

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ДИНАМИКИ СИСТЕМ И ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ
ИМЕНИ В.М. МАТРОСОВА СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ
АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Финкельштейн Евгения Александровна

**Вычислительные технологии аппроксимации множества
достижимости управляемой системы**

Специальность 05.13.01

Системный анализ, управление и обработка информации
(космические и информационные технологии)

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель

д.т.н. А. Ю. Горнов

Иркутск

2018

Содержание

Введение	4
Глава 1. Традиционные методы и алгоритмы исследования динамических систем.....	13
1.1. Методы и алгоритмы исследования множества достижимости	13
1.1.1. Постановка задачи и вспомогательные результаты теории управления	13
1.1.2. Аналитические и численные методы построения множества достижимости для линейных и нелинейных систем.....	19
1.2. Методы и алгоритмы решения задач оптимального управления	22
1.2.1. Методы невыпуклой оптимизации	23
1.2.2. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления	24
Глава 2. Алгоритмы аппроксимации множества достижимости.....	27
2.1. Стохастическая аппроксимация	27
2.1.1. Выбор числа точек переключения релейного управления	28
2.2. Методы построения равномерной облачной оценки	31
2.2.1. Алгоритм равномерной аппроксимации	31
2.2.2. Гладкая аппроксимация вспомогательного максиминного функционала	31
2.2.3. Алгоритм квазиравномерной аппроксимации	33
2.3. Метод кусочно-линейной аппроксимации МД.....	35
2.3.1. Вспомогательная экстремальная задача	36
2.3.2. Аппроксимативная задача оптимального управления и алгоритм ее решения	38
2.4. Метод равномерной монотонной аппроксимации границы.....	39
2.4.1. Алгоритм (ПМ).....	40
2.4.2. Процедура поиска дополнительных точек границы	41
2.4.3. Устранение петель	42
2.4.4. Схема метода	43
2.5. Двухстадийный метод аппроксимации МД эллипсоидами.....	44
2.5.1. Аппроксимация МД описанным эллипсом	44
2.5.2. Аппроксимация объединением эллипсов.....	45
2.5.3. Аппроксимация объединением шаров разного размера	47

2.6. Метод построения внутренней аппроксимации на малых интервалах времени.....	47
2.7. Аппроксимация МД систем с разрывной правой частью	50
2.7.1. Стохастическая аппроксимация МД систем с разрывной правой частью.....	51
2.7.2. Аппроксимация границы МД систем с разрывной правой частью	52
Глава 3. Вычислительные технологии и специализированное программное обеспечение	54
3.1. Постановка задачи	54
3.2. Базовые компоненты вычислительной технологии	56
3.3. Стандартные многометодные вычислительные схемы.....	58
3.4. Коллекция тестовых задач	60
3.5. Методики тестирования алгоритмов.....	62
3.6. Сравнительное тестирование алгоритмов заполнения	64
3.7. Параметрическое тестирование.....	68
3.8. Стресс-тестирование. Определение максимального временного интервала в задачах аппроксимации МД.....	71
3.9. Метод поиска глобального экстремума для конечномерной задачи.....	73
Глава 4. Прикладные задачи	78
4.1. Поиск глобального экстремума в задаче оптимального управления	78
4.1.1. Схема решения задачи оптимального управления.....	79
4.1.2. Вычислительные эксперименты решения задач оптимального управления.....	80
4.2. Задача быстрогодействия.....	83
4.3. Задача нормирования внешних воздействий	85
4.4. Исследование множества достижимости климатическо-экономической модели	88
4.5. Моделирование управления сферическим роботом.....	90
4.6. Численное исследование модели реакции окисления метана на поверхности никеля	94
Заключение.....	100
Литература.....	102
Приложение. Тестовая коллекция невыпуклых множеств достижимости	117

Введение

Актуальность диссертационной работы основывается, *во-первых*, на значимости объекта исследования, поскольку множество достижимости (МД) является одним из классических объектов исследования в теории оптимального управления. Возможность конструктивного оперирования с множеством достижимости управляемой системы существенно упрощает решение целого ряда традиционных экстремальных задач – поиска локального и глобального экстремума функционала, параметрической идентификации системы, синтеза оптимального управления, фазового оценивания состояния системы, нормирования воздействий, управления пучками траекторий и других. Появление эффективных алгоритмов фазового оценивания может привести к достижению качественно нового уровня возможностей численного исследования динамических систем.

Разработкой численных методов для задач фазового оценивания в течение многих лет занимаются научные коллективы в России: ИММ УрО РАН (г. Екатеринбург), ВЦ РАН (г. Москва), МИАН (г. Москва), МГУ (г. Москва), ИПМех РАН (г. Москва), МАИ (г. Москва), ИВМ СО РАН (г. Красноярск), ИДСТУ СО РАН (г. Иркутск) и специалисты за рубежом: A. Bressan, R.W. Brockett, A. Cellina, Z. Denkowski, A.L. Dontchev, H. Frankowska, G. Hackl, W.W. Hager, O. Hajek, A. Kastner-Maresch, A.J. Krener, F. Lempio, K.A. Loparo, S. Migorski, S. Mortola, H.D. Niepage, A. Orneals, B. Piccoli, S. Raczynski, H. Schattler, I. Valyi, V.M. Veliov, W. Wendt, R. Winter, P. Wolenski и другие (см. напр., [96, 97, 101, 102, 115, 138]). Среди многочисленных работ по созданию алгоритмов аппроксимации для линейных управляемых систем нельзя не упомянуть труды группы профессора А.В. Лотова (г. Москва), сумевшей разработать методы оценивания для систем высокой размерности и решить с использованием реализованного инструментария ряд прикладных задач, в том числе нелинейных. В классических работах Ф.Л. Черноусько и его последователей созданы методы аппроксимации (как внутренней, так и внешней) нелинейных систем, основанные на эллипсоидных конструкциях. Уральской школой (А.Б. Куржанским, В.Н. Ушаковым, А.Г. Ченцовым, Т.Ф.

Филипповой, Е.К. Костоусовой, В.С. Пацко и другими) глубоко изучены теоретические вопросы развития методологии фазового оценивания и реализованы алгоритмы, основанные на эллипсоидных и пиксельных методах и методах политопов. В.И. Гурманом, Г.Н. Константиновым, В.Г. Сидоренко, В.А. Дыхтой, В.А. Батуриным задачи описания и оценки МД рассматриваются с позиций принципа расширения и развитых на его основе методов оптимального управления. Перспективным подходом являются предложенные А.И. Панасюком и В.И. Панасюком алгоритмы, основанные на уравнении границы интегральной воронки. Среди иностранных работ следует отметить исследования S. Raczynski, еще в 60-х годах прошлого века предложившего простой и эффективный метод аппроксимации границы множества достижимости на плоскости [131], исследования группы болгарских математиков (A.L. Dontchev, V.M. Veliov и другие [96, 97, 101, 102]), посвященные методам эйлера типа, а также многочисленные попытки создания алгоритмов на основе численного решения уравнения Гамильтона-Якоби.

Второй фактор, обуславливающий актуальность работы, следует из нелинейности рассматриваемых динамических систем, для которых проблема численного оценивания МД к настоящему времени не может считаться решенной. Факторами, осложняющими процесс разработки алгоритмов аппроксимации МД в нелинейном случае, являются следующие: рост сложности геометрии МД с увеличением интервала времени; плохая обусловленность возникающих вычислительных задач; многоэкстремальность вспомогательных задач оптимизации, следующая из невыпуклости МД для нелинейных систем; вычислительная неустойчивость.

Третьим фактором, определяющим актуальность темы диссертационной работы, является необходимость и объективная трудность сравнения разных подходов к решению задач рассматриваемого типа. Эффективность алгоритмов построения численных аппроксимаций МД, как и других численных методов, наиболее корректно может быть оценена с помощью тестирования. В основе всех известных методик тестирования лежат коллекции тестовых задач. Широко

известны тестовые коллекции задач оптимизации, авторами которых являются J.T. Betts, A.R. Colville, R.S. Dembo, C. Floudas, D.M. Himmelblau, W. Hock, A. Miele, J.J. More, P. Pardalos, K. Schittkowski и другие. Однако, в настоящее время не существует единых общепризнанных коллекций как в рассматриваемой области исследования МД, так и в области оптимизации динамических систем, откуда такая коллекция могла бы быть адаптирована. В диссертационной работе представлены методики сравнения алгоритмов построения МД и соответствующих программных средств, основанные на разработанной тестовой коллекции невыпуклых задач.

Основной целью диссертации является совершенствование существующих и создание качественно новых методов и вычислительных технологий аппроксимации множеств достижимости нелинейных управляемых систем. Под вычислительной технологией здесь и далее понимается совокупность алгоритмов и методов, структур данных, расчетных методик и программных реализаций математической модели.

Задачи, решенные для достижения поставленной цели:

1. Разработка новых алгоритмов для получения различного типа аппроксимаций множеств достижимости нелинейных управляемых систем, позволяющих рассматривать задачи более широких, чем в известных методах, классов, а также превосходящих либо по скорости, либо по точности и степени надежности.
2. Разработка и тестирование многометодных вычислительных технологий аппроксимации множества достижимости, позволяющих добиться более высокой, чем при использовании одиночных известных алгоритмов, надежности за счет комбинирования методов и точной настройки параметров.
3. Разработка специализированного программного обеспечения, реализующего широкие возможности предлагаемой вычислительной технологии.
4. Формирование представительной коллекции невыпуклых тестовых множеств достижимости для оценки и сравнения различных вычислительных технологий.

5. Применение разработанных методов, алгоритмов и вычислительных технологий для решения практических задач из различных областей науки и техники.

Классы задач и методы исследования. Рассматриваются нелинейные динамические системы с параллелепипедными ограничениями на управления. Исследуемые подходы, в первую очередь, опираются на теорию и методы оптимального управления, алгоритмы глобальной оптимизации в динамических и статических задачах с ограничениями, методы теории аппроксимации.

Научная новизна проведенного исследования заключается в следующем:

1. Разработаны алгоритмы равномерного и квазиравномерного заполнения объема множества достижимости, позволяющие рассматривать задачи оценки множества достижимости произвольной размерности. В результате работы алгоритмов строится аппроксимативный набор точек, который, в отличие от других алгоритмов, при небольшом их количестве позволяет выявить все характерные особенности множества, рассчитать характеристики и визуализировать результаты.

2. Для двумерных систем разработаны алгоритмы кусочно-линейной аппроксимации границы множества достижимости, которые не имеют аналогов в общем случае. Алгоритм, основанный на принципе максимума Понтрягина, оказался конкурентоспособным благодаря предложенным дополнительным процедурам верификации. Алгоритм, вспомогательной задачей которого является максимизация площади, ограничиваемой аппроксимирующим контуром, применим и для задач построения множества достижимости в двумерном пространстве выходов многомерных систем.

3. Разработана технология аппроксимации множества достижимости объединением эллипсов. Критерием качества аппроксимации, в отличие от традиционного метода эллипсоидов, является минимум площади покрытия, а рассмотрение объединения, а не пересечения фигур, дает дополнительные возможности для описания сложных невыпуклых объектов.

4. Разработаны вычислительные технологии построения аппроксимаций многомерных множеств достижимости, реализованные в специализированном программном обеспечении OPTCON-MD. Широкие возможности настройки параметров алгоритмов и их комбинаций позволяют эффективно решать рассматриваемые задачи, в том числе для систем многих переменных с векторным управлением, входящим в правую часть системы нелинейно, и систем с разрывной правой частью.

5. Разработаны методики сравнения алгоритмов аппроксимации множества достижимости и создана тестовая коллекция невыпуклых тестовых множеств достижимости, отсутствующая в доступной литературе как для задач аппроксимации множеств достижимости, так и связанных задач оптимального управления.

Теоретическая значимость результатов диссертационной работы состоит в разработке новых алгоритмов аппроксимаций множеств достижимости нелинейных управляемых систем, позволяющих рассматривать задачи различных классов, в том числе многомерных. Реализация вычислительной технологии позволила выявить модификации алгоритмов, повышающие надежность получаемых решений.

Практическая значимость диссертационной работы обусловлена возможностью использования предложенных технологий для решения прикладных задач. Описаны подходы, основанные на алгоритмах аппроксимации множеств достижимости, к решению соответствующих классов задач теории управления: оптимального управления в задачах с терминальным линейным функционалом, быстрогодействия, нормирования управляющих воздействий. Проведено исследование климатическо-экономической DICE модели (Dynamic Integrated Model of Climate and the Economy), описывающей влияние климатических факторов на промышленность и строительство; решена задача управления сферическим роботом с двумя и тремя роторными двигателями; определена область технологических параметров реакции окисления метана на поверхности никеля, приводящих к возникновению автоколебательных процессов.

Реализация результатов работы. Разработанные в ходе выполнения диссертационной работы алгоритмы успешно использовались при выполнении междисциплинарного интеграционного проекта фундаментальных исследований СО РАН №81 «Нелинейные явления в гетерогенных каталитических системах: пространственная и временная организация» и позволили без проведения натурного эксперимента оценить область технологических параметров реакции, приводящих к возникновению автоколебательных процессов.

Существенная часть диссертационного исследования была проведена при поддержке гранта РФФИ № 14-01-31296 под руководством соискателя «Алгоритмы аппроксимации множества достижимости управляемых систем с разрывными правыми частями». Полученные в ходе выполнения работы, результаты были использованы в других проектах, поддержанных РФФИ, в частности, № 09-07-00267 «Вычислительные технологии интеллектуального анализа временных рядов на основе математических методов теории управления», № 12-07-00193 «Мультиметодные алгоритмы и вычислительные технологии идентификации динамических систем и параметрического синтеза оптимального управления».

На защиту выносятся:

1. Алгоритмы равномерного и квазиравномерного заполнения объема множества достижимости, которые показывают более высокую надежность в сравнении с известными алгоритмами, а также, в отличие от подавляющего большинства предложенных в литературе методов, позволяют рассматривать нелинейные системы произвольной размерности.

2. Метод кусочно-линейной аппроксимации множества достижимости, основанный на максимизации площади и позволяющий строить аппроксимации проекций множества достижимости нелинейной системы на плоскости.

3. Двухстадийный метод аппроксимации множества достижимости объединением эллипсов, который, в отличие от традиционного метода эллипсоидов, дает расширенные возможности для оценивания сложных невыпуклых объектов.

