметрической идентификации динамических систем в виде дифференциальных уравнений как линейного, так и нелинейного вида на основе модифицированного алгоритма генетического программирования и метода дифференциальной эволюции.

3. Разработан эволюционный подход к идентификации динамических объектов в виде систем дифференциальных уравнений как линейного, так и нелинейного вида, и произвольного количества уравнений в системе на основе модифицированного алгоритма генетического программирования и метода дифференциальной эволюции.

4. Разработан подход к решению задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений на основе самонастраивающегося алгоритма генетического программирования и метода дифференциальной эволюции.

5. Разработанные подходы реализованы в виде программных систем (Приложения А-Г), а их эффективность исследована на тестовых и практических задачах, что позволило продемонстрировать их обоснованность и эффективность.

Таким образом, в ходе данного диссертационного исследования решены все поставленные задачи и достигнута заявленная цель повышения эффективности применения методов решения задач символьной регрессии при структурно-параметрической идентификации динамических систем за счет применения самонастраивающихся эволюционных алгоритмов моделирования и оптимизации, что имеет существенное значение для теории и практики системного анализа, управления и обработки информации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Льюнг, Л. Идентификация систем. Теория для пользователя: Пер. с англ. / Л. Льюнг : под ред. Я.З. Цыпкина. – Москва : Наука, 1991. – 432 с.
2. Дивеев, А. И. Классические методы символьной регрессии для поиска структур математических выражений (обзор) / А. И. Дивеев, Е. Ю. Шмалько // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. – 2018. – № 20. – С. 100-132.
3. В3 Koza, J. On the programming of computers by means of natural selection / J. Koza // Genetic programming. – 1992.
4. Ryzhikov, I. The application of evolutionary algorithm for the linear dynamic system modelling / I. Ryzhikov, E. Semenkin // SIMULTECH 2012 - Proceedings of the 2nd International Conference on Simulation and Modeling Methodologies, Technologies and Applications, Rome. – 2012 – 28-31 июля. – С. 234-237.
5. Manocha, A. Three Axis Aircraft Autopilot Control Using Genetic Algorithms : An Experimental Study / A. Manocha, A. Sharma // 2009 IEEE International Advance Computing Conference (IACC 2009) Patiala, India. – 2009 – 6-7 марта. – С. 171-174
6. Parmar, G. Order reduction of linear dynamic systems using stability equation method and GA / G. Parmar, R. Prasad, S. Mukherjee // International Journal of computer and Information Engineering. – № 1 (1). – 2007. – С. 26-32.
7. Охорзин, В. А. Гибридный модифицированный метод эволюционных стратегий для решения задач идентификации динамических систем / В. А. Охорзин, И. С. Рыжиков // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнева. – 2010. – № 4 (30). – С. 20-23.
8. Дивеев, А. И. Вариационные методы символьной регрессии для задач управления и идентификации / А. И. Дивеев // Идентификация систем и задачи управления: труды X Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления». – Москва : Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. – 2015. – С. 141-148.

9. Охорзин, В. А. Теория управления: Учебник / В. А. Охорзин, К. В. Сафонов. – СПб.: Издательство «Лань», 2014. – 224 с.
10. Рыжиков, И. С. Эволюционные алгоритмы решения задач управления и идентификации для динамических систем : дис. ... канд. техн. наук : 05.13.01 / Рыжиков Иван Сергеевич. – Красноярск, 2013. – 146 с.
11. Самарский, А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – М. : Физматлит, 2001. – 320 с.
12. Воропаева, О.Ф. Основы численного анализа динамических систем: Учебное пособие по вычислительному практикуму / О. Ф. Воропаева – Новосибирск, 2022. – 234 с
13. Иванов, Д. С. Методы идентификации динамических параметров и оценки колебаний космических аппаратов с нежесткими элементами конструкции / Д. С. Иванов, С. В. Меус, А. В. Овчинников, М. Ю. Овчинников, С. А. Шестаков, Е. Н. Якимов. – М. : Изд-во Ин- та прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2015. – 32 с.
14. Советов, Б. Я. Моделирование систем : учебник для вузов / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев: – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 2001. – 343 с.
15. Андронов, А. А. Качественная теория динамических систем второго порядка / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. – Москва: Наука, 1966. – 568 с.
16. Пащенко, Ф. Ф. Введение в состоятельные методы моделирования систем. Идентификация нелинейных систем / Ф. Ф. Пащенко – М: «Финансы и статистика», 2006. – 328 с.
17. Братусь, А. С. Динамические системы и модели биологии / А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. – М. : Физматлит. 2010. 400 с.
18. Капица, С. П. Феноменологическая математическая модель роста народонаселения мира / С. П. Капица // Математическое моделирование. – 1992. – Т. 4. № 6. – С. 65-79.

