

На правах рукописи

КАРАСЕВА ТАТЬЯНА СЕРГЕЕВНА

**ЭВОЛЮЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СИМВОЛЬНОЙ
РЕГРЕССИИ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

2.3.1 – Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Красноярск – 2023

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева», г. Красноярск

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Семенкин Евгений Станиславович

Официальные оппоненты: **Горнов Александр Юрьевич**,
доктор технических наук,
Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт динамики систем и
теории управления имени В.М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук,
лаборатория оптимального управления, главный
научный сотрудник
Скобцов Юрий Александрович,
доктор технических наук, профессор
ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский
государственный университет аэрокосмического
приборостроения», кафедра компьютерных
технологий и программной инженерии, профессор

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Южный федеральный университет»

Защита состоится «15» декабря 2023 года в 15:00 на заседании диссертационного совета 24.2.403.01 при Сибирском государственном университете науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева по адресу: 660037, г. Красноярск, пр. им. газеты «Красноярский рабочий», 31

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГБОУ ВО «Сибирского государственного университета науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева» и на сайте <https://www.sibsau.ru>.

Автореферат разослан «____» октября 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Панфилов Илья Александрович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. Исследование динамических систем обычно предполагает построение модели по численным данным, описывающим поведение системы, то есть идентификацию динамической системы¹. Большинство методов численной идентификации решает задачи с помощью построения модели, которая, по сути, является черным ящиком. Однако наиболее распространенным и удобным для дальнейшего применения является представление объекта в символьном виде в виде дифференциальных уравнений или их систем. Но для построения таких моделей методам зачастую требуются априорные знания, например, о структуре дифференциальных уравнений, которых на практике может и не быть.

Преодолеть недостаток этих методов позволяет сведение задачи идентификации к задаче символьной регрессии². Задача символьной регрессии представляет собой нахождение математического выражения в символьной форме, наилучшим образом аппроксимирующего взаимосвязь между конечными наборами независимых и зависимых переменных. Математическое выражение состоит из функций, переменных и числовых констант. Таким образом, поиск решения задачи символьной регрессии можно описать как построение регрессионной модели путем перебора различных суперпозиций функций из некоторого заданного набора (функционального множества). Переменные и константы составляют терминальное множество. Одним из методов решения задачи символьной регрессии является метод из класса эволюционных – алгоритм генетического программирования. Таким образом, можно предположить, что применение эволюционных алгоритмов символьной регрессии при идентификации динамических систем, с одной стороны, обеспечит удобное для дальнейших исследований представление, а с другой, ослабит априорные требования и ограничения на модель.

На сегодняшний день разработано большое число методов, однако в связи с усложнением исследуемых процессов разработка новых подходов остается актуальной задачей. Поэтому можно заключить, что работа, направленная на совершенствование подходов к идентификации динамических систем, **является актуальной**.

Степень разработанности темы. Задача восстановления функций по наблюдениям переменных решается в течение более чем двух веков, но возникают новые постановки задачи идентификации, увеличивается разнообразие особенностей исходных данных, аппроксимируемых функций. Известно, что методы из класса эволюционных и ранее применялись для поиска моделей динамических систем. Применение эволюционных алгоритмов для решения задачи идентификации используется как в параметрических, так и непараметрических подходах. Так в работе авторов А. Manocha, А. Sharma

¹ Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя: Пер. с англ. / Под ред. Я.З. Цыпкина. – Москва: Наука, 1991, 432 с.

² Дивеев, А. И. Классические методы символьной регрессии для поиска структур математических выражений (обзор) / А. И. Дивеев, Е. Ю. Шмалько // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. – 2018. – № 20. – С. 100-132.

описывается применение генетического алгоритма для оптимизации коэффициентов ПИД-регулятора для последующего формирования набора нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих поведение самолета. Применение эволюционных алгоритмов оптимизации для подбора коэффициентов дифференциальных уравнений представлены в работах G. Parmar, R. Prasad, S. Mukherjee, В.А. Охорзина и И.С. Рыжикова. Применение различных видов алгоритма генетического программирования для решения задачи идентификации рассматривается в работах А.И. Дивеева.

Очевидно, что невозможно создать универсальный подход для решения задачи идентификации динамических систем. Но существует потребность в разработке подходов, позволяющих получить модель в символьной форме с минимальным количеством априорных ограничений на структуру.

Целью диссертационного исследования является повышение эффективности применения методов решения задач символьной регрессии при структурно-параметрической идентификации динамических систем за счет применения самонастраивающихся эволюционных алгоритмов моделирования и оптимизации.

Для достижения поставленной цели были определены следующие **задачи**:

1. Выполнить аналитический обзор существующих методов решения задачи идентификации динамических систем.
2. Привести задачу структурно-параметрической идентификации динамических систем к задаче символьной регрессии.
3. Предложить модификации алгоритма генетического программирования, повышающие его эффективность при разработке подходов к идентификации динамических систем в виде дифференциальных уравнений как линейного, так и нелинейного вида и их систем.
4. На основе модифицированного алгоритма генетического программирования и алгоритма дифференциальной эволюции разработать подходы к структурно-параметрической идентификации динамических объектов в виде дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.
5. Разработать модификации алгоритма генетического программирования, повышающие его эффективность при решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений как альтернативной модели динамической системы.
6. Исследовать эффективность нахождения решения задачи идентификации динамических систем предложенными подходами на тестовых и практических задачах.

Методы исследования. При выполнении диссертационной работы использовались методы математического анализа, теории автоматического управления, теории оптимизации, теории вероятностей и математической статистики, вычислительной математики, обработки и анализа данных.

Научная новизна результатов диссертационной работы заключается в следующем:

1. Разработан модифицированный алгоритм генетического программирования, отличающийся терминальным множеством и

модифицированными эволюционными этапами и позволяющий получать решение задачи структурно-параметрической идентификации динамических систем в виде дифференциального уравнения по экспериментальным данным.

2. Разработан новый подход на основе модифицированного алгоритма генетического программирования и дифференциальной эволюции к решению задачи структурно-параметрической идентификации динамических объектов в виде дифференциального уравнения, позволяющий автоматизировано определять его порядок, структуру и коэффициенты.

3. Разработан новый подход на основе модифицированного алгоритма генетического программирования и дифференциальной эволюции к решению задачи структурно-параметрической идентификации динамических объектов в виде системы дифференциальных уравнений, позволяющий автоматизировано определять количество дифференциальных уравнений в системе, их порядок, структуру и коэффициенты.

4. Разработан алгоритм генетического программирования для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, отличающийся от известного применением процедуры самонастройки и позволяющий получать решение в символьном виде.

Теоретическая значимость результатов диссертационной работы состоит в том, что предложены, реализованы и исследованы новые эволюционные подходы к решению задачи структурно-параметрической идентификации динамических систем. В работе учитываются особенности сведения задачи идентификации к задаче символьной регрессии, разработана модификация алгоритма генетического программирования для кодирования дифференциальных уравнений в виде дерева. Предложена процедура оптимизации неизвестных заранее начальных условий динамической системы. Предложены модификации подходов к идентификации динамических систем, повышающие эффективность этих подходов за счет применения метода дифференциальной эволюции.

Разработка алгоритмов поиска модели динамической системы является существенным вкладом в развитие методов идентификации динамических систем и эволюционных подходов.