4. Метод аппроксимации границы множества достижимости, основанный на принципе максимума Понтрягина, который.

5. Вычислительные технологии построения аппроксимаций множеств достижимости, построенные на основе предложенных алгоритмов.

6. Коллекция невыпуклых тестовых множеств достижимости, отсутствующая в доступной литературе как для задач аппроксимации множеств достижимости, так и для связанных задач оптимального управления.

Достоверность результатов диссертационной работы подтверждена сериями вычислительных экспериментов и большим числом тестовых расчетов, проведенных с использованием разработанных методик сравнения, сопоставлением результатов вычислений с работами известных специалистов, апробацией на научных конференциях и экспертизой статей в ведущих научных журналах.

Личный вклад автора. Все результаты диссертационной работы получены диссертантом самостоятельно. Программные реализации разработанных алгоритмов и методик выполнены автором лично. Из совместных работ, опубликованных в соавторстве, в диссертации использованы результаты, полученные автором.

Апробация диссертационной работы. Результаты диссертационной работы докладывались на международных конференциях:

"Optimization and applications" (2013, 2014 гг.),

Conference on Optimization, Simulation and Control (2013 г.),

«Интеллектуализация обработки информации» (2012 г.),

«Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (2012, 2014, 2016 гг.),

«Динамика систем и процессы управления» (2014 г.);

и всероссийских конференциях:

Байкальская школа-семинар «Методы оптимизации и их приложения» (2011 г.),

«Информационные и математические технологии в науке и управлении» (2012, 2013, 2016 гг.),

«Математическое моделирование и вычислительно-информационные технологии в междисциплинарных научных исследованиях» (2011, 2013, 2014 гг.),

Традиционная всероссийская молодежная летняя школа «Управление, информация и оптимизация» (2014 г.),

Школа-семинар «Модели и методы исследования гетерогенных систем» (2012 г.),

Конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (2010, 2012, 2017 гг.),

Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию (2015-2017 гг.),

«Ляпуновские чтения» (2010-2017 гг.).

Также результаты работы обсуждались на семинарах в Институте проблем управления РАН (рук. Поляк Б.Т.), г. Москва; Институте космических и информационных технологий СФУ (рук. Царев С.П.), г. Красноярск; Институте вычислительного моделирования СО РАН (рук. Ноженкова Л.Ф.), г. Красноярск; Институте математики им. Соболева СО РАН (рук. Демиденко Г.В.), г. Новосибирск; Институте вычислительных технологий СО РАН (рук. Шокин Ю.И.), г. Новосибирск.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, приложений и списка литературы из 139 наименований. Общий объем работы составляет 135 страниц, в тексте содержится 5 таблиц и 28 рисунков.

Публикации. Материалы, отражающие содержание диссертации и результаты, выносимые на защиту, опубликованы более чем в 35 печатных работах, в т.ч. в 6 статьях в рецензируемых научных журналах из перечня ВАК, 4 из которых входит в международную систему цитирования Web of Science.

Содержание диссертационной работы по главам

В *первой главе* приводится обзор работ по методам и алгоритмам исследования множеств достижимости и вычислительным технологиям поиска

минимума функционала в задачах оптимизации управляемых систем. Описываются постановки рассматриваемых задач аппроксимации множества достижимости и оптимального управления с параллелепипедными ограничениями на управление.

Вторая глава посвящена разработанным алгоритмам аппроксимации множеств достижимости: построения равномерной и квазиравномерной облачной оценки; кусочно-линейной и равномерной монотонной аппроксимации границы; построения внутренней аппроксимации на малых интервалах времени; двухстадийный метод аппроксимации МД эллипсами.

Третья глава посвящена вычислительным технологиям и тестированию. Приводятся вычислительные схемы, которые, на основании проведенных экспериментов, признаны наиболее эффективными и приняты как стандартные. Описываются методики тестирования, коллекция тестовых задач, результаты и выводы проведенного тестирования. Также глава включает изложение разработанного для решения вспомогательных конечномерных оптимизационных задач нелокального поискового алгоритма.

В четвертой главе приводятся решения прикладных и содержательных задач. Описаны подходы к решению некоторых классов задач теории управления, основанные на алгоритмах аппроксимации множеств достижимости. Решены прикладные задачи из области экологии, робототехники, и химии. Проведено исследование климатическо-экономической DICE модели (Dynamic Integrated Model of Climate and the Economy), описывающей влияние климатических факторов на промышленность и строительство; решена задача управления сферическим роботом с двумя и тремя роторными двигателями; построена область технологических параметров реакции окисления метана на поверхности никеля, приводящих к возникновению автоколебательных процессов.

В заключении излагаются основные результаты диссертационной работы. *Приложение* содержит тестовую коллекцию невыпуклых МД.

Глава 1. Традиционные методы и алгоритмы исследования динамических систем

В этой главе формулируется постановка исследуемой задачи аппроксимации МД нелинейной управляемой системы дифференциальных уравнений. Выполнен обзор существующих подходов к решению рассматриваемых задач и родственных задач оптимального управления, изучаются методы теоретического исследования и вычислительные технологии, разработанные как в нашей стране, так и за рубежом. Сформулированы условия применимости разработанных вычислительных технологий.

1.1. Методы и алгоритмы исследования множества достижимости

1.1.1. Постановка задачи и вспомогательные результаты теории управления

На отрезке времени $T = [t_0, t_1]$ рассматривается управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (1)$$

$$u \in U := \{u: \underline{u}_i \leq u_i \leq \bar{u}_i, i = \overline{1, r}\}, \quad (2)$$

с заданными начальными значениями

$$x(t_0) = x^0 \in R^n. \quad (3)$$

Функция f предполагается нелинейной, непрерывно дифференцируемой по x , u и кусочно-непрерывной по t .

Допустимым управлением будем считать любую кусочно-непрерывную функцию $u: T \rightarrow U$, множество допустимых управлений обозначаем через \mathcal{U} . Траектории системы (1), соответствующие допустимым управлениям, будут кусочно-гладкими функциями времени на T (по крайней мере, если вектор-функция $f(x, u, t)$ непрерывна).

Большинство теоретических результатов о свойствах МД установлено в более широком классе \mathcal{U}_∞ измеримых ограниченных функций $u(t)$, удовлетворяющих почти всюду на T (в смысле меры Лебега) ограничению (2). Условимся называть такие управления *идеальными*.

Промежуточным между множеством \mathcal{U} и \mathcal{U}_∞ является иногда используемый класс кусочно-постоянных управлений \mathcal{U}_{pc} . Очевидно, что имеют место включения

$$\mathcal{U}_{pc} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{U}_\infty. \quad (4)$$

В каждом из этих классов управлений можно определить *множество достижимости системы* (1) – (3) в момент времени t_1 равенством

$$D_K = D_K(t_1, x^0) = \{x(t_1, u) : u \in K\},$$

где K – любой из классов управлений, а $x(t, u)$ – обозначение траектории системы (1)–(3) с управлением $u \in K$. Из включения (4) вытекает, что

$$D_{\mathcal{U}_{pc}} \subset D_{\mathcal{U}} \subset D_{\mathcal{U}_\infty}. \quad (5)$$

Цель диссертационного исследования состоит в разработке эффективных *вычислительных технологий аппроксимации множества достижимости* управляемой динамической системы (1) – (3). Задача аппроксимации (оценивания) множества достижимости системы понимается в терминах условной функции расстояния между множествами: построить некоторое описание множества \tilde{D}_K такое, что

$$d(\tilde{D}_K, D) \leq \varepsilon,$$

где $K \in \mathcal{U}$, а $d(\cdot, \cdot)$ – заданная метрика (или псевдометрика) на фиксированном классе $X \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ множеств ($\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ означает множество всех непустых подмножеств \mathbb{R}^n), $\varepsilon > 0$ – заданная точность приближения.

Отметим однако, что выбор подходящей метрики для оценки и аппроксимации множеств достижимости нелинейных невыпуклых управляемых систем остается трудной проблемой (к примеру, классическая функция расстояния Хаусдорфа не позволяет оценить качество аппроксимации множества достижимости в случае его незамкнутости). На практике набор K , очевидно, является конечным, а задание X и d вызывает затруднения ввиду вычислительной трудоемкости измерения традиционных типов расстояния между множествами. По этой причине, зачастую приходится полагаться на эмпирические подходы к оцениванию близости множеств, вплоть до экспертного анализа соответствующих

графиков. Ниже, при описании алгоритмов мы будем пояснять, как понимается «близость».

Уточняя постановку вопроса об аппроксимации МД системы (1) – (3), условимся считать, что в качестве такового принимается множество

$$D := D_{\mathcal{U}_\infty},$$

соответствующее «почти предельно широкому» классу измеримых управлений. Оговорка «почти» учитывает, что мы не вводим явно обобщенные управления Варги-Гамкредидзе [11, 14] – вероятностные меры на U , параметрически зависящие от $t \in [t_0, t_1]$ (релаксационные управления класса \mathcal{U}_{rel}). Конечно, $\mathcal{U}_{rel} \supset \mathcal{U}_\infty$ (обычные управления вкладываются в релаксационные) и, соответственно, $D_{\mathcal{U}_{rel}} \supset D = D_{\mathcal{U}_\infty}$ (здесь и в (5) включения могут оказаться нестрогими). Основная причина расширения класса управлений до релаксационных – незамкнутость множества D в случае невыпуклости множества

$$F(x, t) = f(x, U, t) \subset R^n, \quad (6)$$

которое обычно называется годографом (вектограммой) системы (1), (2). Эту особенность множества достижимости D следует учитывать в методах аппроксимаций, фактически переходя к аппроксимации $D_{\mathcal{U}_{rel}}$, вместо D . Заметим, в системах, линейных по управлению, необходимость в этом отпадает, поскольку годограф системы выпуклый компакт, т.к. таковым является множество U . В общем случае, конструктивный переход к релаксационным управлениям в системе (1), (2) эквивалентен её «овыпуклению» по Гамкредидзе, т.е. переходу к управляемой системе вида

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) f(x(t), u^i(t), t), & x(t_0) = x^0, \\ \alpha_i(t) \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) = 1, & u^i(t) \in U, \quad i = \overline{1, n+1}, \end{cases} \quad (7)$$

где $u^i(t)$ – базовые управления, а $\alpha_i(t)$ – весовые измеримые функции. Система (7) описывает так называемые скользящие режимы исходной системы (1) – (3), причем $D_{\mathcal{U}_{rel}}$ совпадает с множеством достижимости D_{rel} овыпукленной системы (7).

При реализации вычислительных технологий приходится оперировать с эффективно реализуемыми управлениями из классов \mathcal{U} , \mathcal{U}_{pc} . Теоретическим

обоснованием такого сужения классов «идеальных» управлений \mathcal{U}_∞ , \mathcal{U}_{rel} служат ряд фундаментальных результатов математической теории управления. Выделим из них следующие.

Предложение 1: Замыкание множества $D_{\mathcal{U}_{pc}}$ содержит множество достижимости $D = D_{\mathcal{U}_\infty}$, т.е.

$$\bar{D}_{\mathcal{U}_{pc}} \supset D$$

(если D замкнуто, то включение переходит в равенство).

С аппроксимационной точки зрения этот факт означает, что для любой траектории $x(t, u)$, соответствующей управлению $u \in \mathcal{U}_\infty$, найдется последовательность управлений $\{u_k(t)\} \subset \mathcal{U}_{pc}$ такая, что $x(t_1, u_k) \rightarrow x(t_1, u)$ при $k \rightarrow \infty$.

Мы затрудняемся указать прямую ссылку на данное утверждение и поэтому сошлемся, например, на доказательство леммы 4 из [73].

Из свойства предложения 1 в качестве следствия получаем **Предложение 2.** Если в системе (1) – (3) рассматривается задача (P) на минимум терминального функционала

$$J(u) = \varphi(x(t_1)), u \in \mathcal{U}_\infty, \quad (8)$$

где целевая функция $\varphi(x)$ непрерывна, то

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_{pc}} J(u) = \inf_{u \in \mathcal{U}_\infty} J(u) \quad (9)$$

(хотя инфимум справа может достигаться, а слева – нет).

Следующие два результата являются классическими для теории оптимального управления.

Предложение 3. Множество траекторий системы (1) – (3) с управлениями из \mathcal{U}_∞ плотно во множестве траекторий выпукленной системы (7) с измеримыми управлениями $\alpha(t) = (\alpha_i(t))$, $\vec{u}(t) = (u^1(t), \dots, u^{n+1}(t))$ в пространстве непрерывных функций на T . Иными словами, для любой траектории $x(t) = x(t, \alpha, \vec{u})$ системы (7) существует последовательность траекторий $x_k(t) = x(t, u_k)$ исходной системы (1) – (3) с $u_k \in \mathcal{U}_\infty$ такая, что $x_k(t) \rightarrow x(t)$ равномерно на T .

Из этого свойства следует включение

$$\bar{D} = D_{rel}, \quad (10)$$

причем множество D_{rel} замкнуто (при естественных предположениях на функцию $f(x, u, t)$).

Предложение 4. Если множество (6) (график системы (1), (2)) является выпуклым при всех $(t, x) \in [t_0, t_1] \times R^n$, то в задаче оптимального управления (P) из предложения 2 существует оптимальное управление в классе \mathcal{U}_∞ . В общем случае оптимальное управление существует в *расширенной задаче* (P_{co}) минимизации терминального функционала (8) в выпукленной системе (7), причем имеет место равенство

$$\inf(P) = \min(P_{co}),$$

вытекающее из (10).

Следующие результаты связаны с характеристикой так называемых *граничных траекторий* системы (1) – (3) через понятие экстремали управляемой системы в смысле Понтрягина и, в конечном счете, с принципом максимума Понтрягина [69].

Введем функцию Понтрягина системы (1), (2)

$$H(x, \psi, u, t) = \psi(t) \cdot f(x, u, t)$$

и сопряженную систему

$$\dot{\psi} = -H_x(x, \psi, u, t). \quad (11)$$

Следуя [59], пару функций $\sigma := (x(t), u(t))$, удовлетворяющих на T системе (1) – (3), назовем нетривиальной экстремалью этой системы, если существует такое соответствующее σ нетривиальное (т.е. $\neq 0$) решение $\psi(t), t \in T$ системы (11), что выполняется *условие максимума*

$$H(x(t), \psi(t), u(t), t) = \max_{u \in U} H(x(t), \psi(t), u, t)$$

почти всюду на $[t_0, t_1]$.