19. Братусь, А. С. Дискретные динамические системы и математические модели в экологии : учебное пособие / А. С. Братусь, А. С. Новожилов, Е. В. Родина. – М. : МИИТ, 2005. – 139 с
20. Пякилля, Б. И. Идентификация математической модели робототехнической системы / Б. И. Пякилля // Математические структуры и моделирование. – 2014. – № 4 (32). – С. 100-104
21. Uddin, N. System Identification of Two-Wheeled Robot Dynamics Using Neural Networks / N Uddin // J. Phys.: Conf. Ser. – 2020. – Vol. 1577. – С. 012034
22. Ефимов, И. Н. Компьютерное моделирование динамических систем / И. Н. Ефимов, Е. А. Морозов, К. М. Селиванов – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014. – 134 с.
23. Эйкхофф, П. Основы идентификации систем управления / П. Эйкхофф. – М.: Мир, 1975. – 680 с.
24. Звонарев, С. В. Основы математического моделирования: учебное пособие / С. В. Звонарев. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, – 2019. – 112 с.
25. Гордин, В. А. Дифференциальные и разностные уравнения: Какие явления они описывают и как их решать : учеб. пособие / В. А. Гордин. – Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». – М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2016. – 531 с.
26. Ротач, В. Я. Теория автоматического управления / В. Я. Ротач. – М.: ЗАО «Издательский дом МЭИ», 2008. – 396 с.
27. Попов, Е. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем / Е. П. Попов, И. П. Пальтов. – М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 793 с.
28. Gauss, C. F. Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium / Gauss, Carl Friedrich // Publisher: Cambridge University Press Print publication year – 2011. – First published in: 1809.
29. Fisher, R. A. On an Absolute Criterion for Fitting Frequency Curves / R. A. Fisher // Statistical Science. 1997. – № 12 (1) – С. 39-41

30. Райбман, Н. С. Что такое идентификация? / Н. С. Райбман. – М.: Наука, 1970. – 119 с.
31. Райбман, Н. С. Построение моделей процессов производства / Н. С. Райбман, В. М. Чадеев. – М.: Энергия, 1975. – 375 с.
32. Цыпкин, Я. З. Основы информационной теории идентификации / Я. З. Цыпкин. – М. : Наука, 1984. – 320 с.
33. Водовозов, А. М. К вопросу об идентификации линейных динамических систем по результатам экспериментальных исследований / А. М. Водовозов, А. С. Елюков // Системы управления и информационные технологии. – 2008. – № 2 (32) – С. 253-256.
34. Цибизова, Т. Ю. Идентификация нелинейных систем автоматического управления при помощи фильтров Вольтерра / Т. Ю. Цибизова // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 2. Ч. 14. – С. 3070-3074.
35. Авдеенко, Т. В. Идентификация линейных динамических систем с использованием концепции сепараторов параметрического пространства / Т. В. Авдеенко // Автоматика и программная инженерия. – 2013. – № 1(3). – С. 16-23.
36. Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник в 5-ти томах. 2-е изд., перераб. и доп / под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. – М. : Изд-во МГТУ, 2004. – 616 с.
37. Емельянов, С. В. Математические методы теории управления : проблемы устойчивости, управляемости и наблюдаемости / С. В. Емельянов. – Москва : Физматлит, 2013. – 197 с.
38. Пантелеев, А. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах: учеб. пособие / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова, А. В. Босов. – М. : Высш. шк., 2001. – 376 с.
39. Medvedev, A. V. Identification and control for linear dynamic system of unknown order / A. V. Medvedev // Optimization Techniques IFIP Technical Conference. – 1975. – С. 48–56.
40. Павлов, Ю. Н. Идентификация передаточной функции динамической системы по результатам эксперимента / Ю. Н. Павлов, В. М. Недашковский, Е. А.