Практическая ценность. В ходе проведения исследований были разработаны четыре программные системы для решения задач структурно-параметрической идентификации динамических систем. Первая программная система позволяет идентифицировать динамический объект в виде дифференциального уравнения как линейного, так и нелинейного вида, произвольного порядка, не выше заданного пользователем, по экспериментальным данным. Программная система апробировалась при решении практических задач химической кинетики и мониторинга состояния гидравлических систем. Вторая программная система предназначена для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений самонастраивающимся алгоритмом генетического программирования. Третья и четвертая программные системы позволяют идентифицировать динамические объекты в виде системы дифференциальных уравнений. В программных

системах отсутствуют ограничения на количество входных и выходных характеристик, структуру правых частей дифференциальных уравнений, а их порядок пользователем только ограничивается, но не фиксируется. Особенности программных систем является автоматизация работы алгоритма генетического программирования за счет самонастройки и гибридизация с методом дифференциальной эволюции. Программные системы апробировались при решении практических задач мониторинга состояний гидравлической системы и анализа состава воздуха в сильнозагрязненной местности. Практическая ценность всех разработанных программных систем заключается в том, что они могут быть использованы конечными специалистами не являющимися экспертами в области эволюционных алгоритмов.

Программные системы зарегистрированы в Роспатенте.

Реализация результатов работы.

Диссертационная работа выполнена в рамках проектов:

1. Мегагрант «Гибридные методы моделирования и оптимизации в сложных системах», № 075-15-2022-1121 2022-н.в.

2. Проект «Методы машинного обучения для идентификации свойств задач глобальной оптимизации в нестационарной среде и автоматической адаптации эволюционных и бионических алгоритмов» в рамках гранта Российского фонда фундаментальных исследований, проводимый совместно РФФИ и Австрийским научным фондом. Договор № 21-51-14003/21, 2021-2023 гг.

3. Проекты «Развитие теории самоконфигурирующихся алгоритмов машинного обучения для моделирования и прогнозирования характеристик компонентов сложных систем», № FEFE-2020-0013 и № FEFE-2023-0004, по государственному заказу Минобрнауки РФ, 2020-2023 гг.

4. Проект «Разработка программного комплекса эволюционной автоматической идентификации динамических систем на предприятиях химической и металлургической промышленности», Фонд содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере, программа «УМНИК». Договор № 14243ГУ/2019, 2019-2021 гг.

5. Проект «Разработка теоретических основ автоматизации комплексного моделирования сложных систем методами вычислительного интеллекта» № 2.1680.2017/ПЧ по заказу Минобрнауки РФ, 2018-2019 гг.

6. Российско-германский проект «Detection of anomalies in 3D grey scale images of fibre materials» в рамках программы стратегического партнерства с Ульмским университетом (Германия) при поддержке немецкой службы академических обменов (DAAD), 2017-2018 гг.

Основные защищаемые положения:

1. Предложенные подходы к структурно-параметрической идентификации динамических систем позволяют получать модели в символьном виде, а именно, в виде дифференциальных уравнений и их систем, что делает модель пригодной для дальнейших исследований и интерпретации.

2. Разработанные подходы к идентификации динамических систем позволяют автоматизировано определять порядок, структуру правых частей,

коэффициенты и начальные условия дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы.

3. Разработанные подходы к структурно-параметрической идентификации динамических систем позволяют осуществлять построение моделей при произвольном количестве входных и выходных переменных, то есть символьные модели в виде дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

4. Предложенные подходы обладают свойством устойчивости к наличию шума и малому объему экспериментальных данных.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликованы 27 работ, из которых – 3 в изданиях, входящих в Перечень ВАК, 9 – в изданиях, индексируемых в международных базах Scopus и Web of Science. 4 программные системы зарегистрированы в Роспатенте.

Апробация работы. Основные положения и результаты работы обсуждались на Всероссийских и Международных конференциях: 35th International Conference on Information Technologies «InfoTech-2021» (2021 г., Варна, Болгария), The International Workshop on Mathematical Models and their Applications «IWMMA» (2019-2022, Красноярск), The International Workshop «Hybrid methods of modeling and optimization in complex systems» – HMMOCS (2022 г., Красноярск), II International conference «Modernization, innovations, progress: advanced technologies in material science, mechanical and automation engineering» – MIP: Engineering-2020 (2020, Красноярск), International conference «Advanced technologies in aerospace, mechanical and automation engineering» – MIST: Aerospace (2019, 2020, Красноярск), Международная научно-практическая конференция «Решетневские чтения» (2017-2021, г. Красноярск), Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы авиации и космонавтики» (2017-2021 гг., Красноярск), Международная научно-практическая конференция «Молодежь. Общество. Современная наука, техника и инновации» (2017-2021 гг., Красноярск), Всероссийская научная конференция молодых ученых с международным участием «Информатика, управление и системный анализ» (2018 г., Ростов-на-Дону).

Структура работы. Диссертационная работа изложена на 128 страницах и состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы на 119 источников и 4 приложений.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность работы, сформулирована цель и поставлены задачи исследования. Представлены основные положения, выносимые на защиту, научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

В первой главе рассматривается постановка задачи идентификации динамических систем, определены основные подходы к идентификации, представлено сведение задачи идентификации к задаче символьной регрессии.

Динамическая система представляет собой объект или процесс, который характеризуется своим состоянием как совокупностью характеристик в некоторые моменты времени, и для которой определен закон эволюции состояния во времени.

Принято считать, что начало развития теории идентификации как науки связано с работами К. Ф. Гаусса, который для данных целей разработал метод наименьших квадратов. Основоположником теории идентификации динамических систем в России является Н.С. Райбман. К этой же школе принадлежат и работы Я.З. Цыпкина, который отмечал, что задача идентификации систем является одной из основных задач теории и техники автоматического управления. А в работе П. Эйкхоффа дано следующее определение: «Задача идентификации формулируется следующим образом: по результатам наблюдений над входными и выходными переменными системы должна быть построена оптимальная в некотором смысле модель, то есть формализованное представление этой системы».

Для поиска модели динамической системы разработаны и применяются различные подходы. Одним из наиболее значимых направлений теории идентификации является поиск моделей на основе частотных и временных характеристик, которые получают при искусственном воздействии на исследуемую систему, что не всегда возможно. Методы идентификации можно разделить на параметрические и непараметрические. Первые требуют наличия априорной информации о структуре модели, а поиск модели заключается в подборе параметров. Однако на сегодняшний день структуры модели сложных производственных процессов затруднительно получить аналитически. При использовании непараметрических методов предъявляется большое число требований к данным: качество моделирования существенно зависит от таких свойств выборки, как ее объем и наличие шума.

В работах Ю.Н. Золотухина, К.Ю. Котова и А.М. Свитовой, К. М. Passino, S. Yurkovich, S. Chen, S. A. Billings, применяются такие методы как нейронные сети, нечеткая логика, которые позволяют получить модель, описывающую реакцию на задаваемое управляющее воздействие, однако они не позволяют получить модель в символьном виде, доступном для последующего исследования. Решение задачи идентификации методом символьной регрессии рассматривается в работе Данг Тхи Фука, А. И. Дивеева, Е. А. Софроновой, где основное внимание уделено представлению в виде дифференциальных уравнений первого порядка.

Одним из наиболее предпочтительных способов представления моделей являются дифференциальные уравнения и их системы. Данное представление удобно для дальнейших исследований и интерпретации, информативно для специалистов тех предметных областей, в рамках которых решается задача поиска модели. Поэтому осуществим постановку задачи идентификации, учитывая, что конечная модель будет представлена в виде дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим исходную задачу идентификации непрерывной динамической системы. Управляющее воздействие, которое подается на систему, и ее состояние будем называть, соответственно, входами и выходами динамической системы.

Исходная задача идентификации представляет собой обратную задачу математического моделирования, то есть по экспериментальным измерениям входных переменных и выходных характеристик необходимо построить модель исследуемого объекта. В общем случае, в каналах измерения действует стохастическая помеха. Необходимо построить символьную модель в форме дифференциального уравнения, описывающую взаимосвязь между входами и выходами системы, а начальные условия считаем известными.