Отметим, во-первых, что предполагается $u \in \mathcal{U}_\infty$, во-вторых, траекторию $\psi(t)$ системы иногда называют коэкстремалью процесса σ (если он является экстремалью) [29]. В некоторых случаях экстремалью системы называют всю

тройку функций $\gamma = (\psi(t), x(t), u(t))$ с указанными свойствами, но это не всегда удобно.

Предложение 5. Если траектория $x(t, u)$ системы (1) – (3) удовлетворяет включению $x(t_1, u) \in \partial D(t_1, x^0)$ (т.е. приходит в момент t_1 на границу множества D), то пара $\sigma = (x(t, u), u(t))$ необходимо является нетривиальной экстремалью системы (1) – (3). Более того, в этом случае $x(t, u) \in \partial D(t, x^0)$ для всех $t \in [t_0, t_1]$, т.е. траектория $x(t, u)$ является *граничной для $D(t, x^0)$* на всем отрезке времени.

Основное, первое утверждение этого критерия можно получить, анализируя доказательство принципа максимума в классической монографии [69]. Но в явной форме оно впервые было получено в статье Ф. Кларка [100, 99], причем в весьма слабых предположениях (негладкая система, граничность устанавливалась для образа $\Phi(D)$ векторного липшицевого отображения множества D и т.д.). Эти результаты вместе со вторым утверждением впоследствии обобщались многими авторами [104, 105, 113, 114]. Из этих обобщений для нас особенно полезным является дополнительное утверждение о связи экстремальности и локальной управляемости системы: либо траектория $x(t), t \in T$, образует нетривиальную экстремаль системы (1) – (3) в паре с *любым порождающим её управлением $u \in \mathcal{U}_\infty$* , либо $x(t_1) \in \text{int } D$ (т.е. в любую точку некоторой окрестности $x(t_1)$ можно попасть по траекториям системы (1) – (3)). Утверждение остается справедливым и для овыпукленной системы (7), т.е. если $x(t)$ рассматривать и как траекторию (7), а для последней ввести определение экстремали естественным образом.

Наконец заметим, что оптимальные процессы задачи терминального управления (P) необходимо искать среди экстремалей системы, но с заданным условием трансверсальности для сопряженной системы

$$\psi(t_1) = -\psi(x(t_1)).$$

Это следует из фундаментального принципа максимума Понтрягина.

Опираясь на приведенные результаты, но не ограничиваясь ими, мы и будем подходить к созданию алгоритмов и вычислительных технологий аппроксимации

множества достижимости и решению задач оптимального управления во второй главе, при необходимости приводя уточнения.

1.1.2. Аналитические и численные методы построения множества достижимости для линейных и нелинейных систем

Будучи важным объектом, характеризующим управляемую систему, МД изучалось многими специалистами в области математической теории управления. Было предложено несколько принципиально различных подходов к построению численных процедур аппроксимации МД.

Одним из популярных подходов к аппроксимации МД является *метод эллипсоидальных оценок*, при помощи которого получают оптимальные двусторонние оценки МД. Научные исследования ведутся давно, начиная с 70-х годов XX века в научных школах академиков А.Б. Куржанского и Ф.Л. Черноусько ([50, 80, 85–87, 119]). Подход позволяет рассматривать линейные и нелинейные системы в непрерывном и дискретном времени и получил применение во многих смежных областях, таких как исследование управляемости, оптимальное управление, гарантированное оценивание и др. Создана солидная теоретическая платформа, позволяющая разрабатывать алгоритмы приближенного вычисления множеств достижимости и интегральных воронок и распространять результаты для систем с неопределенностями, импульсными управлениями и др. Для неспецифичных задач реализовано и находится в открытом доступе инструментальное средство на MATLAB [118]. К сожалению, в случае существенно невыпуклых множеств предложенные подходы, являющиеся важнейшими с точки зрения точных методов, пока позволяют получать только грубые оценки.

В работах [53, 54] представлено направление, основанное на замене дифференциальных уравнений системы разностными, показана сходимость МД аналогичных многошаговых систем к МД исходных систем. Предложенные идеи были реализованы в численных методах построения многогранников, аппроксимирующих МД линейных и нелинейных систем с разного вида

ограничениями [39, 55, 56]. В последнее время эти исследования нашли применение в задачах аппроксимации границы Парето множества достижимых критериальных векторов в многокритериальной оптимизации [9, 10, 52].

Подходы, основанные на достаточных условиях оптимальности, глубоко исследованы в [21, 22, 41]. Задачи описания и оценки МД, а также нормирования воздействий и локального синтеза рассматриваются с позиций принципа расширения и развитых на его основе методов оптимального управления [24, 25, 40]. Предложенные идеи успешно служат основой для методов улучшения [6, 26], ряд сложных, в том числе прикладных, задач был решен с применением предложенных концепций.

Методы, основанные на уравнении границы интегральной воронки предложены в [63, 64]. Для невыпуклых множеств с гладкой границей сформулировано понятие опорного отображения, обобщающее понятие опорной функции и доказано представление граничных точек множества с помощью частных производных его опорного отображения. Предложено уравнение, позволяющее отыскать опорное отображение множества достижимости, которое может быть, как выпуклым, так и невыпуклым. Однако, будучи разработанным только для систем с гладкой границей, такой подход не применим к распространенной и рассматриваемой в диссертации задаче с параллелепипедными ограничениями. Кроме того, вспомогательные задачи в этих методах основаны на решении уравнений в частных производных первого порядка с недифференцируемой (в общем случае) правой частью, что представляется проблематичным.

В 90-х годах XX века начались работы по развитию методов эйлера типа (пиксельных методов [78]), которые предполагают использование априорно заданных сеток в фазовом пространстве и проецирование на них аппроксимаций МД в процессе расчетов. Этот тип методов наиболее хорошо изучен теоретически и наиболее полно оснащен конструктивно. По мнению многих специалистов (см., например, [78]), методы эйлера типа на сегодня являются единственным надежным инструментом аппроксимации МД нелинейных систем, они имеют ряд

преимуществ, в частности, не имеют теоретических ограничений на размерности и применимы при построении МД управляемых систем высокой размерности. Конструкция подхода позволяет реализовывать вычислительные технологии, которые в полной мере могут использовать растущие компьютерные мощности и современные возможности параллельных вычислений, но тем не менее все еще очень трудоемкие и дают большие погрешности на границах множества.

Интересный класс методов, основанных на полиэдральных аппроксимациях, исследуется Е. К. Костоусовой, который, как и метод эллипсоидов, опирается на идею описания множеств более простыми областями некоторой фиксированной формы. Автором показано, что если множества ограничений являются параллелепипедами, то область достижимости представима в виде пересечения конечного числа внешних и объединения конечного числа внутренних параллелепипедов [45]. Найдены критерии ограниченности и неограниченности [42, 43, 44]. Сделана попытка построения синтезированного управления как для задач без неопределенностей, так и с неопределенностями. Метод хорошо поддается алгоритмической реализации, в т.ч. для параллельных вычислений и имеет оценки эффективности. Однако, все эти результаты пока имеют силу только для линейных и билинейных систем, что существенно ограничивает их практическое применение.

Не так давно к описанию множеств достижимости и притяжения линейных систем стали применяться методы теории линейных матричных неравенств [5, 60, 61, 67, 68]. В рамках этого подхода удается получать только отдельные результаты и для нелинейных систем; для линейных же возможно рассматривать разнообразные постановки задач анализа и синтеза, применять методы к системам больших размерностей и использовать простые вычислительные средства, в частности совместимые с пакетом MATLAB.

В последние годы многие специалисты прилагают значительные усилия в создание методов построения аппроксимации МД на основе решения уравнения Гамильтона-Якоби (см., напр., [31] и др.). Для получения верхних оценок были разработаны численные методы [89, 124, 125], которые, однако, хорошо работают

только для небольших размерностей четырех или пяти фазовых переменных. Для практически значимых случаев рассматриваемых в данной работе параллелепипедных ограничениях на управления, в силу недифференцируемости правых частей уравнений Гамильтона-Якоби устойчивых алгоритмов построить пока не удастся. Тем не менее этот подход развивается и находит применение и в решении содержательных задач, например, из области моделирования биологических клеток [111].

Таким образом, можно сделать выводы о том, что, поскольку задачей построения множеств достижимости линейных систем занимаются достаточно давно, основные проблемы в этом направлении решены, но задачи с особенностями, все еще представляют значительный интерес. Что касается нелинейных систем, то работы в этом направлении ведутся, но теоретический и численный аппарат недостаточно развит, чтобы говорить об однозначной возможности эффективно решать основные классы задач такого типа.

1.2. Методы и алгоритмы решения задач оптимального управления

Задачи оптимального управления в рамках данной работы являются, с одной стороны, вспомогательными на некоторых стадиях предлагаемой вычислительной технологии, с другой стороны решение задачи аппроксимации МД тесно связано с решением задач оптимального управления. Далее будет сформулирована постановка ЗОУ с нарушением условия выпуклости функционала (невыпуклой ЗОУ) и приведен краткий обзор существующих подходов к решению задач оптимального управления, как локальных, так и глобальных.

Стандартная задача оптимального управления с параллелепипедными ограничениями включает динамическую систему

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), x(t_0) = x^0 \text{ на } t \in [t_0, t_1] \quad (12)$$

$$u \in U \quad (13)$$

и терминальный функционал

$$I(u) = \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min \quad (14)$$

и состоит в поиске кусочно-непрерывного управления $u^*(t)$, удовлетворяющего параллелепипедным ограничениям (13) и доставляющего минимум функционалу (14), зависящему от кусочно-дифференцируемой траектории системы (12) в конечный момент времени t_1 .

Под невыпуклыми ЗОУ в рамках данной работы понимаются задачи, в которых либо невыпуклый функционал $I(u)$, либо невыпуклое МД $D(t_1, x_0)$ [13].

1.2.1. Методы невыпуклой оптимизации

Методы исследования, как и сами экстремальные задачи, появились в рамках вариационного исчисления, а первыми задачами оптимизации управляемых динамических систем принято считать задачи быстродействия, в которых искомый закон управления должен обеспечивать минимальное время переходного процесса. Многие важные результаты, полученные начиная с 50-х гг. в рамках более простых постановок, являются основой для новых подходов, которые, в том числе благодаря развитию вычислительной техники, позволяют рассматривать все более сложные объекты. В работах Л.С. Понтрягина, В.Г. Болтянского, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко [69] исследован широкий класс задач оптимального управления и получено необходимое условие экстремума – принцип максимума Понтрягина. А также, такие фундаментальные результаты как принцип оптимальности Беллмана [8, 9] и достаточные условия оптимальности В.Ф. Кротова [47, 48], определили развитие теории оптимального управления.

В рамках рассматриваемых нами постановок задач решение может быть неединственным в силу нелинейности системы и невыпуклости функционала, вследствие невыпуклости же возникает многоэкстремальность, которая с точки зрения поиска управления выражается в зависимости результата от начального приближения.

Существует несколько подходов к построению методов, позволяющих найти глобальное решение; классы задач, на которых эти подходы эффективно работают различны, не все из них дают гарантированный результат. Например, направление, основанное на идеях д.с. оптимизации, т.е. представления невыпуклых

функционалов в виде разности выпуклых, получило свое развитие в работах [74, 75], позволяет на сегодняшний день рассматривать преимущественно линейные динамические системы. Особое место занимают методы решения уравнения Гамильтона-Якоби, теоретические результаты его приложения в ЗОУ приводятся, например, в [30, 49]. Использованию генетических алгоритмов (ГА) для поиска глобального экстремума в ЗОУ посвящено значительное количество работ (например, [92, 93, 121, 122]), однако аппарат ГА является сложно настраиваемым и зачастую результат его очень нестабилен. О недостаточной эффективности алгоритмов такого типа может косвенно свидетельствовать и тот факт, что в литературе приводятся примеры применения ГА только для решения частных постановок невыпуклых задач оптимального управления. Подход, основанный на минимизации функции на МД в качестве редукции ЗОУ к конечномерной задаче, можно найти, например, в работе [16, 83, 84].

При всем разнообразии подходов, неслучайно наиболее распространенным инструментом исследования многоэкстремальных ЗОУ остается метод случайного мултистарта, идея которого для конечномерных задач глобальной оптимизации детально описана в [19]. Этот метод позволяет получить наиболее полную информацию о решаемой задаче: построить аппроксимацию МД (близкую к рассматриваемой в п. 2.1. стохастической аппроксимации, но с упором на качество покрытия множества пробных управлений, а не на качество покрытия МД), найти глобальный и локальные экстремумы, оценить области притяжения экстремальных точек и вероятности нахождения глобального экстремума. Недостатком этого метода является многократный спуск в уже найденные экстремумы, что компенсируется высокими вычислительными мощностями современных компьютеров, позволяющими решать тысячи задач Коши в секунду.

1.2.2. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления

Параллельно с теоретическими результатами развивались и вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Первый специализированный программный комплекс для решения ЗОУ разработанный в

России появился в 83-84 гг. и назывался CONTROL [70, 71]. В «Диалоговой системе оптимизации» (ДИСО) [33, 20] было реализовано применение методов математического программирования для решения ЗОУ. В этой системе существовала возможность организации диалога, которая позволяла использовать разнообразные интерактивные технологии решения исходной задачи.

С самого основания в Иркутском вычислительном центре СО РАН велись разработки пакетов прикладных программ (ППП) для решения линейных задач оптимального управления [77] и нелинейных задач оптимизации (МАПР – «Математическое программирование в многомерных задачах») [13]. ППП МАПР многократно использовался для решения прикладных ЗОУ [18]. Методы, опирающиеся на достаточные условия оптимальности, легли в основу «ППП для ЗОУ», который применялся для решения навигационных и эколого-экономических задач [23]. Вычислительные технологии последовательной дискретизации вошли в ППП КОНУС – «Комплексная оптимизация нелинейных управляемых систем» [35, 77].

Первая версия программного средства исследования управляемых динамических систем OPTCON была разработана А.Ю. Горновым и на протяжении нескольких десятилетий применялась для решения практических задач оптимального управления [1, 17, 57, 107–109]. Позднее был создан вычислительный сервер OPTCON-II, ориентированный на проведение удаленных вычислений через сеть Интернет [58], и OPTCON-III для решения невыпуклых ЗОУ [36].