Тихомирова, А. Е. Ширшаков // Машиностроение и компьютерные технологии. – 2017. – № 5. – С. 89-104.

41. Медведев, А. В. Основы теории адаптивных систем : монография / А.В. Медведев. – Красноярск : Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т., 2015. – 526 с.

42. Бойков, И. В. Методы идентификации динамических систем / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Программные системы: теория и приложения. – 2014. – Т. 5, № 5-2(23). – С. 79-96.

43. Медведев, А. В. Непараметрические системы адаптации / А. В. Медведев. – Новосибирск : Наука, 1983. – 174 с.

44. Корнеева, А. А. О непараметрической идентификации дискретно-непрерывных процессов при различной дискретности контроля переменных / А. А. Корнеева, А. В. Медведев // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 2.

45. Mineiro, P. Modelling path distributions using partially observable diffusion networks // Neural Computation. – 2002. – № 14 (7) С. 1507-1544

46. Modares, H. Solving nonlinear optimal control problems using a hybrid IPSO–SQP algorithm / H. Modares, M.-B. N. Sistani // Engineering Applications of Artificial Intelligence. – 2011. – № 24. – С. 476-484.

47. Chen, S. Neural networks for nonlinear dynamic system modelling and identification / S. Chen, S. A. Billings // International Journal of Control. – 1992. – № 56 (2). – С. 319–346.

48. Золотухин, Ю. Н. Идентификация динамики подвижного объекта с помощью нейронных сетей / Ю. Н. Золотухин, К. Ю. Котов, А. М. Свитова, Е. Д. Семенюк, М. А. Соболев // Автометрия. – 2018. – Т. 54, № 6. – С. 107-113.

49. Sersic, K. Parameter Identification Problem Solving Using Genetic Algorithm / K. Sersic, I. Urbiha // Proceedings of the 1 Conference on Applied Mathematics and Computation. – 1999. – С. 253-61.

50. Бураков, С. В. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом генетического программирования / С. В.

Бураков, Е. С. Семенкин // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. – 2011. – Т. 4, № 1. – С. 61-69.

51. MacNeil, P. E. A genetic algorithm approach to the solution of a differential equation / P. E. MacNeil, S. R. Schultz // Proceedings of the IEEE SoutheastCon 2010 (SoutheastCon), Concord, NC, USA. – 2010. – С. 448-450.

52. Дивеев, А. И. Метод генетического программирования с сетевым оператором для идентификации систем управления / А. И. Дивеев, Е. А. Софронова // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). – 2010. – №5. – С. 623-632.

53. Diveev, A. I. Machine Learning Control by Symbolic Regression / A. I. Diveev, E. Yu. Shmalko – Cham, Switzerland: Springer, 2021. – 155 с.

54. Хритonenko, Д. И. Адаптивные коллективные нейро-эволюционные алгоритмы интеллектуального анализа данных : дис. ... канд. техн. наук : 05.13.01 / Хритonenko Дмитрий Иванович. – Красноярск, 2017. – 126 с.

55. Митрофанов, С. А. Решение задач символьной регрессии самоадаптивным алгоритмом генетического программирования / С. А. Митрофанов, Т. С. Карасева // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. – 2017. – № 6. – С. 49-51/].

56. Leung, K. Data mining using grammar based genetic programming and applications / K. Leung, M. Wong. – New York: Kluwer Academic Publisher, 2002. – 213 с.

57. Карасева, Т. С. Самоадаптивный алгоритм генетического программирования для решения задачи Коши и вариационной задачи в символьном виде / Т. С. Карасева // Труды Института системного анализа Российской академии наук. – 2019. – Т. 69. № 3. – С. 80-90.

58. Семенкин, Е. С. Самоконфигурируемые эволюционные алгоритмы моделирования и оптимизации : монография / Е. С. Семенкин, М. Е. Семенкина. – Магнитогорск : МДП, – 2014. – 310 с.

59. Семенкина, М. Е. Самоконфигурируемые эволюционные алгоритмы моделирования и оптимизации : дис. ... канд. техн. наук : 05.13.01 / Семенкина Мария Евгеньевна. – Красноярск, 2012. – 203 с.