В такой постановке задача идентификации сводится к задаче символьной регрессии, а именно, к автоматизированному определению максимального порядка производной в левой части дифференциального уравнения, и поиску правой части, описывающей поведение системы на основе экспериментальных данных. Стоит отметить, что в разработанных в данном диссертационном исследовании подходах структура правой части не ограничивается линейным видом.

Для решения задачи символьной регрессии применяется алгоритм генетического программирования – метод из класса эволюционных, позволяющий получать модель в виде формулы, пригодной для дальнейшего исследования. Сведение задачи идентификации к задаче символьной регрессии и последующее применение алгоритма генетического программирования позволит минимизировать такие исходные ограничения на модель, как фиксированный порядок дифференциального уравнения и предопределенность структуры его правой части.

Во второй главе рассматриваются разработанные подходы на основе алгоритма генетического программирования к структурно-параметрической идентификации динамических систем в виде дифференциальных уравнений и их систем по экспериментальным данным и подход к решению задачи Коши.

В соответствии с терминологией из области эволюционных алгоритмов потенциальную модель будем называть индивидом, совокупность индивидов образует популяцию.

Для возможности применения алгоритма генетического программирования необходима его модификация для работы с индивидами, кодирующими дифференциальное уравнение.

Исходя из описанной в первой главе постановки задачи на основании данных измерений входных $x_1, \dots, x_m$ и выходного y характеристик процесса (где m – количество входных переменных) в моменты времени t требуется построить модель в виде дифференциального уравнения (1):

$$\hat{y}^{(k)} = \hat{f}(\hat{y}', \dots, \hat{y}^{(k-1)}, \hat{y}, x_1, \dots, x_m, t). \quad (1)$$

Особенностью алгоритма генетического программирования является представление индивида в виде древовидной структуры. Следовательно, при разработке подхода для решения задачи идентификации динамических систем необходимо определить процедуру задания порядка дифференциального уравнения и модифицировать терминальное и функциональное множества,

требуемые для построения решения в виде дерева. Для формирования дерева необходимо задать максимально возможный порядок дифференциального уравнения K . Следовательно, решение задачи идентификации мы будем искать как дифференциальное уравнение (1) порядка $k \leq K$, где $k \in N$. Порядок k не фиксируется, а только ограничивается. Таким образом, при формировании популяции в нее будут входить дифференциальные уравнения, закодированные в виде деревьев, порядок которых будет определен случайным образом для каждого индивида. В терминальное множество входит набор всех входных ($x_1, \dots, x_m$) и выходной (y) переменных, набор констант, производные $y', \dots, y^{(k-1)}$. Функциональное множество представлено математическими функциями, используемыми алгоритмом для формирования решения (+, -, /, $\times$, sin, cos, tg, ctg, exp, ln, |a|, a^2).

Корневая вершина дерева хранит не только элемент функционального множества, но и информацию о максимальном порядке производной для данного индивида. Пример дерева представлен на рисунке 1.

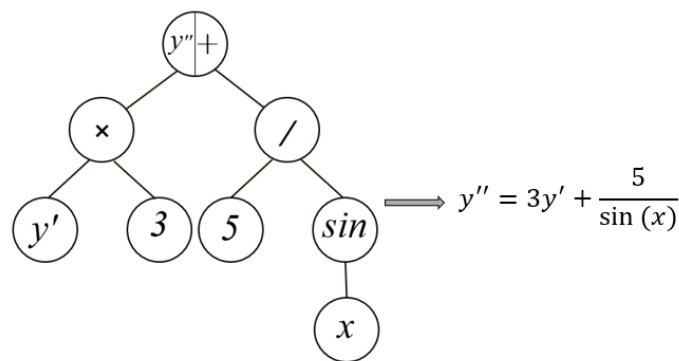


Рисунок 1 – Пример представления дифференциального уравнения в виде дерева

Получение модели в виде дифференциального уравнения требует переопределения и других шагов, имитирующих процессы естественной эволюции, таких как инициализация, вычисление пригодности, селекция, скрещивание, мутация³.

Для каждого индивида вычисляется значение пригодности (2-3):

$$fitness = \frac{1}{1 + error}, \quad (2)$$

$$error = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{y}_i - y_i)^2}{\max(y_i) - \min(y_i)}. \quad (3)$$

где n – объем выборки, $\hat{y}_i$ – значение индивида в i -ой точке, y_i – значения из исходной выборки.

При вычислении ошибки полученной модели требуется вычисление производной в точках исходной выборки. В предложенном подходе оценка выхода дифференциального уравнения $\hat{y}_i$ по точкам исходной выборки ($x_{1i}, \dots$,

³ Самоконфигурируемые эволюционные алгоритмы моделирования и оптимизация / Е. С. Семенкин, М. Е. Семенкина. – Магнитогорск : Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева", 2014. – 312 с.

x_{mi}) осуществлялась методом Рунге-Кутты 4 порядка. Индивид с наибольшей пригодностью является лучшим на текущем цикле алгоритма (поколении). Критерием останова в предложенных подходах является достижение заданного уровня пригодности, либо, в противном случае, выполнение заданного количества эволюционных циклов.

В разработанном подходе эволюционный процесс был изменен и приближен к схеме дифференциальной эволюции, так как этого требовало дальнейшее применение адаптации параметров методом Success History Adaptation (SHA).

Таким образом, предложенный подход можно отнести к методам структурно-параметрической идентификации, так как структура дифференциального уравнения формируется с помощью модифицированного алгоритма генетического программирования, а для подбора числовых параметров, таких как коэффициенты уравнения и начальные условия, выполняется параллельная оптимизация методом дифференциальной эволюции. На рисунке 2 представлена схема предложенного подхода.

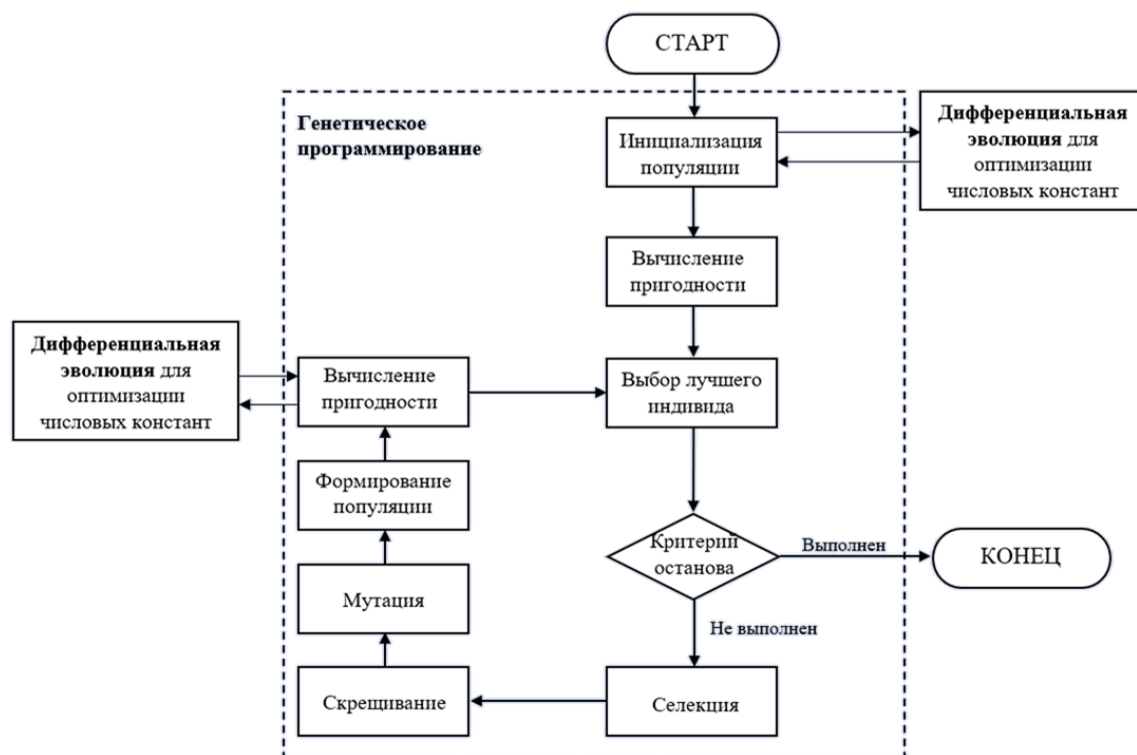


Рисунок 2 – Схема эволюционного подхода к идентификации динамических систем в виде дифференциальных уравнений