Вычислительные технологии исследования управляемых динамических систем, безусловно, развивались и в зарубежных организациях. Среди известных и описанных в доступной литературе – программный комплекс SOCS “Sparse optimal control software” (J.T. Betts, W.P. Huffman) [95], созданный компанией Boeing Computer Services, который успешно применяется для решения задач навигации и робототехники. Еще одним хорошо известным продуктом является программное средство MISER3 [137] (K.L. Teo, C.J. Goh, Hong Kong Polytechnic University), оно имеет солидную историю, в его создание вложен большой опыт. Идея редукции

задачи оптимального управления к задачам математического программирования вполне естественна и активно используется в данной области, тем более такой подход позволяет использовать существующие программные средства исследования конечномерных задач. В Дармштадском техническом университете разработан программный комплекс DIRCOL [128] (O. von Stryk, Technological Darmstadt University, Germany), основывающийся на применении вычислительной технологии, заложенной также и в программные продукты NPSOL и SNOPT (Systems Optimization Laboratory, Stanford University) и ориентированной на решение задач математического программирования. Объединение существующих пакетов конечномерной оптимизации позволило построить вычислительную технологию решения ЗОУ – MINOPT [134] (C. Schweiger., C. Floudas, Princeton University, USA).

Выводы главы

Исследования подходов, направленных на решение невыпуклых задач построения МД и ЗОУ, помимо того, что представляют собой самостоятельные, вызывающие интерес многих авторов, сложные проблемы, имеют тесную взаимосвязь в таких более сложных задачах, как поиск синтезированного управления или управления в условиях неопределенности. Несмотря на отсутствие в настоящее время общей теории поиска глобального экстремума для невыпуклых задач оптимального управления, вычислительные технологии развиты достаточно, чтобы было возможным решать обширный класс практических задач [19]. Создание надежных вычислительных технологий аппроксимации МД позволит приблизиться к решению более сложных проблем хотя бы на численном уровне.

Глава 2. Алгоритмы аппроксимации множества достижимости

Эта глава посвящена описанию и исследованию предлагаемых различных подходов к построению аппроксимаций МД. Метод стохастической аппроксимации, рассматривающийся в п. 2.1, используется в качестве проверочного, остальные же алгоритмы являются авторскими и могут быть условно поделены на внутренние, граничные и внешние. Внутренней аппроксимацией (либо «облачной», как состоящей из набора внутренних точек) называем аппроксимацию, которая гарантированно не включает в себя недостижимые при заданных ограничениях области или элементы фазового пространства; Внешняя аппроксимация, в свою, очередь может содержать такие области, но обязательно включает в себя всё МД, причем соответствующее наиболее широкому, из введенных в первой главе, классу идеальных управлений \mathcal{U}_∞ . Граничной аппроксимацией МД в рамках данной работы называем кусочно-линейную аппроксимацию границы МД.

2.1. Стохастическая аппроксимация

Подход стохастической аппроксимации может быть трактован как реализация метода Монте-Карло: для получения покрытия множества используется случайное распределение управляющих функций релейного типа, точки переключения которых равномерно распределены на множестве допустимых управлений $u \in U$. Целесообразность применения релейных управлений, как отмечалось в §1.1 обусловлена рядом известных теоретических результатов («bang-bang принцип», см., напр., [73, 76]). Такой выбор пробных управлений, в частности, показал себя достаточно эффективным в практике вычислительных экспериментов. Проблемной технологической задачей, которую необходимо решить при использовании рассматриваемого подхода, является нахождение числа точек переключения, позволяющего получить наилучшие аппроксимации. Далее на иллюстрирующем примере рассмотрим подробнее эффекты, возникающие при аппроксимации множества достижимости случайными релейными управлениями с различным числом точек переключения.

Генерация случайных управлений производится по следующему алгоритму:

Шаг 0. задается алгоритмический параметр k_{tp} — число точек переключения.

Шаг 1. На временном интервале $t \in T$ генерируется k_{tp} случайных точек переключения.

Шаг 2. На отрезках между точками переключения происходит генерация случайного числа из $[0, 1]$. Если оно больше $\frac{1}{2}$, то управление на отрезке задается как верхняя граница допустимого множества. В противном случае — как нижняя.

Алгоритм закончен.

На процедуру генерации случайного релейного управления опирается алгоритм построения стохастической аппроксимации множества достижимости:

Шаг 0. задаются N_{iter} — число пробных управлений, k_{tp} — число точек переключения в пробных управлениях, $B = \emptyset$ — база элементов множества достижимости, $i = 0$.

Шаг 1. Производится генерация допустимого управления $\hat{u}(t)$.

Шаг 2. Решается задача Коши с заданным начальным условием x^0 и сгенерированным управлением $\hat{u}(t)$.

Шаг 3. В массив достижимых точек B вносится $x(t_1)$.

Шаг 4. $i = i + 1$.

Шаг 5. Если $i \leq N_{iter}$, переход на шаг 1. Иначе — алгоритм закончен.

2.1.1. Выбор числа точек переключения релейного управления

Результат работы алгоритма в той или иной степени зависит от настраиваемых параметров. Алгоритм стохастической аппроксимации имеет два параметра и, если от N_{iter} — числа пробных управлений, зависимость прямая — чем больше N_{iter} , тем больше точек на множестве достижимости и тем лучше аппроксимация, то зависимость качества (в самом широком смысле этого слова) оценки множества от числа точек переключения в генерируемом релейном

управлении k_{tp} носит более сложный характер и увеличивать данный параметр сверх некоторого целочисленного значения нецелесообразно.

Рассмотрим известный иллюстративный пример, моделирующий управление колебаниями «нелинейного маятника» (см., напр., [15]). Динамика системы на временном интервале $t \in [0, 5]$ описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u - \sin x_1, \end{cases}$$

с начальными условиями $x_1(0) = 5, x_2(0) = 0$. Управление системой может выполняться с управлением из множества $-1 \leq u(t) \leq 1$.

Задав $k_{tp} = 1$, исходя из свойства конкретной рассматриваемой системы, линейной по управлению, получаем лишь контур на множестве достижимости, как показано на рис. 1 а), который, естественно, не обязательно будет совпадать с границей множества.

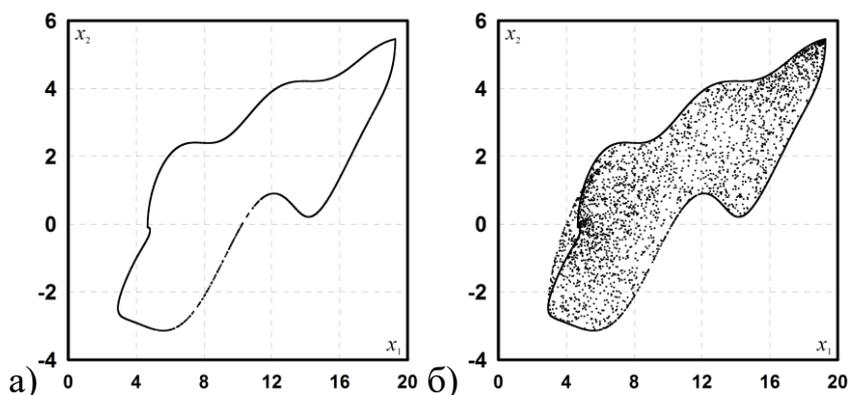


Рисунок 1 – Стохастическая аппроксимация множества достижимости при а) $k_{tp}=1$, б) $k_{tp}=2$.

Очевидно, такая аппроксимация не может быть сочтена достаточно адекватной. Повторив описанную выше процедуру с управлениями при $k_{tp} = 2$, получаем более точную аппроксимацию, включающую уже не только точки контура, но также и множество внутренних точек. Получаемое по такому способу «облако точек», безусловно, лучше оценки, полученной с управлением с одной точкой переключения, однако, во-первых, внутренность множества заполнена недостаточно плотно, во-вторых, некоторая часть множества по-прежнему может быть не охвачена построенной аппроксимацией. Результат данного вычислительного эксперимента представлен на рис. 1 б).

Увеличивая число точек переключения в алгоритме стохастической аппроксимации до 5, возможно получить более точные результаты (см. аппроксимацию множества рассматриваемой системы, изображенную на рис. 2 а), которая удовлетворяет «визуальным требованиям» к качеству). Однако с ростом числа точек переключения начинает сказываться другой эффект — «размывание» границ аппроксимирующего множества, что, очевидно, связано с излишними степенями свободы, вносимыми в генерируемые пробные управления. Условный «признак качества», отражающийся, как правило, в хорошо очерченной границе множества и достаточной плотности покрытия, растет с увеличением числа точек переключения немонотонно и, достигая некоторого максимума, начинает убывать. Область покрытия при некотором числе точек переключения начинает сужаться, граница перестает быть видимой. Описанный эффект для рассматриваемой модельной системы проиллюстрирован на рис. 2.

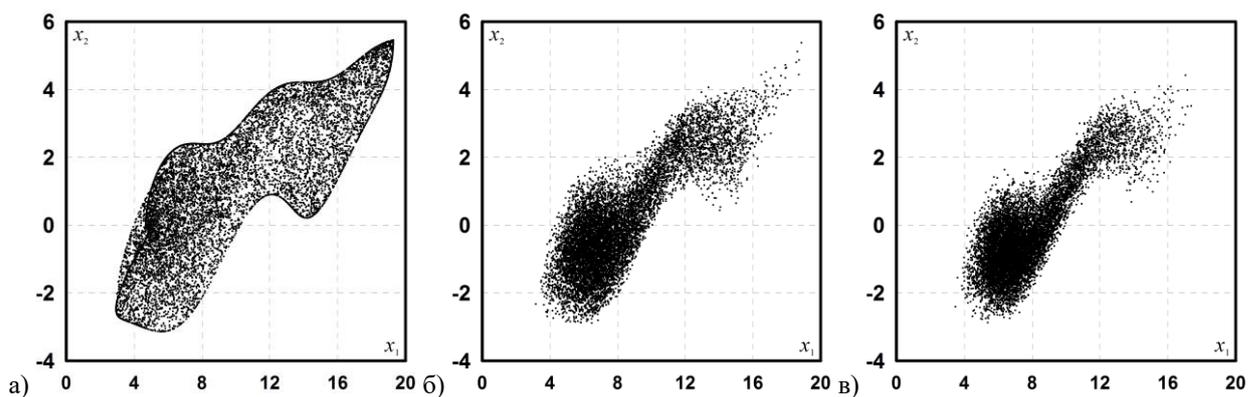


Рисунок 2 – Стохастическая аппроксимация множества достижимости а) $k_{tp} = 5$, б) $k_{tp} = 20$, в) $k_{tp} = 30$.

Свойства аппроксимаций для значений $k_{tp} \in \{1, 2, 5\}$ приведенные для иллюстрирующей системы, проявляются и для большинства систем, укладывающихся в рассматриваемую постановку задачи. Оптимальное значение параметра метода стохастической аппроксимации k_{tp} может быть различным для разных динамических систем, но его значение в конкретном случае возможно определить после серии экспериментов, оценивая как по неформальным признакам, так и по формальным, например, по размеру параллелепипеда, объемлющего множество достижимости.

2.2. Методы построения равномерной облачной оценки

Предлагаются алгоритмы поиска внутренних облачных оценок, которые получаются в виде набора достижимых точек, квазиравномерно заполняющих объем множества достижимости и, таким образом, в отличие от метода стохастической аппроксимации, результирующие в облако точек равномерно (с некоторой точностью) аппроксимирующее множество уже при небольшом количестве точек. Предлагаемые для этого алгоритмы отчасти схожи с методом «глубоких ям» из [37]: аналогично рассмотренному в этой работе подходу, для пополнения точек аппроксимирующего множества требуется многократное решение вспомогательных задач оптимизации.

2.2.1. Алгоритм равномерной аппроксимации

Алгоритм построения аппроксимации заключается в последовательном добавлении точек $x^i(t_1)$ к набору $\{x^n\}$ построенному на предыдущих этапах.

Алгоритм:

1. База элементов аппроксимации МД иницируется случайным вектором $B = \{x^1(t_1)\}$. Число элементов в базе $nb = 1$.
2. $x^* = \arg \max_{u \in U} \min_{i=1, nb} \rho_i$, где $\rho_i = \rho(x^i, x(t_1))$, $x^i \in B$.
3. $B = B \cup \{x^*(t_1)\}$, $nb = nb + 1$.
4. Если $nb < N$, то переход на шаг 2.
5. Иначе работа алгоритма завершена.

Равномерность заполнения, таким образом, оценивается как квадрат расстояния в евклидовом пространстве с $\rho_i = \|x^i - x[u](t_1)\|_2^2$. После завершения каждого этапа оптимизации на шаге 3 и 4 будет получено промежуточное решение, поэтому дополнительным критерием остановки алгоритма может служить затраченное на вычисления время.

2.2.2. Гладкая аппроксимация вспомогательного максиминного функционала

Вспомогательной задачей рассматриваемого алгоритма аппроксимации множества достижимости является задача максимизации невыпуклого негладкого функционала

$$J(u) = \min_{i=1, nb} \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j^i - x_j(t_1)|^2} \rightarrow \max.$$

Гладкая аппроксимация функции минимума в функционале позволит использовать для этой вычислительно тяжелой задачи численные методы оптимального управления, применимые для непрерывных дифференцируемых функционалов, и позволит получать более надежное решение (напр. стохастический «Р-алгоритм» из [140]).

Первый вариант аппроксимации строится на основе соотношения

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\sum_i |\rho_i|^p} = \max_i \rho_i,$$

которое было предложено использовать в численных методах решения нелинейных минимаксных задач в [98]. По построению все ρ_i положительные, следовательно, соотношение верно без смещения и нормирования, применяемых в случаях с отрицательными членами, и интересующий нас минимум выражается как

$$\min_i \rho_i = \frac{1}{\sqrt[p]{\sum_i \left| \frac{1}{\rho_i} \right|^p}},$$

а исходный функционал принимает вид

$$J_1(u) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{nb} \left| 1 / \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j^i - x_j(t_1)|^2} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \rightarrow \max.$$

В ходе реализации вычислительных экспериментов p выбирается из набора конечных значений $\{2, 4, 8, \dots, 2^k\}$.