60. Карасева, Т. С. Решение задач классификации самонастраивающимся алгоритмом генетического программирования / Т. С. Карасева // Информатика, управление и системный анализ. Труды V Всероссийской научной конференции молодых ученых с международным участием. – 2018. – С. 217-226.

61. Semenkin, E. S. Self-configuring Genetic Algorithm with Modified Uniform Crossover Operator / E. S. Semenkin, M. E. Semenkina // Advances in Swarm Intelligence. Lecture Notes in Computer Science. – 2012. – С. 414-421.

62. Карасева, Т. С. Решение задач символьной регрессии алгоритмом генетического программирования с оператором равномерного скрещивания / Т. С. Карасева, С. А. Митрофанов // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. – 2017. – Т. 2, № 13. – С. 24-26.

63. Shi, Q. Selective Motion Detection by Genetic Programming / Q. Shi, A. Song // IEEE Congress on Evolutionary Computation 2011. – 2010. – С. 496-503.

64. Palotti, J. Assessing documents' credibility with genetic programming / J. Palotti, T. Salles, G. L. Pappa, M. A. Gonçalves, W. Meira // 2011 IEEE Congress of Evolutionary Computation (CEC), New Orleans, LA, USA. – 2011. – С. 200-207

65. Fu, W. Genetic Programming For Edge Detection: A Global Approach / W. Fu, M. Johnston, M. Zhang // Lecture Notes in Computer Science. – 2011. – Vol. 7106. – С. 301-310.

66. Storn, R. On the usage of differential evolution for function optimization / R. Storn // Biennial Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS). – 2009. – С. 519-523.

67. Карасева, Т. С. Дифференциальная эволюция как инструмент для повышения эффективности методов искусственного интеллекта / Т. С. Карасева, С. А. Митрофанов // Материалы XXV Международной научно-практической конференции «Решетневские чтения». – 2021. – С. 180-181.

68. Feoktistov, V. Differential Evolution In Search of Solutions / V. Feoktistov. – Springer. – 2006. – 200 с.
69. Fogel, L. J. Artificial Intelligence through Simulated Evolution / L. J. Fogel // Evolutionary Computation: The Fossil Record, IEEE. –1998, С. 227-296.
70. Hollan, J. H. Adaptation in Natural and Artificial Systems / J. H. Hollan // MI : Univ. of Michigan Press. –1975.
71. Липинский, Л. В. Об автоматизации проектирования нейросетевых систем подавления шума с помощью алгоритма генетического программирования / Л. В. Липинский, И. С. Лыткин, М. Е. Семенкина // Теория и практика системного анализа, ТПСА-2010. – 2010. – С. 33-39.
72. Mitrofanov, S. A. Application of genetic programming algorithm for designing decision trees and their ensembles / S. A. Mitrofanov // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Associations. – 2020. – P. 12098.
73. Семенкин, Е. С. Эволюционные алгоритмы моделирования и оптимизации сложных систем: учебник / Е. С. Семенкин, Т. С. Карасева, С. А. Митрофанов. – Москва : ИНФРА-М, 2023. – 160 с.
74. Иванов, И. А. Эволюционный подход к проблеме отбора признаков в задаче распознавания эмоций / И. А. Иванов, Е. А. Сопов // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. – 2015. – Т. 1. № 11. – С. 314-315.
75. Zaloga, A. On the Application of Co-Operative Swarm Optimization in the Solution of Crystal Structures from X-Ray Diffraction Data / A. Zaloga, I. Yakimov, S. Burakov, E. Semenkin, S. Akhmedova, M. Semenkina, E. Sopov // Lecture Notes in Computer Science. – 2015. – Vol. 9140. – P. 89-96.
76. Semenkin, E. S. Integration of Intelligent Information Technologies Ensembles with Self-Configuring Genetic Programming Algorithm / E. S. Semenkin, M. E. Semenkina // Vestnik SibSAU. Aerospace technologies and control systems. – 2012. – No. 4(44). – P. 89-96.

77. Семенкина, М. Е. Самоадаптивные эволюционные алгоритмы проектирования информационных технологий интеллектуального анализа данных / М. Е. Семенкина // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2013. – № 1. – С. 13-24.