Предложенный подход позволяет получить модель динамической системы в виде дифференциального уравнения с произвольными структурой правой части, порядком и количеством входных переменных.

Но зачастую в реальных процессах выход динамической системы характеризуется несколькими переменными. Для построения модели таких процессов следует использовать представление в виде системы дифференциальных уравнений. В данной работе предложен и исследован

эволюционный подход для идентификации динамических объектов в виде системы дифференциальных уравнений. В такой постановке задачи требуется по данным измерений входных ($x_1, \dots, x_m$) и выходных ($y_1, \dots, y_s$) характеристик процесса (где m – количество входных и s выходных переменных) построить модель в виде системы дифференциальных уравнений произвольного порядка (4):

$$\begin{cases} \hat{y}_1^{(k)} = \hat{f}_1(x_1, \dots, x_m, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_s, t) \\ \hat{y}_2^{(k)} = \hat{f}_2(x_1, \dots, x_m, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_s, t) \\ \dots \\ \hat{y}_s^{(k)} = \hat{f}_s(x_1, \dots, x_m, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_s, t) \end{cases} \quad (4)$$

Порядок дифференциального уравнения k будем считать ограниченным значением K , задаваемым пользователем, как и в предыдущем подходе. Для разных уравнений системы порядок k может отличаться.

Данный подход основывается на описанном выше эволюционном походе для идентификации динамической системы в виде дифференциального уравнения. Таким образом, во втором предложенном подходе систему дифференциальных уравнений должны закодировать совокупностью деревьев (рисунок 3).

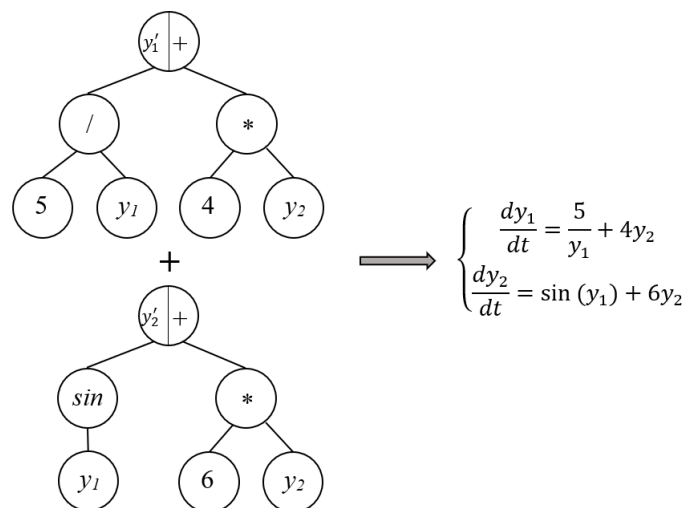


Рисунок 3 – Пример системы дифференциальных уравнений, закодированных в виде дерева

Особенностью предлагаемого подхода является реализация комбинации из нескольких алгоритмов генетического программирования (для s уравнений в системе требуется s алгоритмов генетического программирования), каждый из которых осуществляет поиск одного из уравнений системы. Количество уравнений s соответствует количеству выходных переменных в исследуемой системе. Схема, демонстрирующая основные этапы подхода, представлена на рисунке 4.

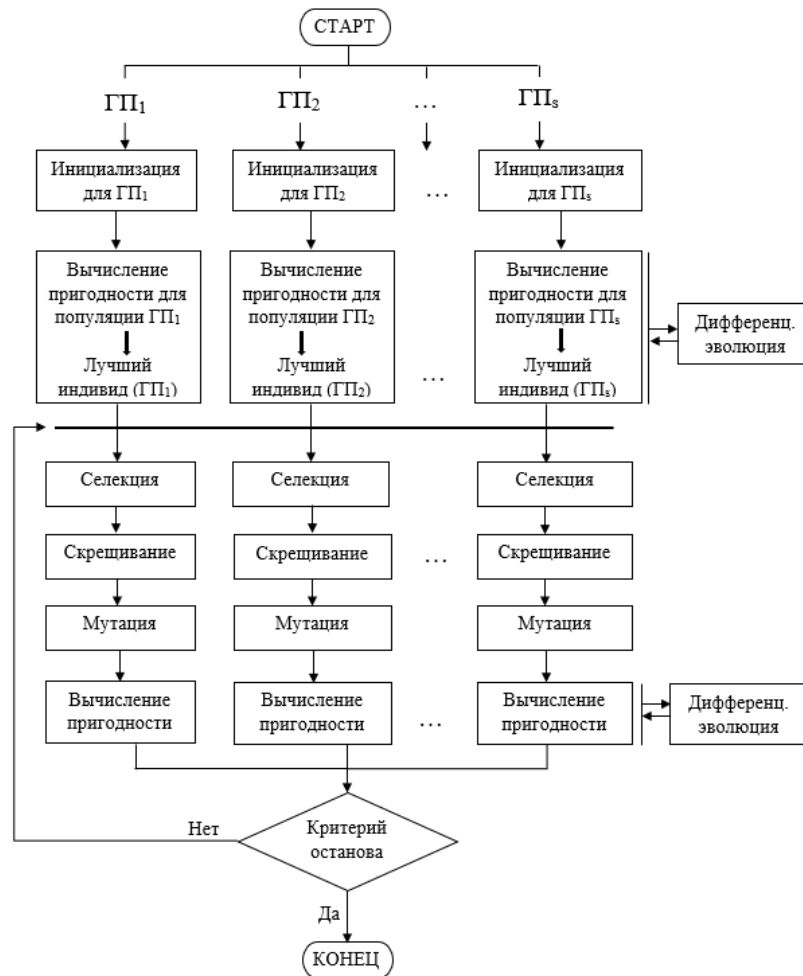


Рисунок 4 – Схема эволюционного подхода к идентификации динамических систем в виде системы дифференциальных уравнений (ГП – генетическое программирование)

Далее каждый алгоритм генетического программирования формирует популяцию индивидов, являющихся потенциальными представлениями каждого из s дифференциальных уравнений в системе. Для всех индивидов вычисляется пригодность (однократный полный перебор всевозможных комбинаций индивидов), на основании полученных значений в каждой популяции определяется лучший индивид. Вычисление пригодности для каждого индивида каждой популяции осуществляется подстановкой в каждое из уравнений системы, в качестве остальных уравнений выбираются лучшие индивиды соответствующих популяций. Вычисление осуществляется в соответствии с формулами (5-6):

$$fitness = \frac{1}{1 - error}, \quad (5)$$

$$error = \frac{1}{sn} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^n \frac{(y_{ij} - \hat{y}_{ij})^2}{\max(y_{ij}) - \min(y_{ij})}, \quad (6)$$

где n – размер выборки, s – количество уравнений в системе, y_{ij} значения исходной выборки, $\hat{y}_{ij}$ – значение модели.