Позднее был сформулирован обобщённый вариант гладкой аппроксимация функции максимума. Вместо суммы показательных функций предложено использовать сумму функций с большим значением градиента. В частности, разработана функция, называемая экспоненциальной штрафной функцией или комплексной функцией [94, 116, 120].

$$\sum_i \exp[\alpha \cdot \rho_i] \cong k \cdot \exp[\alpha \cdot \rho_{\max}],$$

где k положительное целое, а α достаточно велико. Переход к пределу обратной к экспоненциальной функции при растущем α даёт

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \ln \left(\sum_i \exp[\alpha \cdot \rho_i] \right) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \ln k + \rho_{\max}.$$

Функционал по аналогии с первым вариантом имеет вид

$$J_2(u) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{nb} \exp \left[\alpha / \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j^i - x_j(t_1)|^2} \right]} \rightarrow \max.$$

2.2.3. Алгоритм квазиравномерной аппроксимации

Данный алгоритм основывается на минимизации непрерывной функции, зависящей от расстояния между точками и при удачном выборе параметров позволяет ускорить итеративный процесс.

Алгоритм:

1. База элементов аппроксимации МД иницируется случайным вектором $B = \{x^1(t_1)\}$. Число элементов в базе $nb = 1$.
2. $x^* = \arg \min_{u \in U} \sum_{i=1}^{nb} S(\rho_i)$, $x^i \in B$.
3. Если $\min_{u \in U} \sum_{i=1}^{nb} S(\rho_i) = 0$, то $B = B \cup x^*$, $nb = nb + 1$, переход на шаг 2.
4. Иначе работа алгоритма завершена.

Минимизируемая функция $S(\rho)$, зависящая от расстояния между точками, определяется так, чтобы быть равной нулю, если ρ больше желаемого порогового значения d , равной достаточно большому числу M при $\rho = 0$, и монотонно убывать в промежутке между $[0, d]$.

При численных расчетах использованы:

1. Простейший кусочно-линейный вариант

$$S^0 = \begin{cases} M \left(1 - \frac{\rho}{d}\right), & 0 \leq \rho < d; \\ 0, & \rho \geq d. \end{cases},$$

2. Гладкий степенной вариант

$$S^1 = \begin{cases} M(\rho - d)^{2n}, & 0 \leq \rho < d; \\ 0, & \rho \geq d. \end{cases}$$

3. Гладкая экспоненциальная функция

$$S^2 = M e^{-Md\rho}.$$

Тот факт, что заранее известна нижняя оценка оптимального значения функционала в задаче оптимального управления, позволяет существенно экономить вычислительное время при использовании стохастических алгоритмов глобальной оптимизации.

Продemonстрируем процесс пополнения аппроксимирующего множества описанными в этом параграфе алгоритмами на тестовом примере. Рассмотрим нелинейную управляемую систему, определенную на временном интервале $t \in [0, 1.5]$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \sin x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_2 + u \end{cases}$$

с начальными значениями $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$, и множеством допустимых управлений $-1 \leq u \leq 2$. На рис. 3. представлен процесс пополнения базы точек для первого, а на рис 4. второго алгоритма на 20-й, 50-й и 100-й итерациях, для первого алгоритма использован метод аппроксимации показательной функцией при $p = 4$, для второго алгоритма выбрана S^0 при $M = 100, d = 0.2$. Точками серого цвета отмечены аппроксимации множества, полученные с помощью метода

стохастической аппроксимации, черными ромбами — точки равномерной аппроксимации.

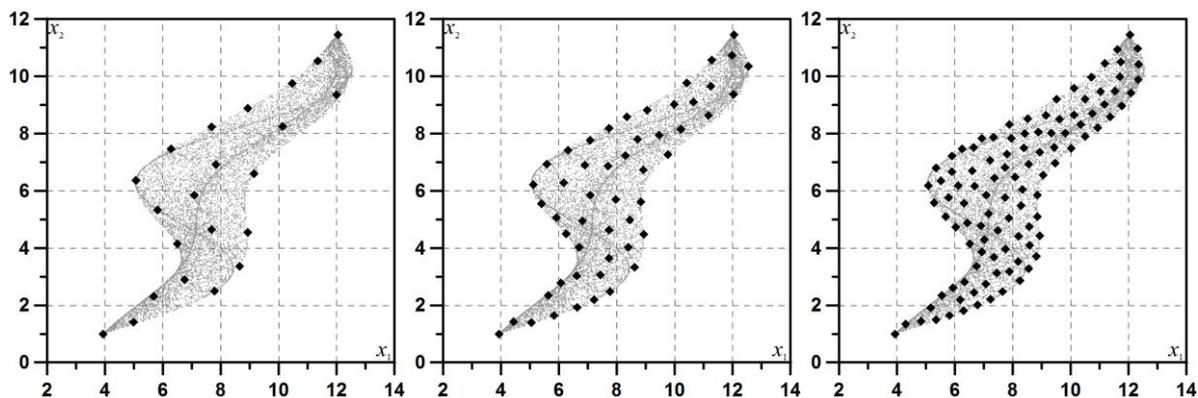


Рисунок 3 – Процесс пополнения базы точек алгоритма РЗ на 20-й, 50-й и 100-й итерациях.

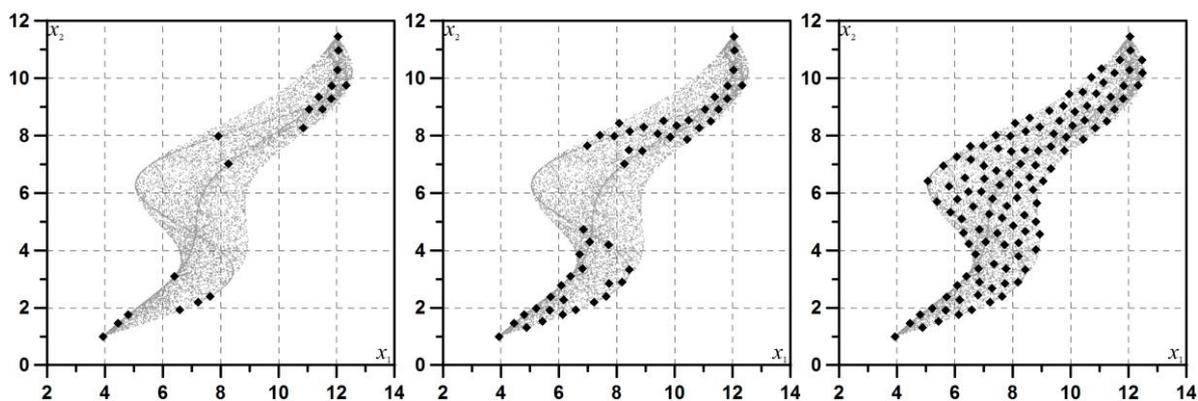


Рисунок 4. Процесс пополнения базы точек алгоритма КРЗ на 20-й, 50-й и 100-й итерациях.

Полученные методом равномерной аппроксимации множества на рис. 3. являются результатами на каждой итерации; в некоторых случаях и грубой оценки, изображенной на левом рисунке, может быть достаточно. Наборы точек, получаемые на промежуточных итерациях алгоритма квазиравномерной аппроксимации (рис. 4) не могут считаться аппроксимирующими множествами, однако, конечный результат работы алгоритма сопоставим с аналогичным результатом первого алгоритма.

2.3 Метод кусочно-линейной аппроксимации МД

Задача приближенного представления границы МД распадается на две: первая – задача эффективного вычисления точек МД и вторая – геометрическая задача представления многомерной фигуры, каковой является МД, с помощью проекций. Мы располагаем реальными возможностями проектирования либо

на оси, либо на плоскости (двумерное подпространство). Эта задача в простейшем частном случае является предметом инженерной графики (начертательной геометрии), а в общем случае может представлять собой сложную независимую проблему, которая не является предметом данного исследования.

Предлагаемый алгоритм дает возможность строить аппроксимации проекций МД на плоскость и основывается на максимизации площади многоугольника ограничивающего множество (алгоритм МП).

2.3.1. Вспомогательная экстремальная задача

Предположим, что система имеет двумерный выход $y = (y_1, y_2)$ и поставим задачу аппроксимации МД в плоскости выходов. В рассматриваемом двумерном случае задача аппроксимации МД может быть сведена к задаче максимизации площади фигуры, ограничиваемой правильным кусочно-линейным контуром – замкнутой ломаной линией без самопересечений.

Для решения этой задачи строится вспомогательная ЗОУ (называемая аппроксимативной), которая включает набор повторяющихся систем с независимыми управлениями.

Сконструируем управляемую систему из N подсистем:

$$\begin{aligned} \dot{z}^j &= f(z^j(t), v^j(t), t), z^j(t_0) = x^0, \\ t &\in [t_0, t_1], v^j(t) \in U, j = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (3)$$

каждая подсистема соответствует одной вершине аппроксимирующего контура.

Размерность рассматриваемой системы, таким образом, равна nN : $z_i(t), i = \overline{1, nN}$.

Для каждой подсистемы определен свой собственный набор управлений $v_i(t), i = \overline{1, r}$ с одинаковыми для всех подсистем ограничениями; размерность управлений общей системы rN .

В качестве максимизируемого функционала рассматривается «функционал объема» (в данном случае – площади), построенный по стандартной формуле

площади невыпуклого многоугольника. Площадь фигуры, ограниченной контуром, можно вычислить по следующей формуле:

$$J_0(v) = \frac{1}{2} \left\| \sum_{j=1}^N \left(y_1^j(t_1) + y_1^{j-1}(t_1) \right) \left(y_2^j(t_1) - y_2^{j-1}(t_1) \right) \right\|$$

Такой подход вычисления площади фигуры применим только для правильных контуров. В случае наличия в контуре самопересечений в формуле появляются слагаемые с различными знаками и применение ее становится некорректным.

Проблемами на пути построения качественной аппроксимации МД таким методом являются возможное возникновение в процессе расчетов «вырожденных контуров» – контуров с самопересечениями, контуров с неравномерными длинами звеньев, контуров с немонотонной нумерацией звеньев и др.

При отсутствии дополнительных требований к аппроксимирующему контуру в процессе варьирования управлений появляются звенья произвольно большого размера, что «выгодно» с точки зрения увеличения ограничиваемой контуром площади, но приводит к очень грубой аппроксимации границы МД на некоторых участках. Для преодоления этой проблемы вводится «функционал равномерной аппроксимации», штрафующий за существенно различный размер звеньев контура:

$$J_1(v) = \sum_{j=1}^N \left(L(y^j(t_1), y^{j-1}(t_1)) - S_r \right)^2,$$

где $L(y^j, y^{j-1}) = \sqrt{(y_1^j - y_1^{j-1})^2 + (y_2^j - y_2^{j-1})^2}$ – длина j -го звена, $S_r = \frac{1}{\sum_{j=1}^N L(y^j, y^{j-1})}$ – средняя длина звена по контуру, $y^0 = y^N$ – условие замкнутости контура.

С целью обеспечения правильности контура вводится функционал штрафа за самопересечения. Рассмотрим два отрезка, принадлежащих контуру, $[(y_1^k, y_2^k), (y_1^{k-1}, y_2^{k-1})]$ и $[(y_1^j, y_2^j), (y_1^{j-1}, y_2^{j-1})]$, $k \neq j$. Для того чтобы выяснить, содержит ли контур самопересечения, необходимо для каждой пары несмежных отрезков проверить, лежат ли концы одного по одну сторону от прямой, соединяющей концы второго, или по разные. Если один из отрезков

горизонтальный ($y_1^k = y_1^{k-1}$ или $y_1^j = y_1^{j-1}$), то достаточно найти знак выражения $(y_1^j - y_1^k)(y_{j-1}^1 - y_k^1)$. Положительный будет свидетельствовать об отсутствии пересечений, отрицательный – о наличии. В общем случае соответствующий вывод можно сделать на основе знака выражения $[(y_1^{k-1} - y_1^k, y_2^{k-1} - y_2^k), (y_1^j - y_1^k, y_2^j - y_2^k)] [y_1^{k-1} - y_1^k, y_2^{k-1} - y_2^k), (y_1^{j-1} - y_1^k, y_2^{j-1} - y_2^k)]$, где квадратные скобки означают косое (псевдоскалярное) произведение.

Определим $J_2(v) = \sum_{k,j=1}^N P_{k,j}$,

где $P_{k,j} = \begin{cases} 1, & \text{если отрезки с номерами } k \text{ и } j \text{ пересекаются;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Проверка на самопересечения может не выявить некоторые особенности, которые можно охарактеризовать касанием (попаданием в малую окрестность) точек, по индексам удаленных друг от друга. Для преодоления этой особенности введем функционал, штрафующий за наличие в контуре подобных свойств, т.е. при

каждом выполнении условия $\sqrt{(y_1^k - y_1^j)^2 + (y_2^k - y_2^j)^2} < \varepsilon$ для $|i - j| > 2$ к минимизируемому функционалу добавляется штраф фиксированного размера, который при этом домножается на весовой коэффициент.

Определим $J_3(v) = \sum_{k,j=1}^N O_{k,j}$,

где $O_{k,j} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины с номерами } k \text{ и } j \text{ попадают в круг радиуса } \varepsilon; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

2.3.2. Аппроксимативная задача оптимального управления и алгоритм ее решения

Аппроксимативная ЗОУ для рассматриваемой системы в сформулированных терминах может быть поставлена так:

$$J_0(v) \rightarrow \max$$

при условиях $J_1(v) = 0, J_2(v) = 0, J_3(v) = 0$.

Рассмотренная вспомогательная ЗОУ имеет размерность nN , где n – размерность исходной системы, а N – размерность аппроксимирующего контура.

Решение этой задачи существенно облегчается тем, что она имеет ярко выраженную блочную структуру и ведется с применением дискретизации по времени и параметризации по управлению и числу шагов дискретизации.

Параметризация по времени предполагает декомпозицию исходной задачи по интервалу $[t_0, t_1]$. Строится последовательность задач, зависящих от параметра, увеличивающего длину интервала времени: $t_0 < t^1 < t^2 < \dots < t^k = t_1$, где $k = \overline{1, K_T}$, K_T – число вспомогательных параметризованных задач. На каждом промежутке $[t^i, t^{i+1}]$ решается задача Коши с постоянным управлением.

Для параметризации задачи по управлению строится последовательность ЗОУ со все более широким допустимым множеством, начальным приближением для каждой последующей задачи является оптимальное управление из предыдущей.

Принимая во внимание, что качество аппроксимации МД естественным образом будет зависеть от числа вершин ограничивающего контура, важно заметить, что на практике размерность аппроксимативной ЗОУ будет 40-60 переменных (число переменных в n раз больше числа вершин), а для сложных невыпуклых МД необходимым минимумом может быть более 100 переменных. Таким образом, мы имеем дело с большими размерностями и задачей глобальной оптимизации.