78. Бахвалов, Н. С. Численные методы: учебник / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – Москва : Лаборатория знаний, 2020. – 636 с.

79. Бураков, С. В. Алгоритмы генетического программирования для символьного решения обыкновенных дифференциальных уравнений : дисс. канд. техн. наук : 05.13.01 / Бураков Сергей Васильевич. – Красноярск, 2012. – 140 с.

80. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021614691 Российская Федерация. Программный комплекс эволюционной автоматической идентификации динамических систем : № 2021613218 : заявл. 12.03.2021 : опубл. 29.03.2021 / Карасева Т.С., Митрофанов С.А., Семенкин Е.С.; заявитель Карасева Татьяна Сергеевна. — 1 с.

81. Карасева, Т. С. Идентификация дифференциальных уравнений первого порядка самонастраивающимся алгоритмом генетического программирования / Т. С. Карасева // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. Сборник материалов V Международной научно-практической конференции, посвященной Дню космонавтики. В 3-х томах. Под общей редакцией Ю.Ю. Логинова. Красноярск. – 2019. – С. 44-46.

82. Storn, R. Differential Evolution - A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces. / R. Storn, K. Price // Journal of Global Optimization – 1997. – Т. 11. – P. 341–359.

83. Das, S. S. Recent Advances in Differential Evolution / S. S. Das, S. S. Mullick, P. N. Suganthan // An Updated Survey. Swarm Evol. Comput. – 2016. – Т. 27. – P. 1-30.

84. Stanovov, V. Biased parameter adaptation in differential evolution / V. Stanovov, S. Akhmedova, E. Semenkin // Information Sciences. – 2021. – Т. 566. – P. 215-238.

85. Karaseva, T. Evolutionary Approaches to the Identification of Dynamic Processes in the Form of Differential Equations and Their Systems / T. Karaseva, E. Semenkin // Algorithms. – 2022.

86. Karaseva, T. S. Hybrid approach to the dynamic systems identification based on the self-configuring genetic programming algorithm and the differential evolution method / T. S. Karaseva, O. E. Semenkin // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Krasnoyarsk Science and Technology City Hall., Krasnoyarsk, Russian Federation. – 2021. – P. 12076.

87. Karaseva, T. S. Self-configuring genetic programming algorithm for solving symbolic regression problems / T. S. Karaseva, S. A. Mitrofanov // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Associations. – 2020. – P. 52069.

88. Niehaus, J. Adaption of Operator Probabilities in Genetic Programming EuroGP / J. Niehaus, W. Banzhaf // Lecture Notes in Computer Science (Springer, Berlin, Heidelberg). – 2001. – vol. 2038 – P. 325–336.

89. Tanabe, R. Success-History Based Parameter Adaptation for Differential Evolution / R. Tanabe, A. Fukunaga // Graduate School of Arts and Sciences, Tokyo. – 2013. – P. 71–78.

90. Митрофанов, С. А. Оптимизация траектории полета космического аппарата методом дифференциальной эволюции / С. А. Митрофанов // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. – 2018. – Т. 2, № 4(14). – С. 81-83.

91. Долгий, Ю. Ф. Математические модели динамических систем с запаздыванием: учебное пособие / Ю. Ф. Долгий, П. Г. Сурков. — Екатеринбург : УрФУ, 2012. — 122 с.

92. Reimer, M. Identifying articulatory goals from kinematic data using principal differential analysis / M. Reimer, F. Rudzicz // Proceedings of Interspeech 2010, Makuhari Japan. – 2010. – P. 1608–1611.

93. Karaseva, T. S. Identification of differential equations systems with various input effects / T. S. Karaseva // Hybrid methods of modeling and optimization in

complex systems. Proceedings of the International Workshop «Hybrid methods of modeling and optimization in complex systems» (HMMOCS 2022). «European Proceedings of Computer and Technology» Krasnoyarsk Regional Science and Technology City Hall, Russia Siberian Federal University, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. London, United Kingdom. – 2022. – P. 152-159.

94. Карасева, Т. С. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений самоадаптивным алгоритмом генетического программирования / Т. С. Карасева // Решетневские чтения. – 2017. – Т. 2. – С. 189-190.