В представленном подходе отсутствуют ограничения на количество дифференциальных уравнений, входящих в систему, их порядок и структуру. А

полученные в символьном виде модели возможно интерпретировать в контексте рассматриваемой предметной области.

Альтернативой для прогнозирования и управления технологическими процессами может служить решение дифференциального уравнения, например, если полученное дифференциальное уравнение имеет сложную для исследования структуру. В данной работе предложен подход к решению задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений самонастраивающимся алгоритмом генетического программирования.

Пусть имеется уравнение в виде (7):

$$F(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0 \quad (7)$$

и начальные условия (8):

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0, \dots, y^{(k-1)}(x_0) = y_0^{(k-1)}, \quad (8)$$

определенные вещественными числами, необходимые для единственного решения задачи Коши, где $y, y', y'', \dots, y^{(k)}$ – неизвестная функция и ее производные до k -го порядка; x_0 – начальная точка интервала, на котором определена функция.

Существуют два основных метода решения задачи Коши для дифференциальных уравнений: аналитический и численный. Аналитический метод позволяет получить точное, теоретически обоснованное решение в удобной для дальнейшего исследования форме. Однако с помощью аналитических методов возможно решать уравнения строго определенного вида. В противоположном случае дифференциальное уравнение решают численно. Но результаты численных методов ограничивают возможности дальнейших исследований. При необходимости поиска решения в символьном виде описанную задачу возможно решать путем сведения ее к процедуре поиска наименьшего значения функции ошибки на множестве символьных выражений. При решении данной задачи оптимизации глобальный оптимум равен нулю и достигается на символьном выражении, точно повторяющем истинное решение задачи Коши. Предложенный в данной работе подход объединил решение численным методом и последующее применение самонастраивающегося алгоритма генетического программирования. На первом этапе осуществляется численное решение дифференциального уравнения, методом Рунге-Кутты четвертого порядка. В результате решения дифференциального уравнения численным методом будет получена таблица чисел, представляющих значения искомой функции в заданных точках, которая будет входными данными для алгоритма генетического программирования. На их основании будет найдено выражение в символьном виде.

Во всех предложенных и описанных выше подходах используется самонастраивающийся тип эволюционных алгоритмов. Для параметров генетического программирования и дифференциальной эволюции, содержащих числовые значения, применяется SHA algorithm, для параметров с выбором типа – PDP (Population-Level Dynamic Probabilities) method.

Третья глава посвящена тестированию предложенных подходов и их апробации на практических задачах.

Для подходов к идентификации динамических систем сначала было проведено исследование на данных, сгенерированных по дифференциальным уравнениям и системам различного вида, порядка и количества входных переменных. Для тестирования подхода к идентификации в виде систем дифференциальных уравнений использовались задачи с двумя и более уравнениями в системе. Для тестирования предложенного подхода к решению задачи Коши использовались дифференциальные уравнения первого и второго порядка с известными решениями, полученными аналитически. На тестовых задачах исследована зависимость ошибки получаемых решений от наличия шума в данных и их объема, определена принадлежность получаемых моделей к классам символьно точные (модель точно совпадает с известным дифференциальным уравнением), символьно условно точные (модель может быть приведена к истинному выражению путем простейших математических преобразований) и приближенные (выражение аппроксимирует данные, но структура не соответствует истинной).

В таблице 1 представлены значения ошибки (вычисляемой в соответствии с выражением (6)), полученные по 100 запускам для каждой задачи и усредненные в соответствии с особенностями задач. Согласно полученным данным все предложенные эволюционные подходы, устойчивы к наличию шума в данных и малому объему выборки.

Таблица 1 – Результаты тестирования эволюционных подходов к идентификации динамических систем

Особенности задач (наибольший порядок производной)	Объем данных (точек выборки)								
	150			100			50		
	Шум, %								
	0	5	10	0	5	10	0	5	10
Ошибка модели в виде дифференциального уравнения									
y'	0	0,0002	0,0003	0	0,0003	0,0003	0,0001	0,0003	0,0004
y''	0,0002	0,0004	0,0005	0,0002	0,0005	0,0005	0,0003	0,0006	0,0007
$y''' - y^V$	0	0,0003	0,0005	0	0,0005	0,0005	0,0001	0,0007	0,0008
Несколько входов	0,003	0,0047	0,0052	0,0042	0,0059	0,0071	0,0065	0,0097	0,0125
Ошибка модели в виде системы дифференциальных уравнений									
y'	0,0106	0,0162	0,0213	0,0121	0,0197	0,0675	0,0166	0,0239	0,026
y''	0,0205	0,022	0,0275	0,021	0,0235	0,028	0,02	0,0235	0,028
Ошибка решения задачи Коши									
$y' - y''$	0	0,0001	0,0001	0	0,0001	0,0002	0,0001	0,0002	0,0002

На рисунке 5 представлен пример модели, описывающей набор данных, который был сгенерирован на основе исходного дифференциального уравнения с добавлением шума.

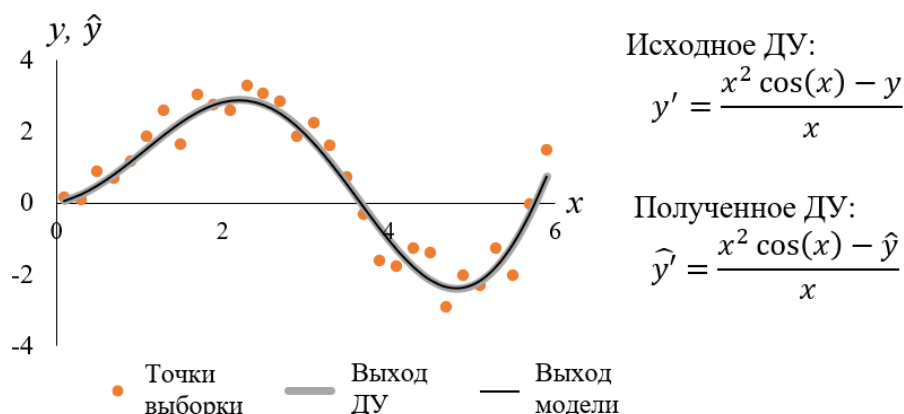


Рисунок 5 – Соответствие выхода модели точкам исходной выборки (для объекта в виде дифференциального уравнения (ДУ))

При исследовании на символьную точность моделей, полученных предложенными эволюционными подходами, на тестовых задачах было установлено, что объем выборки и уровень шума в данных не влияют на символьную точность получаемых решений. В таблице 2 представлены доли символьно точных, условно точных и приближенных решений задачи идентификации и задачи Коши. Количество запусков для каждой задачи и принципы усреднения аналогичны данным из таблицы 1.