2.4. Метод равномерной монотонной аппроксимации границы

При построении алгоритмов аппроксимации двумерных систем можно учесть специфику задачи (граница МД есть плоская кривая), отказаться от «случайного бросания» начальных состояний для сопряженной системы и построить детерминированный алгоритм, последовательно выбирая начальные точки со сферы единичного радиуса [101, 106]. При этом естественно возникает свойство монотонности аппроксимирующих точек границы МД. Равномерно пройдя единичную сферу с некоторым постоянным шагом, в общем случае невозможно получить равномерную аппроксимацию границы МД, что

подтверждается численными расчетами. Для обеспечения свойства равномерности аппроксимации границы в алгоритме необходим механизм обратной связи, позволяющий подобрать неравномерный шаг движения по сфере, приводящий к равномерному шагу аппроксимации границы МД.

2.4.1. Алгоритм (ПМ)

0. Задаются алгоритмические параметры: N_s – число шагов грубой оценки; K_L – коэффициент равномерности контура.
1. Грубо оценивается длина границы МД:
 - 1.1. начальный шаг движения по единичной сфере полагается $L_p = \frac{2\pi}{N_s}$;
 - 1.2. для $j = \overline{1, N_s}$:
 - 1.2.1. вычисляется значение угла поворота $\varphi_j = (j - 1)L_p$,
 - 1.2.2. начальные значения сопряженной системы полагаются $\psi_1(t_0) = \sin \varphi_j$, $\psi_2(t_0) = \cos \varphi_j$,
 - 1.2.3. с вычисленными $\psi_1(t_0)$, $\psi_2(t_0)$ интегрируется гамильтонова система

$$\dot{x} = f(x, \bar{u}, t), x(t_0) = x^0,$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\psi(t) \cdot \partial f(x, \bar{u}, t)}{\partial x}, t \in [t_0, t_1],$$
 где $\bar{u} = \arg \max H(\psi, x, v, t), v \in U$,
 - 1.2.4. записываются конечные состояния $s_j^0 = x(t_1)$;
 - 1.3. вычисляется L – грубая оценка длины кривой $\{s_j^0\}, j = \overline{1, N_s}$.
2. Вычисляются допуски и погрешности: $\delta_l = LL_p$, $\varepsilon_l = K_l L L_p$, $\delta_\varphi = 2\pi L_p$.
3. Полагается $j = 0, h_\varphi = \delta_\varphi, \varphi_i = 0$.
4. Текущий угол поворота полагается $\varphi = \varphi_j + h_\varphi$.
5. Вычисляются начальные значения сопряженной системы $\psi_1(t_0) = \sin \varphi$, $\psi_2(t_0) = \cos \varphi$.
6. С вычисленными $\psi_1(t_0)$, $\psi_2(t_0)$ интегрируется гамильтонова система

$$\dot{x} = f(x, \bar{u}, t), x(t_0) = x^0,$$

$$\psi = -\frac{\psi(t) \cdot \partial f(x, \bar{u}, t)}{\partial x},$$

при интегрировании в каждой точке $t \in [t_0, t_1]$ вычисляется $\bar{u} = \arg \max H(\psi, x, v, t), v \in U$, запоминается точка $s(\varphi) = x(t_1)$.

7. Если $|s_{j-1} - s(\varphi)| < \delta_l - \varepsilon_l$, то шаг увеличивается $h_\varphi = 1,1 h_\varphi$, производится переход на шаг 4.
8. Если $|s_{j-1} - s(\varphi)| < \delta_l - \varepsilon_l$, то шаг уменьшается $h_\varphi = 0,9 h_\varphi$, производится переход на шаг 4.
9. Записываются конечные состояния $s_j = x(t_1)$.
10. Полагается $j = j + 1, h_\varphi = \delta_\varphi, \varphi_i = \varphi$.
11. Если вся окружность пройдена $\varphi \geq 2\pi$, то переходим на шаг 4.
12. Алгоритм завершен.

Подбор шага h_φ может быть осуществлен по разным правилам, в частности ускорить процесс можно увеличивая шаг на случайную величину $h_\varphi = h_\varphi(1 + \xi)$, $\xi \in (0,1)$. Однако, если и увеличивать, и уменьшать шаг случайным образом, то высока вероятность заикливания фрагмента алгоритма с 4 по 11 шаг. Это же, к сожалению, может произойти и при фиксированных значениях – для рассматриваемых нелинейных задач возможна ситуация, при которой любой шаг по φ в пределах машинной точности и с учетом численного интегрирования не позволит получить желаемый шаг по s и алгоритм заиклится. Чтобы этого избежать и повысить качество аппроксимации, во-первых, введен дополнительный критерий завершения подгонки шага по числу выполненных итераций, во-вторых, в случае необходимости, процедура поиска дополнительных точек, основанная на максимизации по направлению.

2.4.2. Процедура поиска дополнительных точек границы

Если отрезок между двумя соседними точками на контуре оказался слишком велик и уменьшить его не удалось, то задействуется процедура поиска дополнительных точек границы. На отрезке намечается необходимое для

сохранения свойства равномерности число точек, далее для каждой точки решается задача максимизации по направлению перпендикулярному начальному отрезку. В общем случае, поскольку перебор φ производится против часовой стрелки, то точки \mathbf{s}_j МД будут добавляться так же последовательно против часовой стрелки, т.е. известна внешняя нормаль. Тем не менее, вследствие невыпуклости требуются вспомогательные средства проверки дополнительных точек.

Проиллюстрируем описанный эффект на тестовой задаче:

$$\dot{x}_1 = x_1 \sin(x_2 + 2) + x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 x_2 + 1.5x_1 + x_1 u,$$

$$t \in [0, 2], x_1(0) = -2, x_2(0) = 3, |u| \leq 1.$$

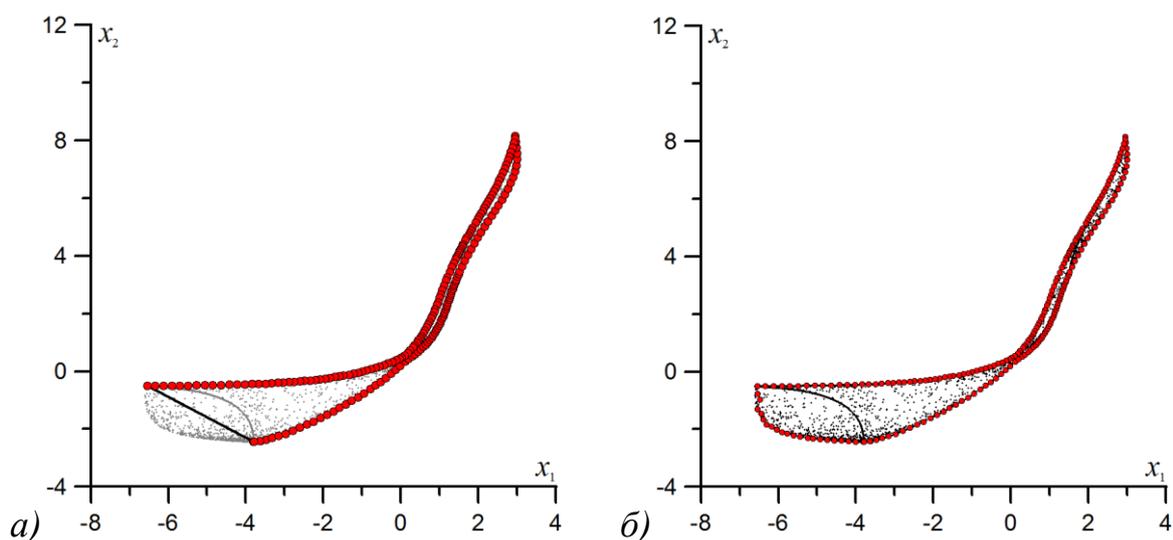


Рисунок 5 – Решение тестовой задачи алгоритмом в исходном варианте (а) и с процедурой поиска дополнительных точек (б).

На рис. 5 представлены результаты работы алгоритма в исходном варианте (а) и с процедурой поиска дополнительных точек (б), данный пример наглядно демонстрирует необходимость использования описанной процедуры. Важно отметить, что такой способ нахождения граничных точек МД, к сожалению, сильно зависит от качества решения внутренней задачи максимизации и рассматривается только как вспомогательный.

2.4.3. Устранение петель

Вследствие неоднозначности решения задачи по переводу из точки в точку для нелинейной системы возникает еще одна интересная особенность – аппроксимирующий контур может содержать петли, лежащие внутри МД. Выявить закономерность проявления такого эффекта и скорректировать алгоритм на этапе вычисления последовательности точек границы не удалось, поэтому построена процедура постобработки. Данная процедура включает в себя нахождение самопересечений как описано в п. 2.3.1., и отсечение той части последовательности, которая находится внутри основного контура.

Рассмотрим еще одну тестовую задачу:

$$\dot{x}_1 = \sin x_1 + x_2 \cos x_2 + u,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - 6 \sin x_1 + u,$$

$$t \in [0, 2.5], x_1(0) = 1, x_2(0) = -2, |u| \leq 1.$$

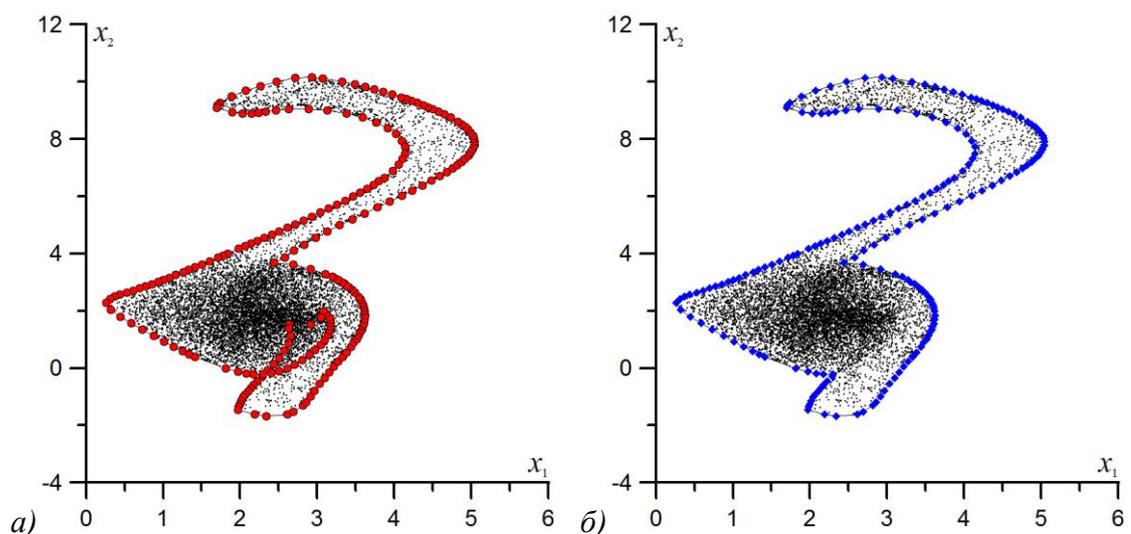


Рисунок 6 – Решение тестовой задачи с постобработкой (справа) и без неё (слева).

На рис. 6а) изображена полученная аппроксимация, на рис. 6б) она же с постобработкой, показано как предложенный подход позволяет исключить дефекты аппроксимации вида «петель».

2.4.4. Схема метода

На базе алгоритма и описанных дополнительных критериев строится собственно метод равномерной монотонной аппроксимации границы МД, схема которого состоит в следующем:

1. С равным шагом на единичной окружности выбираются начальные значения для сопряженной системы, производится интегрирование. Грубо оценивается длина границы МД.

2. Производится подбор шага на единичной окружности, который бы обеспечивал равномерный шаг на границе МД.

2.1. В случае, если после N_{imax} проб условие для k -ой и $(k + 1)$ -ой точки не выполнено, запускается процедура поиска дополнительных точек, по окончании которой продолжает работу основной алгоритм.

3. После построения всего аппроксимирующего МД контура производится поиск самопересечений и удаление петель.

2.5. Двухстадийный метод аппроксимации МД эллипсоидами

Наличие стохастической внутренней аппроксимации множества достижимости позволяет поставить задачи построения и внешней оценки исследуемого множества.

2.5.1. Аппроксимация МД описанным эллипсом

Задача 1 состоит в том, чтобы для системы (1) – (3) построить внешнюю аппроксимацию множества достижимости D в классе эллипсов минимальной площади.

Для решения поставленной проблемы формулируется задача оптимизации по параметрам, глобальное решение которой соответствует искомой аппроксимации. Используя алгоритмы невыпуклой оптимизации возможно найти эллипс с минимальной площадью, в который входят все ранее сгенерированные точки множества.

Задача оптимизации по параметрам, задающим эллипс, имеет вид:

$$J_1 = V_{ell} + wd \rightarrow \min,$$

где V_{ell} – объем эллипса, d определяется как сумма расстояний от точек, не принадлежащих эллипсу, до его центра, а w — весовой коэффициент.

Такой подход проиллюстрируем на линейном двумерном примере из [87] с известным точным описанием.

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = u,$$

$$t \in [0, 1], x_1(0) = 0, x_2(0) = 3, |u| \leq 1.$$

Точное значение объема множества достижимости $V_{\text{точное}} = \frac{2}{3}$; классическим методом эллипсоидов – объем аппроксимации $V = 1,2489$; значение функционала, полученное в ходе решения задачи, соответствует объему эллипса $V = J_1 = 0,7995$.

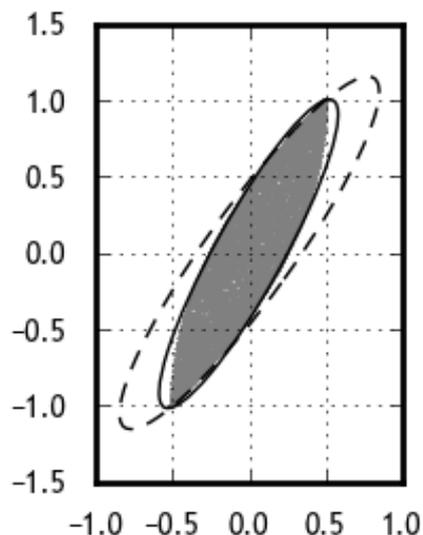


Рисунок 7 – Решение тесовой задачи методом эллипсоидов и предложенным методом (прерывистая линия).