95. Бураков, С. В. О решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений в символьном виде методом генетического программирования / С. В. Бураков, Е. С. Семенкин // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. – 2010. – Т. 1. № 6. – С. 310-311.

96. Burakov, S. Solving variational and cauchy problems with genetic programming algorithms / S. Burakov, E. Semenkin // Bioinspired optimization methods and their applications. Proceedings of the Fifth International Conference on Bioinspired Optimization Methods and their Applications, BIOMA 2012. – 2012. – P. 311-321.

97. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021667197 Российская Федерация. Программный комплекс идентификации динамических систем на основе решения задачи Коши самоконфигурируемыми эволюционными алгоритмами : № 2021666431 : заявл. 19.10.2021 : опубл. 26.10.2021 / Карасева Т.С., Митрофанов С.А., Семенкин Е.С.; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева». — 1 с.

98. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023660264 Российская Федерация. Программный комплекс на основе гибридного эволюционного подхода для идентификации динамических систем: № 2023619270 : заявл. 11.05.2023 : опубл. 18.05.2023 / Карасева Т.С., Семенкин Е.С.; заявитель

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет» (СФУ). — 1 с.

99. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023660334 Российская Федерация. Программная система на основе адаптивного алгоритма генетического программирования для автоматизированного поиска моделей динамических объектов в виде системы дифференциальных уравнений : № 2023619132 : заявл. 11.05.2023 : опубл. 19.05.2023 / Карасева Т.С., Семенкин Е.С.; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева». — 1 с.

100. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. – Москва–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2003. – 235 с.

101. Карасева, Т. С. Об эффективности символьного решения дифференциальных уравнений алгоритмом генетического программирования / Т. С. Карасева // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. – 2018. – Т. 2. № 4 (14). – С. 40-42.

102. Гатин, Р. Р. Функции и возможности библиотеки Tensorflow для программирования рекуррентных сетей с помощью языка Python / Р. Р. Гатин, Р. Р. Бикмухаметов // Наука сегодня: реальность и перспективы: Материалы международной научно-практической конференции, Вологда, 27 февраля 2019 года. – Вологда: ООО "Маркер", 2019. – С. 10-11.

103. Sutskever, L. Sequence to Sequence Learning with Neural Networks / L. Sutskever, O. Vinyals, Q. Le // Electronic Proceedings of the Neural Information Processing Systems Conference. – 2014. – Т. 27. – С. 5346.

104. Socher, R. Recursive Deep Models for Semantic Compositionality Over a Sentiment Treebank / R. Socher, A. Perelygin, J. Y. Wu, J. Chuang, C. D. Manning, A. Y. Ng, C. Potts // Emnlp 2013 : journal. – 2013.

105. Gers, F. Learning Precise Timing with LSTM Recurrent Networks / F. Gers, N. Schraudolph, J. Schmidhuber. // *Journal of Machine Learning Research*. 3. – 2002. – P. 115-143.
106. Браништи, В. В. Оптимизация алгоритмов расчета коэффициента размытости для непараметрических оценок / В. В. Браништи, А. В. Медведев // *Актуальные проблемы авиации и космонавтики*. – 2014. – Т. 1, № 10. – P. 286-287.
107. Medvedev, A. V. Nonparametric modelling of multidimensional memoryless processes / A. V. Medvedev, A. V. Tereshina, D. I. Yaresenko // *Computer Data Analysis and Modeling: Stochastics and Data Science: Proceedings of the Twelfth International Conference Minsk*. – 2019. – P. 237-241.
108. Иконников, О. А. Разработка и исследование непараметрических алгоритмов идентификации линейных динамических систем высоких порядков : дис. ... канд. техн. наук : 05.13.01 / Иконников Олег Александрович – Красноярск, 2003. – 145.
109. Волгина, О. А. Математическое моделирование экономических процессов и систем. 3-е изд. / О. А. Волгина, Н. Ю. Голодная, Н. Н. Одияко, Г. И. Шуман – М. : Кронус, 2014. – 200 с.
110. Ахтямов, А. М. Математические модели экономических процессов Монография / А. М. Ахтямов. – Уфа : РИЦ БашГУ, 2009. – 140 с.
111. Карасева, Т. С. О применении эволюционных алгоритмов для идентификации динамических процессов в экономике / Т. С. Карасева, Е. С. Семенкин // *Системы управления и информационные технологии*. – 2022. – № 1 (87). – С. 24-29.
112. Karaseva, T. On the automatic identification of differential equations using a hybrid evolutionary approach / T. Karaseva, E. Semenkin // В сборнике: 2021 35th International Conference on Information Technologies, InfoTech 2021. Proceedings. 35. – 2021.
113. Базыкин, А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций / А. Д. Базыкин. – М. : Наука, 1985. – 181 с.