Таблица 2 – Результаты исследования предложенных подходов на символьную точность

Особенности задач (порядок производной)	Символьная точность полученных решений (доля)		
	Символьно точные	Символьно условно точные	Приближенные
Модели в виде дифференциального уравнения			
y'	0,82	0,13	0,05
y''	0,73	0,18	0,09
$y''' - y^V$	0,75	0,2	0,05
Несколько входов	0,06	0,54	0,4
Модели в виде системы дифференциальных уравнений			
y'	0,24	0,39	0,37
y''	0,22	0,27	0,51
Решения задачи Коши			
$y' - y''$	0,46	0,47	0,07

Для доказательства эффективности предложенных подходов к идентификации динамических объектов в виде дифференциальных уравнений и их систем проведено сравнение ошибки полученных решений со значениями ошибки моделей, полученных с помощью рекуррентной нейронной сети, и непараметрической ядерной оценки регрессии. Результаты представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Значения ошибки моделей, полученных различными подходами к идентификации динамических систем

Особенности задач (максимальный порядок производной)	Предложенный эволюционный подход	Рекуррентная нейронная сеть	Непараметрическая ядерная оценка регрессии
Модели в виде дифференциального уравнения			
y'	0,0001	0,1189	0,0633
y''	0,0001	0,133	0,1012
$y''' - y^V$	0	0,1681	0,0534
Несколько входов	0,0034	0,21	0,1453
Модели в виде системы дифференциальных уравнений			
y'	0,017	0,1821	0,0636
y''	0,0136	0,0595	0,0309

Следующим этапом исследования предложенных подходов стало тестирование подходов на данных, сгенерированных по восьми реальным закономерностям из химии, биологии, экономики и физики, представленных дифференциальными уравнениями и системами дифференциальных уравнений.

В качестве примера приведем решение задачи поиска системы дифференциальных уравнений, описывающей изменение популяций хищников и жертв.

Пусть в некоторой экосистеме даны значения, описывающие изменение численности популяции хищников и жертв с течением времени. Объем выборки составил 50 точек. Необходимо определить изменение численности популяций жертвы и хищника с течением времени.

В результате было получено выражение, представленное системой дифференциальных уравнений (9):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0.998x - \frac{xy}{1.023 + 2x - x} - 0.124x^2 + 0.009x^2 \\ \frac{dy}{dt} = \frac{(0.255 - 0.101\frac{y}{x} + 0.08)y^2}{y} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left(0.998 - \frac{y}{1.023 + x} - 0.115x\right)x \\ \frac{dy}{dt} = \left(0.175 - 0.101\frac{y}{x}\right)y \end{cases}.$$
(9)

Представленная система дифференциальных уравнений соответствует модели Холлинга-Тэннера, которая в общем виде представляется следующим образом (10):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left(a - \frac{cy}{g+x} - ex\right)x \\ \frac{dy}{dt} = \left(b - f\frac{y}{x}\right)y \end{cases}.$$
(10)

где x – численность популяции жертв, y – численность популяции хищников, $\frac{cy}{g+x}$ – коэффициент хищничества, a, b, c, e, f – положительные параметры.

На рисунке 6 представлены графики, соответствующие исходным данным и точкам, полученным по модели, представленной системой дифференциальных уравнений (9). Среднеквадратичная ошибка соответствия составила 0.

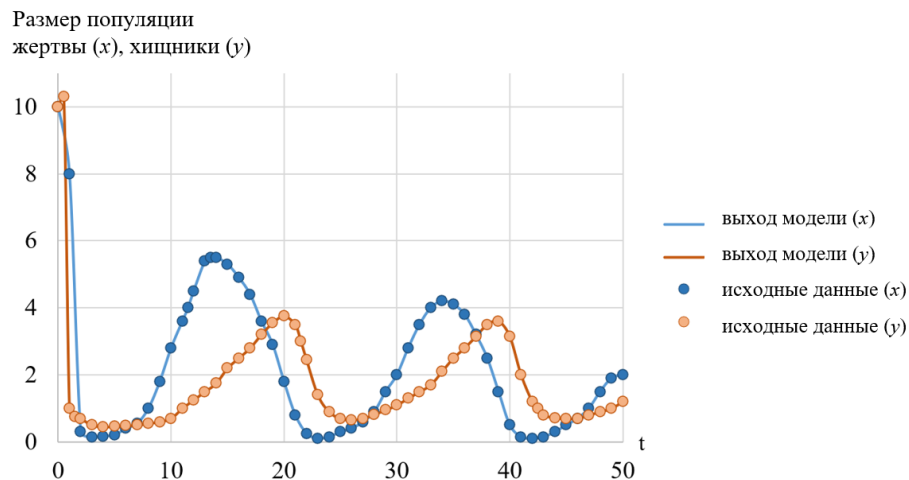


Рисунок 6 – Соответствие исходной выборки выходу полученной модели изменения численности хищников и жертв с течением времени

Далее были получены модели при решении реальных практических задач, данные для которых были взяты с ресурса UC Irvine Machine Learning Repository, с помощью предложенных подходов к идентификации.

Первая практическая задача была связана с мониторингом состояния гидравлических систем. Исследуемые данные были получены экспериментально с помощью гидравлического испытательного стенда. Система повторяет циклы постоянной нагрузки (длительностью 60 секунд) и измеряет технологические параметры, такие как давление, объемный расход и температура, в то время как состояние четырех гидравлических компонентов (охладитель, клапан, насос и аккумулятор) количественно варьируется. Всего задано четырнадцать входных переменных $x_1(t)$ - $x_{14}(t)$. Требуется определить изменение коэффициента полезного действия (КПД) $y(x_1(t), \dots, x_{14}(t), t)$ для данной системы.

Исходный набор данных содержит 1100 экземпляров, но для генерации модели в виде дифференциального уравнения эволюционным подходом были использованы первые 500 точек. Использование неполного объема данных связано с необходимостью проверки корректности модели на данных, которые не были использованы при поиске решения.

Представим найденную предложенным подходом модель в виде дифференциального уравнения (11), которая позволяет отследить изменение коэффициента полезного действия в зависимости от изменения входных характеристик:

$$y' = \frac{-14,76x_5x_6(0,38 + 4,06x_1 + 1,44x_{11} + x_{12})}{(7,57x_3 - 82,11x_5x_6)(0,38 + 4,06x_1 + 1,44x_1 + x_{12}) + 3,21x_5x_6} - \frac{(x_1 + 2,47)(yx_1 + 19,37x_1 - 12,43x_1x_7 + 2,89x_7x_9)}{x_1} \quad (11)$$

Ошибка полученной модели на тестовых данных составила 5,4%.

Для доказательства эффективности разработанного эволюционного подхода было проведено сравнение с непараметрической ядерной оценкой регрессии и рекуррентной нейронной сетью. На рисунке 7 представлены графики соответствия моделей, полученных указанными методами, точкам исходной выборки. Ошибки моделей на тестовых данных, полученные рекуррентной нейронной сетью и непараметрической ядерной оценкой регрессии, составили 27,88% и 19,02% соответственно. Стоит отметить, что если в обучающую выборку не входят данные при $t \in [360; 570]$, то модели, полученные нейронной сетью и непараметрической ядерной оценкой регрессии, несмотря на высокую точность моделей на обучающей выборки, некорректно описывают тестовые данные, а модель, полученная предложенным эволюционным подходом, напротив, позволяет описать и тестовые данные.