На рис. 7 серым показано само множество, сплошной и прерывистой линией соответственно аппроксимация, полученная предложенным и классическим методом, демонстрируется обозначенное соотношение площадей МД и его аппроксимаций.

2.5.2. Аппроксимация объединением эллипсов

Задача 2. Для системы (1) – (3) построить внешнюю аппроксимацию области достижимости D в виде объединения конечного числа эллипсов, таким образом, чтобы объем их объединения был минимальным.

Отдельно от аппроксимации множества достижимости задача 2 сопоставима с задачами, рассматриваемыми при анализе неопределенных данных [27, 28], который как правило опирается на интервальные оценки [117].

Количество оптимизируемых параметров в сформулированной задаче по сравнению с задачей 1 пропорционально количеству эллипсоидов, включенных в аппроксимирующее множество. Минимизируемым функционалом является

$$J_2 = V_U + wd,$$

где значение d определяет штраф за нахождение точки из множества стохастической аппроксимации вне каждого из эллипсов, а w — весовой коэффициент. Объем объединения эллипсов — V — вычисляется приближенно по следующему алгоритму:

Шаг 1. Производится оценка размеров внешних объемлющих параллелепипедов для каждого эллипса.

Шаг 2. Вычисляются границы параллелепипеда, ограничивающего область объединения всех эллипсов.

Шаг 3. На вычисленном параллелепипеде строится аппроксимирующая равномерная сетка.

Шаг 4. Полным перебором по всем узлам равномерной сетки находятся вложенные ячейки сетки, принадлежащие хотя бы одному из эллипсов.

Шаг 5. Вычисляется оценка объема объединения эллипсов.

Шаг 6. Алгоритм закончен.

Точность вычисления объема объединения эллипсоидов напрямую зависит от размера сетки, который, естественно, влияет на общие временные затраты работы алгоритма. Решением задачи минимизации суммарного функционала является покрытие, включающее все найденные методом стохастической аппроксимации точки множества достижимости, которое при заданном количестве эллипсоидов имеет минимальный объем. С увеличением числа эллипсов резко растет количество параметров, по которым производится оптимизация, следовательно, и вычислительная трудность задачи, однако в большинстве случаев качество аппроксимации, оцениваемое как объем покрывающего объединения, для

числа эллипсов более двух растёт существенно медленнее (см. тестовые примеры). Объединение трех эллипсов, в случае плоской задачи, которое считалось в большинстве рассмотренных задач достаточным, требует решения оптимизационной задачи по пятнадцати параметрам. Столько же параметров требуется для определения, например, восьми кругов одинакового радиуса, что также может дать хорошее покрытие. Оказалось целесообразным при необходимости увеличения числа покрывающих объектов заменить их на более простые, получить дополнительный ресурс в количестве этих объектов без повышения вычислительной сложности оптимизационной задачи.

2.5.3. Аппроксимация объединением шаров разного размера

При построении аппроксимации, основанной на объединении шаров, мы можем рассматривать несколько вариантов постановок:

1. Задано число шаров n изменяемого, но одинакового для всех радиуса.
2. Задан радиус, число шаров оптимизируется.
3. Задано по l_i ($1 \leq l_i \leq n$, $\sum l_i = n$) шаров радиуса r_i , причем r_i различны и являются изменяемыми в ходе оптимизации параметрами.

Формируется задача оптимизации по $nl + k$ параметрам, причем $k \leq L$, nl из них определяют координаты центра каждого из l кругов $(x_1^{c_i}, \dots, x_n^{c_i})$, $i = \overline{1, n}$, а k задают радиусы r_j , $j = \overline{1, k}$. Минимизируемый функционал при этом определяется так же, как и в п. 2.5.2:

$$J_3 = V_U + wd.$$

В ходе экспериментов выяснилось, что, как и в случае эллипсов, излишние степени свободы приводят к неоправданному утяжелению задачи, поэтому достаточно использовать шары двух-трех видов общим числом до двадцати.

2.6. Метод построения внутренней аппроксимации на малых интервалах времени

Для двумерных линейных по управлению систем разработан быстрый метод получения внутренней аппроксимации, а также способ верификации этой оценки как граничной. Данный подход применим к задачам с малым интервалом времени и использует свойство релейности управления, удовлетворяющего принципу максимума. Обратим внимание на тот факт, что каждая граничная точка множества достижимости линейной по управлению системы может быть достигнута с применением управления релейного типа. Путем последовательного равномерного перемещения одной точки переключения на $[t_0, t_1]$ возможно построить набор управлений с одной точкой переключения. Одна половина будет состоять из управлений, в которых переключение происходит с нижней границы на верхнюю, вторая — с верхней на нижнюю. Проинтегрировав исходную систему с каждым управлением из набора, подобно процедуре, описанной в п. 2.4, получим замкнутый контур. На некотором небольшом интервале времени это контур будет адекватной аппроксимацией границы МД. Поиском управления с бóльшим числом точек переключения, которое переводит систему в состояние, лежащее вне построенного контура, можно проверить адекватность аппроксимации. Таким же образом можно расширять контур, поочередно передвигая точки.

Алгоритм

0. Задаются алгоритмические параметры: N_s — число шагов оценки, шаг перемещения точки переключения на интервале времени $h = \frac{(t_1 - t_0)}{N_s + 1}$;

1. Для $j = \overline{1, N_s}$:

1.1. вычисляется точка переключения $t_{per} = t_0 + jh$;

1.2. производится интегрирование системы с $\bar{u} = \begin{cases} u_l, t < t_{per}; \\ u_g, t < t_{per}; \end{cases}$

1.3. Запоминаются $s_j = x(t_1)$;

1.4. производится интегрирование системы с $\bar{u} = \begin{cases} u_g, t < t_{per}; \\ u_l, t < t_{per}; \end{cases}$

1.5. Запоминаются $s_{N_s + j} = x(t_1)$;

2. Алгоритм закончен, либо производится верификация.

3. Для $k = \overline{1, 2N_s}$:

3.1. Решается задача $J_k(u) = c_k(x) \rightarrow \max$, где $c_k(x)$ – вектор, направленный перпендикулярно прямой (s_{k-1}, s_{k+1}) , проходящий через s_k и направленный во вне контура. Решение запоминается $\tilde{s}_k = x^*(t_1)$.

3.2. Если $\forall k: \tilde{s}_k \approx s_k$, то контур составленный из $\{s_k\}$ является граничной аппроксимацией.

3.3. Если $J_k(u) > 0$, то производится обновление контура $s_k = \tilde{s}_k$.

4. Алгоритм завершен.

Дополнительным пунктом в алгоритм может быть включена проверка на самопересечения как в п. 2.4, причем в некоторых случаях самопересечения, найденные в контуре, полученном после выполнения стадии 1 алгоритма, могут быть исправлены на третьей стадии. Тогда как пересечение, и особенно множество пересечений, найденные после завершения всего алгоритма, будут свидетельствовать о невозможности применять данный алгоритм к выбранной задаче.

Тестовая задача 16:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & x(0) &= (3, -3) & |u| &\leq 1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + \sin x_2 + x_1^2 u & t &\in [0, 1] \end{aligned}$$

Тестовая задачи 17:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1 u & x(0) &= (-1, 1) & |u| &\leq 1 \\ \dot{x}_2 &= \cos x_1 + u & t &\in [0, 2] \end{aligned}$$

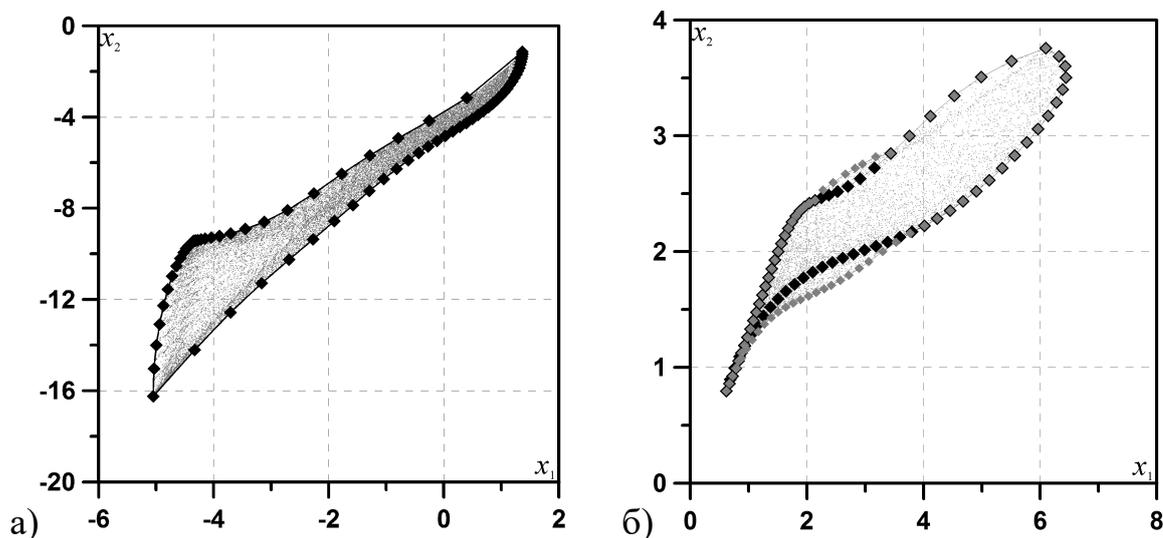


Рисунок 8 – Аппроксимации МД построенные методом внутренней аппроксимации на малых интервалах времени для а) тестовой задачи 16; б) тестовой задачи 17.

Результат работы алгоритма иллюстрируется на примере тестовых задач 16 и 17. Для первой задачи полученная на основе лишь небольшого числа интегрирований аппроксимация границы МД является удовлетворительной. Вторая задача показывает успешную работу процедуры уточнения. На рис. 8 точками серого цвета отмечена стохастическая аппроксимация множества, черными ромбами — начальный контур и серыми — уточненный контур.

2.7. Аппроксимация МД систем с разрывной правой частью

В этом параграфе рассматривается решение задач, постановка которых выходит за рамки заданных ранее критериев, с разрывными правыми частями. Как теоретический, так и численный анализ таких динамических систем существенно сложнее, чем для гладких. Серьезные трудности возникают в ситуации, когда разрывы происходят не только в фиксированные моменты времени, но также и на некоторых поверхностях, зависящих от фазовых координат. В классических работах [46, 79] разработаны вопросы существования решений дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Для задач оптимального управления системами такого класса основные результаты изложены в [4]. Работ по изучению алгоритмов аппроксимации множества достижимости в таком классе управляемых систем известно совсем немного [15, 76].

Расширенная постановка имеет вид:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), pr: g(x(t), t) < 0.$$

задана на $T = [t_0, t_1]$, с начальными условиями $x(t_0) = x^0$ и управлениями $u \in U$, и включает $g(x(t), t)$ — непрерывно дифференцируемую событийную функцию, характеризующуюся предикатом $pr: g(x(t), t) < 0, pr \in B = \{\text{False}, \text{True}\}$.

Для работы с такими системами невозможно использовать большинство разработанных методов напрямую, требуется их адаптация.

2.7.1. Стохастическая аппроксимация МД систем с разрывной правой частью

Метод стохастической аппроксимации МД легче других может быть адаптирован для таких систем. Основной сложностью, возникающей в рамках данного подхода, является интегрирование разрывных систем, которое, поскольку повторяется много раз, должно быть произведено достаточно быстро. Предложено несколько способов интегрирования, сравнение результатов применения которых, позволяет делать выводы о корректности получаемых аппроксимаций. Все рассмотренные алгоритмы основаны на методе Эйлера «с пересчетом», наиболее простыми вариантами, не использующими событийную функцию, являются реализации с фиксированным мелким шагом и с нефиксированным подстраиваемым шагом. В дополнение к этому реализованы методы с изменением шага, учитывающие вид разрыва и значение предиката, что позволяет избежать накопления погрешности.

Рассмотрим тестовую задачу.

Постановка задачи 18

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \sin(2x_2) + \text{sign}(x_2) & x(0) &= (-5, 1) & |u| &\leq 1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - \frac{1}{2} + u & t &\in [0, 2,5] \end{aligned}$$

На рис. 9 серыми точками изображено полученное методом стохастической аппроксимации МД тестовой задачи 18, а черными ромбами его граница.

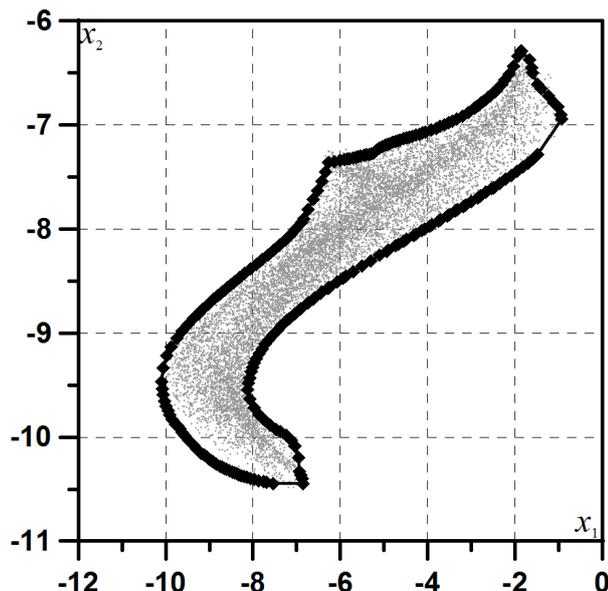


Рисунок 9 – Аппроксимация МД разрывной задачи 17.

2.7.2. Аппроксимация границы МД систем с разрывной правой частью

Описанный в п. 2.4 метод, основанный на принципе максимума Понтрягина, позволяет получать хорошие аппроксимации двумерных МД нелинейных непрерывных систем, что подтвердили проведенные вычислительные эксперименты. В качестве адаптации схемы к задачам с разрывами в правых частях типа сигнума предлагается использовать непрерывное приближение вида

$$\text{sign}(x) \approx \frac{\pi}{2} \text{arctg}(p \cdot x).$$

С использованием предложенного алгоритма строится набор аппроксимаций с различными $p = \{10, 100, 1000, \dots\}$, оценивается сходимость контуров МД, в качестве итоговой выбирается наилучший вариант. Подход апробирован на тестовых задачах и показал себя достаточно перспективным.