114. Рикитаки, Т. Электромагнетизм и внутреннее строение Земли / Т. Рикитаки. – Л. : Недра, 1968. – 332 с.
115. Егорчев, М. В. Моделирование продольного углового движения самолета: сопоставление теоретического, эмпирического и полуэмпирического подходов / М. В. Егорчев, Д. С. Козлов, Ю. В. Тюменцев // Научный вестник МГТУ ГА. – 2015. – №211 (1). – С. 116-123.
116. Карасева, Т. С. Моделирование зависимости скорости химической реакции от температуры самоадаптирующимся алгоритмом генетического программирования / Т. С. Карасева // В сборнике: Актуальные проблемы авиации и космонавтики. Сборник материалов VII Международной научно-практической конференции, посвященной Дню космонавтики: в 3 томах. Под общей редакцией Ю. Ю. Логинова. Красноярск. – 2021. – С. 150-151.
117. Гринченко, В. Т. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы / В. Т. Гринченко, В. Т. Мацыпура, А. А. Снарский. – М. : Изд. 3-е, испр. и доп. Издательство ЛКИ, 2010. – 280 с.
118. Карасева, Т. С. Идентификация динамических процессов в виде дифференциальных уравнений и их систем с помощью эволюционных подходов / Т. С. Карасева, Е. С. Семенкин // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Приборостроение». – 2023. – №3. – С. 84-98.
119. UCI Machine Learning Repository [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://archive.ics.uci.edu/ml/index.php>

Приложение А

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2021614691

**Программный комплекс эволюционной автоматической
идентификации динамических систем**

Правообладатель: *Карасева Татьяна Сергеевна (RU)*

Авторы: *Карасева Татьяна Сергеевна (RU), Митрофанов
Сергей Александрович (RU), Семенкин Евгений
Станиславович (RU)*

Заявка № **2021613218**

Дата поступления **12 марта 2021 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **29 марта 2021 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*



ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 0x02A5CF8C00B1ACF59A40A2F08092E9A118
Владелец **Ивлиев Григорий Петрович**
Действителен с 16.01.2021 по 15.01.2035

Г.П. Ивлиев

Приложение Б

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2021667197

Программный комплекс идентификации динамических систем на основе решения задачи Коши самоконфигурируемыми эволюционными алгоритмами

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева» (СибГУ им. М.Ф. Решетнева) (RU)*

Авторы: *Карасева Татьяна Сергеевна (RU), Митрофанов Сергей Александрович (RU), Семенкин Евгений Станиславович (RU)*

Заявка № 2021666431

Дата поступления 19 октября 2021 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 26 октября 2021 г.



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

Приложение В

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023660264

Программный комплекс на основе гибридного
эволюционного подхода для идентификации
динамических систем

Правообладатель: *Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский федеральный университет» (СФУ) (RU)*

Авторы: *Карасева Татьяна Сергеевна (RU), Семенкин
Евгений Станиславович (RU)*

Заявка № 2023619270

Дата поступления 11 мая 2023 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 18 мая 2023 г.



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов

Приложение Г

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023660334

**Программная система на основе адаптивного алгоритма
генетического программирования для
автоматизированного поиска моделей динамических
объектов в виде системы дифференциальных уравнений**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет науки и
технологий имени академика М.Ф. Решетнева» (RU)*

Авторы: *Карасева Татьяна Сергеевна (RU), Семенкин Евгений
Станиславович (RU)*

Заявка № **2023619132**

Дата поступления **11 мая 2023 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **19 мая 2023 г.**



*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 68b890077e14c40f0a94edbd24145d5c7
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 2.03.2022 по 26.05.2023

Ю.С. Зубов