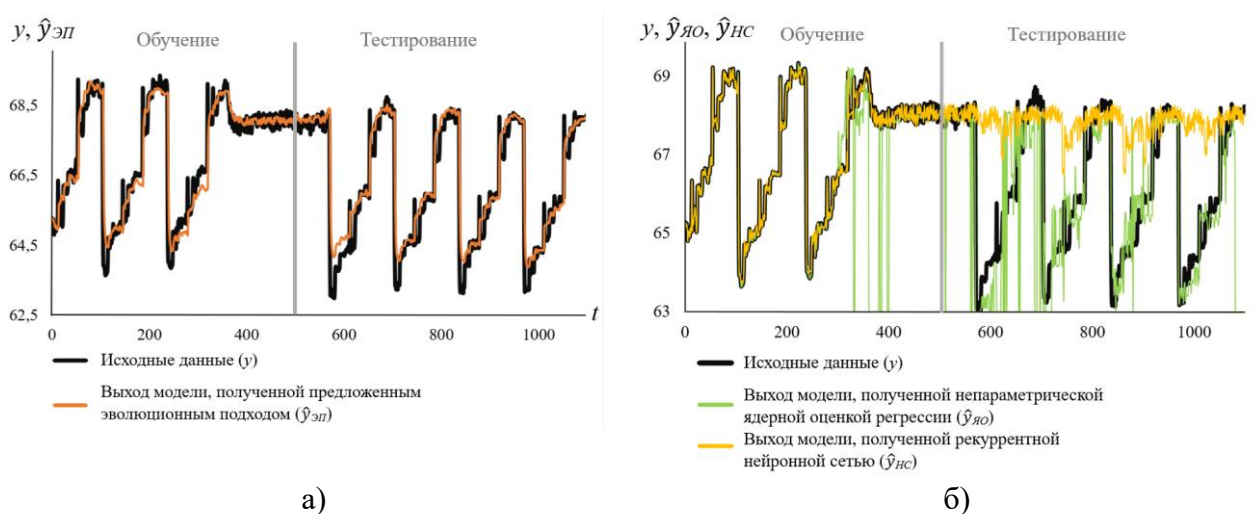


Рисунок 7 – Соответствие моделей точкам исходной выборки для задачи мониторинга состояния гидравлической системы: а) идентификация предложенным эволюционным подходом, б) идентификация с помощью рекуррентной нейронной сети и непараметрической ядерной оценкой регрессии

Вторая практическая задача требует построения модели по набору данных, который содержит значения усредненных почасовых откликов 5 химических датчиков оксидов металлов, встроенных в мультисенсорное устройство химического контроля качества воздуха. Показатели этих датчиков, температура, относительная и абсолютная влажности являются входными переменными $x_1(t)$ - $x_8(t)$. Усредненные почасовые концентрации монооксида углерода, неметановых углеводородов, бензола, общего количества оксидов азота и диоксида азота были получены с помощью расположенного рядом эталонного анализатора. В данной задаче несколько взаимосвязанных предсказываемых переменных (среднечасовые концентрации монооксида углерода $y_1(x_1(t), \dots, x_8(t), t)$ и бензола $y_2(x_1(t), \dots, x_8(t), t)$), следовательно, конечная модель должна быть представлена в виде системы дифференциальных уравнений.

Исходный набор данных содержит 830 экземпляров, для генерации модели в виде системы дифференциальных уравнений эволюционным подходом были использованы первые 300 точек.

Представим модель в виде системы дифференциальных уравнений (12):

$$\begin{cases} y_1' = \frac{y_1(x_2 + 279,2 - (x_5 + y_2)(5,14y_1 + 7,62))}{-(x_5 + y_2)(y_1 + 542,02)} \\ y_2' = \frac{0,03x_1^2x_2x_8(x_7 - 26,8)}{x_8(0,9 - 83,5x_2) + x_1x_2(x_7 - 26,8)(x_5 - x_8(0,03x_4 + 0,03y_1 + 1267,78))} \end{cases} \quad (12)$$

Ошибка полученной модели на тестовой части данных составила 8,54%.

Далее на рисунке 8 представлены графики, описывающие изменения концентраций исследуемых веществ, и графики полученной предложенным эволюционным подходом модели.

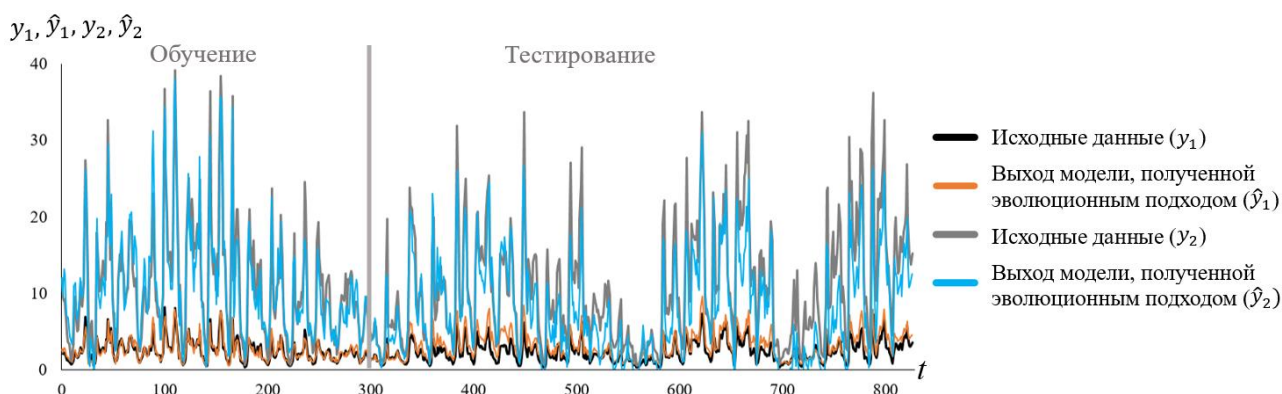


Рисунок 8 – Соответствие модели точкам исходной выборки для второй практической задачи анализа состава воздуха

Ошибки моделей, полученных рекуррентной нейронной сетью и непараметрической ядерной оценкой регрессии, составили 18,47% и 19,21% соответственно.

По данным исследований предложенные подходы позволили найти модели исследуемых процессов с высокой точностью.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В ходе выполнения диссертационной работы получены следующие результаты:

1. Разработаны модификации алгоритма генетического программирования для поиска решения задачи символьной регрессии в виде деревьев, кодирующих дифференциальные уравнения.

2. Разработан эволюционный подход к структурно-параметрической идентификации динамических систем в виде дифференциальных уравнений как линейного, так и нелинейного вида на основе модифицированного алгоритма генетического программирования и метода дифференциальной эволюции.

3. Разработан эволюционный подход к идентификации динамических объектов в виде систем дифференциальных уравнений как линейного, так и нелинейного вида, и произвольного количества уравнений в системе на основе модифицированного алгоритма генетического программирования и метода дифференциальной эволюции.

4. Разработан подход к решению задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений на основе самонастраивающегося алгоритма генетического программирования и метода дифференциальной эволюции.

5. Разработанные подходы реализованы в виде программных систем, а их эффективность исследована на тестовых и практических задачах, что позволило продемонстрировать их обоснованность и эффективность.

Таким образом, в ходе данного диссертационного исследования решены все поставленные задачи и достигнута заявленная цель повышения эффективности применения методов решения задач символьной регрессии при структурно-параметрической идентификации динамических систем за счет применения самонастраивающихся эволюционных алгоритмов моделирования и оптимизации, что имеет существенное значение для теории и практики системного анализа, управления и обработки информации.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ:

1. Карасева, Т. С., Идентификация динамических процессов в виде дифференциальных уравнений и их систем с помощью эволюционных подходов / Т. С. Карасева, Е. С. Семенкин // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Приборостроение». – 2023. – №3. – С. 84-98.

2. Карасева, Т. С. О применении эволюционных алгоритмов для идентификации динамических процессов в экономике / Т. С. Карасева, Е. С. Семенкин // Системы управления и информационные технологии. – 2022. – № 1 (87). – С. 24-29.

3. Карасева, Т. С. Самонастраивающийся алгоритм генетического программирования для решения задачи Коши и вариационной задачи в символьном виде / Т. С. Карасева // Труды Института системного анализа Российской академии наук. – 2019. – Т. 69, № 3. – С. 80-90.

Публикации в изданиях, индексируемых в международных базах:

4. Karaseva, T. Evolutionary Approaches to the Identification of Dynamic Processes in the Form of Differential Equations and Their Systems / T. Karaseva, E. Semenkin // Algorithms. – 2022. – № 15 (10). – С. 351.

5. Karaseva, T. Detecting anomalies in fibre systems using 3-dimensional image data / D. Dresvyanskiy, T. Karaseva, S. Mitrofanov, V. Makogin, E. Spodarev, C. Redenbach // Statistics and Computing. – 2020. – 30 (4). – С. 817-837.

6. Karaseva, T. S. Identification of differential equations systems with various input effects / T. S. Karaseva // Hybrid methods of modeling and optimization in complex systems. Proceedings of the International Workshop «Hybrid methods of modeling and optimization in complex systems» (HMMOCS 2022), European Proceedings of Computer and Technology. – 2022. – № 1. – С. 152-159.

7. Karaseva, T. S. Hybridization of machine learning models and differential evolution in data mining / T. S. Karaseva // Hybrid methods of modeling and optimization in complex systems. Proceedings of the International Workshop «Hybrid methods of modeling and optimization in complex systems» (HMMOCS 2022), European Proceedings of Computer and Technology. – 2022. – № 1. – С. 55-60.

8. Karaseva, T. On the automatic identification of differential equations using a hybrid evolutionary approach / T. Karaseva, E. Seminkin // 2021 International Conference on Information Technologies (InfoTech), Varna, Bulgaria. – 2021. – С. 1-6

9. Karaseva, T. S., Semenkin O.E. Hybrid approach to the dynamic systems identification based on the self-configuring genetic programming algorithm and the differential evolution method / T. S. Karaseva, O. E. Semenkin // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2021. – 1047. – С. 12076.

10. Karaseva, T. S. Automatic differential equations identification by self-configuring genetic programming algorithm / T. S. Karaseva // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Associations. – 2020. – № 734. – С. 12093.

11. Karaseva, T. S. Self-configuring genetic programming algorithm for solving symbolic regression problems / T.S. Karaseva, S.A. Mitrofanov // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – № 862. – С. 52069.

12. Karaseva, T. Application of clustering methods to anomaly detection in fibrous media / D. Dresvyanskiy, T. Karaseva, S. Mitrofanov, C. Redenbach, S. Schwaar, V. Makogin, E. Spodarev // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – № 537. – С. 22001.

Публикации в сборниках трудов конференций:

13. Карасева, Т. С. Моделирование зависимости скорости химической реакции от температуры самоадаптирующимся алгоритмом генетического программирования / Т. С. Карасева // Актуальные проблемы авиации и космонавтики: Сборник материалов VII Международной научно-практической конференции, посвященной Дню космонавтики: в 3 томах; под общ. ред. Ю. Ю. Логинова. – Красноярск, 2021. – С. 150-151.

14. Карасева, Т. С. Дифференциальная эволюция как инструмент для повышения эффективности методов искусственного интеллекта / Т. С. Карасева, С. А. Митрофанов // Решетневские чтения: Материалы XXV Международной научно-практической конференции, посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева. В 2-х частях; под общ. ред. Ю.Ю. Логинова. – Красноярск, 2021. – С. 180-181.

15. Karaseva, T. S. On the identification of dynamic systems / T. S. Karaseva // Молодежь. Общество. Современная наука, техника и инновации. – 2021. – № 20. – С. 338-339.

16. Карасева Т. С. О применении самоадаптирующегося алгоритма генетического программирования для идентификации динамических объектов при различных входных воздействиях / Т. С. Карасева, Е. С. Семенкин // Решетневские чтения: Материалы XXIV Международной научно-практической конференции, посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева: в 2 частях; под общ. ред. Ю.Ю. Логинова. – Красноярск, 2020. – С. 172-174.

17. Karaseva T. S. Genetic programming algorithm for the dynamic systems identification / T. S. Karaseva // Молодежь. Общество. Современная наука, техника и инновации. – 2020. – № 19. – С. 299-301.

18. Карасева Т. С. Об эффективности идентификации дифференциальных уравнений первого порядка самонастраивающимся алгоритмом генетического программирования / Т. С. Карасева // Решетневские чтения: Материалы XXIII Международной научно-практической конференции, посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева. В 2-х частях; под общ. ред. Ю.Ю. Логинова. – Красноярск, 2019. – С. 168-169.

19. Карасева Т.С. Идентификация дифференциальных уравнений первого порядка самонастраивающимся алгоритмом генетического программирования // В сборнике: Актуальные проблемы авиации и космонавтики. Сборник материалов V Международной научно-практической конференции, посвященной Дню космонавтики. В 3-х томах. Под общей редакцией Ю.Ю. Логинова. – Красноярск, 2019. – С. 44-46.

20. Karaseva T. S. On efficiency of the differential evolution method / T. S. Karaseva, S. A. Mitrofanov // Молодежь. Общество. Современная наука, техника и инновации. – 2019. – № 18. – С. 278-280.

21. Карасева Т. С. Решение задач классификации самонастраивающимся алгоритмом генетического программирования / Т. С. Карасева // Информатика, управление и системный анализ: Труды V Всероссийской научной конференции молодых ученых с международным участием. – 2018. – С. 217-226.

22. Карасева Т. С. Решение вариационной задачи самонастраивающимся алгоритмом генетического программирования / Т. С. Карасева // Решетневские чтения. – 2018. – Т. 2. – С. 124-125.

23. Карасева, Т. С. Об эффективности символьного решения дифференциальных уравнений алгоритмом генетического программирования / Т. С. Карасева // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. – 2018. – Т. 2, № 4 (14). – С. 40-42.

24. Karaseva, T. S. Application of the self-configuring genetic programming algorithm for classification problems solving / T. S. Karaseva, E. S. Semenkin, O. V. Maslova // Молодежь. Общество. Современная наука, техника и инновации. – 2018. – № 17. – С. 270-272.

25. Карасева, Т. С. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений самонастраивающимся алгоритмом генетического программирования / Т. С. Карасева // Решетневские чтения. – 2017. – Т. 2. – С. 189-190.

26. Карасева, Т. С. Решение задач символьной регрессии алгоритмом генетического программирования с оператором равномерного скрещивания / Т. С. Карасева, С. А. Митрофанов // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. – 2017. – Т. 2, № 13. – С. 24-26.

27. Карасева Т. С. Решение задач символьной регрессии самонастраивающимся алгоритмом генетического программирования / Т. С.

Карасева, С. А. Митрофанов // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. – 2017. – Т. 2, № 13. – С. 49-51.

Зарегистрированные программные системы

28. Свидетельство № 2021667197 Российская Федерация. Программный комплекс идентификации динамических систем на основе решения задачи Коши самоконфигурируемыми эволюционными алгоритмами : № 2021666431 : заявл. 19.10.2021 : опубл. 26.10.2021 / Карасева Т.С., Митрофанов С.А., Семенкин Е.С. – 1 с.

29. Свидетельство № 2021614691 Российская Федерация. Программный комплекс эволюционной автоматической идентификации динамических систем : № 2021613218 : заявл. 12.03.2021 : опубл. 29.03.2021 / Карасева Т.С., Митрофанов С.А., Семенкин Е.С. – 1 с.

30. Свидетельство № 2023660264 Российская Федерация. Программный комплекс на основе гибридного эволюционного подхода для идентификации динамических систем: № 2023619270 : заявл. 11.05.2023 : опубл. 18.05.2023 / Карасева Т.С., Семенкин Е.С. – 1 с.

31. Свидетельство № 2023660334 Российская Федерация. Программная система на основе адаптивного алгоритма генетического программирования для автоматизированного поиска моделей динамических объектов в виде системы дифференциальных уравнений : № 2023619132 : заявл. 11.05.2023 : опубл. 19.05.2023 / Карасева Т.С., Семенкин Е.С. – 1 с.