Постановка задачи 19

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \text{sign}(x_2) \cdot \cos(x_2) + u & x(0) &= (-5, 1) & |u| &\leq 1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 + \text{sign}(x_1) & t &\in [0, 2, 5] \end{aligned}$$

Постановка задачи 20

$$\dot{x}_1 = x_2 + \sin(x_1) - u \quad x(0) = (1, -3) \quad |u| \leq 1$$

$$\dot{x}_2 = |x_2| - x_1^3$$

$$t \in [0, 2]$$

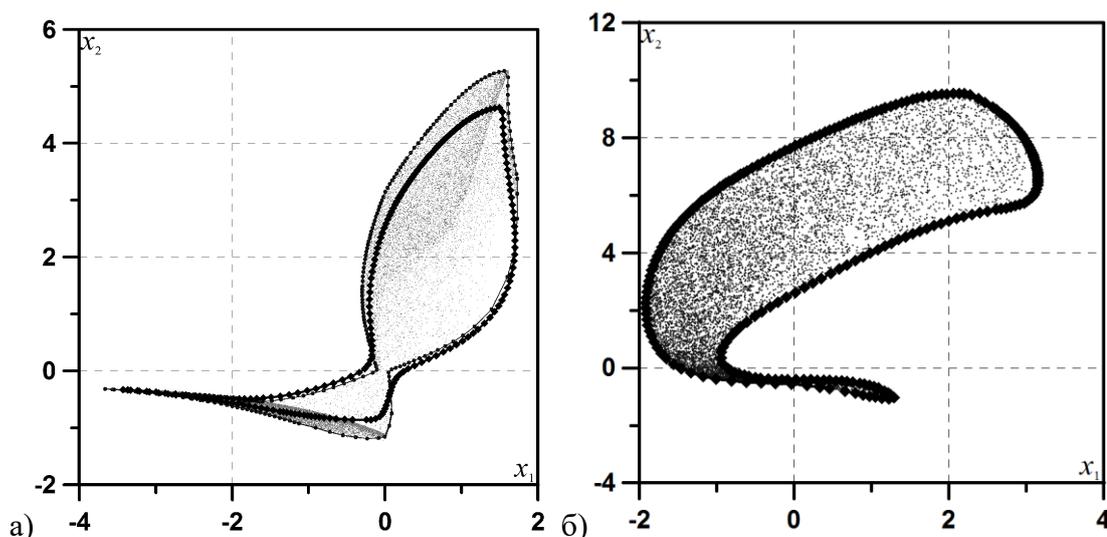


Рисунок 10 – Аппроксимация МД тестовой задачи а) 19, б) 20.

На рис. 10 а) показан промежуточный и итоговый аппроксимативные контуры для тестовой задачи 19. На рис. 10 б) аппроксимация МД тестовой задачи 20, которая не имеет разрыва, но правая часть системы не дифференцируема, т.е. в сопряженной системе возникает сигнум-функция, и построение границы указанным методом возможно только при использовании аппроксимации.

Выводы главы

Разработаны новые алгоритмы аппроксимации МД нелинейных динамических систем, позволяющие получать внутренние (равномерная и квазиравномерная облачная аппроксимация), граничные (кусочно-линейные аппроксимации, основанные на максимизации площади, принципе максимума Понтрягина и свойстве релейности управлений) и внешние (аппроксимация объединением эллипсов или шаров) оценки. Предложенные алгоритмы имеют различные основы и, вследствие этого, представляют собой набор средств достаточно репрезентативных, чтобы решение несколькими методами могло служить в целях проверки достоверности результатов каждого из них.

Глава 3. Вычислительные технологии и специализированное программное обеспечение

Все описанные во второй главе алгоритмы были реализованы и интегрированы в специализированное программное обеспечение OPTCON-MD, для полноценного функционирования которого потребовалось сформулировать и унифицировать математическую и программные постановки задач, разработать вычислительные схемы и, наконец, объединить все необходимые компоненты и создать вычислительные технологии.

Под вычислительной технологией понимается совокупность алгоритмов и методов, структур данных, расчетных методик и программных реализаций математической модели. Программное обеспечение реализовано на языке Си и состоит из набора алгоритмов, позволяющих сформировать множество схем решения с учетом специфики поставленной задачи. Пользователь в программной постановке задачи может произвести выбор методов и настройку их алгоритмических параметров. Дополнительно проработано большинство вариантов проведения расчетов и предложены стандартные вычислительные схемы, позволяющие при наличии небольшого количества априорной информации не проводить полную настройку параметров, а ограничиться выбором одной из схем.

3.1. Постановка задачи

Численное решение задачи с помощью программного обеспечения в нашем случае предполагает запись математической постановки задачи на программном языке С. Для корректности математической постановки в рамках данной работы необходимо задание правых частей управляемой динамической системы, вектор начальных состояний, множество допустимых управлений, а также отрезок времени, в конечный момент которого требуется построить множество достижимости. Программная или более широкая технологическая постановка включает в себя ряд дополнительных параметров, необходимых для функционирования программ. Часть этих параметров обязательно должна быть

задана пользователем при описании постановки, для остальных будут зафиксированы рекомендованные значения по умолчанию.

Технологическая постановка включает в себя стандартные пункты из [15]:

0. Размерности задачи (число фазовых переменных, число управлений)
1. Начальные значения фазовых переменных.
2. Ограничения на управления.
3. Правые части системы дифференциальных уравнений с управляющими воздействиями.
4. Аналитические выражения для производных функций, входящих в постановку задачи (при отсутствии заменяются разностными схемами).
5. Стартовая дискретизация задачи, максимальные и минимальные размеры сетки дискретизации.
6. Значение требуемой точности интегрирования.
7. Максимальное процессорное время, отведенное под расчет.
8. Режимы протоколирования, визуализации и фиксации результатов.

Кроме того, специфические составляющие для конкретных алгоритмов аппроксимации МД:

9. Вид генерируемого в методе стохастической аппроксимации управления.
10. Число точек аппроксимации (для метода стохастической и равномерной аппроксимации).
11. Аналитические выражения для правых частей сопряженной системы (обязательно для метода равномерной монотонной аппроксимации границы МД).
12. Число шагов грубой оценки для метода равномерной монотонной аппроксимации границы МД.
13. Вид (номер) вспомогательной минимизируемой функции для методов равномерной и квазиравномерной аппроксимации.
14. Стартовое значение для параметра d метода квазиравномерной аппроксимации.
15. Число точек аппроксимирующего контура для метода кусочно-линейной аппроксимации границы.

16. Число эллипсов для соответствующего метода.

17. Параметры алгоритма аппроксимации объединением шаров разного размера.

В качестве примера приведем постановку задачи из тестовой коллекции

```
void init_razm(void){ //Размерности системы
    nx=2;                //Число состояний
    nu=1;                // Число управлений
}

void init_zadacha(void) {
    t0=0.0;              // начальный момент времени
    t1=5.0;              // конечный момент времени
    ul[1]=-1.0; ug[1]=1.0; // ограничения на управления
    m_integ = 1;         // номер метода интегрирования
    h0=1E-3;             // стартовый шаг дискретизации
    hmax=0.1;            // максимальный шаг дискретизации
    epsint=1E-5;         // значения требуемой точности интегрирования
    max_time=10;         // максимальное расчетное время в секундах
    criterion_d=5.0; M=100.0; //параметры метода квазиравномерной аппроксимации
}

void px0(a,x0) double a[],x0[];{ // начальное состояние системы
    x0[1]=5.0;
    x0[2]=0.0; }

void pf(x,a,t,z) double x[],a[],t,z[]; { // правые части системы
    z[1]=x[2];
    z[2]=uuu-sin(x[1]);}

void ff_p(x,t,z) double x[],t,z[];{ //правые части сопряженной системы
    uuu=((x[4]>0.0)? 1.0:-1.0);
    z[1]= x[2];
    z[2]=uuu-x[1];
    z[3]= x[4];
    z[4]=-x[3];}
```

3.2 Базовые компоненты вычислительной технологии

Постановка задачи формируется в с-файле. После этого выполняется компиляция всех необходимых компонентов в программу, предназначенную для решения именно этой математической постановки, в то же время многие параметры технологической постановки могут быть изменены в диалоговом режиме в процессе расчетов. Результатом работы полученной программы будет являться набор текстовых файлов с данными о полученных аппроксимациях МД (для

большинства методов это набор координат точек, которые образуют облако или контур), с данными о ходе вычислительного процесса и процессорном времени решения задачи, характеристиками полученных аппроксимаций (такими, как размер объемлющего параллелепипеда, площадь покрытия и пр.), и, при необходимости, другими данными.

Основные программные модули делятся на несколько типов и состоят из:

1. Алгоритмических компонентов:

- алгоритмов построения внутренних оценок МД;
- алгоритмов аппроксимации границы МД;
- алгоритмов построения внешних оценок МД;
- алгоритмов оптимизации;
- алгоритмов решения задач Коши;
- алгоритмов решения вспомогательных задач одномерного поиска;
- алгоритмов решения вычислительных задач нижнего уровня (вычисление интегралов, решение систем линейных уравнений, поиск нулей одномерной и многомерной функции, интерполяция управлений и траекторий по табличным значениям, генерация псевдослучайных чисел, вычисление собственных значений матрицы и т.п.).

2. Инструментальных и сервисных компонентов:

- средства построения субоптимальной сетки дискретизации;
- алгоритмы оценки погрешностей интегрирования и дискретизации;
- средства декомпозиции множества управляющих переменных;
- алгоритмы разностной оценки производных;
- средства учета доступных аналитических формул для градиентов;
- средства верификации аналитических формул для производных;
- средства протоколирования процесса вычислений.

3. Метакомпонентов:

- диалоговую систему, реализующую пользовательский интерфейс;
- средства автоматизации и контроля постановки задачи;

- алгоритмы планирования и автоматизации расчетов;
- алгоритмы принятия решений о ходе вычислительного процесса;
- средства конструирования и фиксации новых вычислительных схем;
- механизмы настройки алгоритмических параметров;

3.3. Стандартные многометодные вычислительные схемы

Предложенная система взаимодействия программных компонентов и пользователя предоставляет широкие возможности для варьирования вычислительных схем. Большое число методов, которые в свою очередь имеют настраиваемые параметры, с одной стороны позволяет процессу вычислений быть гибким и получать адекватные и надежные решения сложных задач, с другой стороны порождает дополнительные препятствия для быстрого решения простых задач. С целью облегчить взаимодействие пользователя (который в любом случае должен быть достаточно квалифицирован в постановочной части вопроса, но не обязан углубляться в алгоритмическую) предложено несколько вычислительных схем, названных стандартными. Разумеется, если задача не является известной и не проводится тестовый или сравнительный расчет, заранее оценить сложность задачи по постановке не всегда возможно. Тем не менее, можно предполагать, что, например, решение задачи с существенными нелинейностями в правых частях и длинным интервалом времени окажется затратнее задачи линейной по управлению и заданной на малом интервале времени. Такая прогнозируемая сложность или трудоемкость и отражена в описании схем, при этом складывается она из жесткости и, как следствие, сложности интегрирования системы, сложности геометрии МД и пр., указано примерное время счета для задач из коллекции (расчеты проводились на ПК с процессором Intel Core i7-4500U, 8 ГБ ОЗУ).

Схема 0. Быстрый, в пределах минуты, расчет для получения изображения и прикидочных характеристик МД, применим для систем произвольной размерности, преимущественно не очень сложных:

а) Стохастическая аппроксимация при $k_{tp} = 2$, $N_{iter} = 5000$.

- б) Стохастическая аппроксимация при $k_{tp} = 5, N_{iter} = 5000$.
- в) Стохастическая аппроксимация при $k_{tp} = 10, N_{iter} = 5000$.

Схема 1. Расчет, позволяющий получить внутреннюю и граничную оценки МД системы средней сложности с двумя фазовыми переменными и занимающий несколько минут.

- а) Стохастическая аппроксимация при $k_{tp} = 5, N_{iter} = 1000$.
- б) Алгоритм квазиравномерной аппроксимации, использующий гладкую минимизируемую функцию S^1 с параметрами $M = 100, d = 0,002\sqrt{l_1^2 + l_2^2}$, где l_1 и l_2 являются размерами объемлющего прямоугольника для МД из а).
- в) Алгоритм монотонной аппроксимации границы $N_s = 100, K_L = 1,5$.

Схема 2. Трудоемкая схема, которая, однако, применима только для относительно простых двумерных задач. Вычисления могут занять более 10 минут.

- а) Алгоритм равномерной аппроксимации с вспомогательным оптимизируемым функционалом вида $J_1, p = 8$. Число точек $N = 100, \max_time = 500$.
- б) Алгоритм кусочно-линейной аппроксимации границы. Число точек $N = 40$.

Схема 3. Получение внешних оценок для сложных задач, решение которых другими методами неудовлетворительно. Основным критерием остановки является время, т.е. потребует столько времени, сколько пользователь готов ждать.

- а) Стохастическая аппроксимация при $k_{tp} = 5, N_{iter} = 10000$.
- б) Стохастическая аппроксимация при $k_{tp} = 10, N_{iter} = 5000$.
- б) Аппроксимация объединением двух эллипсов.
- в) Аппроксимация объединением 10 шаров трех видов.

Схема 4. Главная цель применения такой схемы – получение надежной аппроксимации границы МД. Применима для двумерных задач.

- а) Стохастическая аппроксимация вычисляется только для наглядной оценки результатов.
- б) Кусочно-линейная аппроксимация границы. Число точек $N = 100$.
- в) Равномерная монотонная аппроксимация границы при $N_s = 200, K_L = 1,2$.

3.4. Коллекция тестовых задач

Разработку численных методов решения тех или иных задач сложно себе представить без проведения тестовых расчетов, даже если скорость сходимости этих методов теоретически вычислена, но и, в особенности, если дать такие оценки затруднительно. Для того, чтобы результаты тестирования были репрезентативны, нельзя ограничиться случайными задачами, необходимо создание тестовой коллекции.

Требования к тестовым задачам оптимизации предложены в [66] и состоят в следующем:

- 1) тесты должны быть унифицированы и быть общепринятыми;
- 2) тесты должны моделировать типовые трудности для данного класса задач;
- 3) решение в тестовой задаче должно быть известно;
- 4) задачи должны быть достаточно компактными;
- 5) тестовые задачи не должны давать преимущества тому или иному методу.

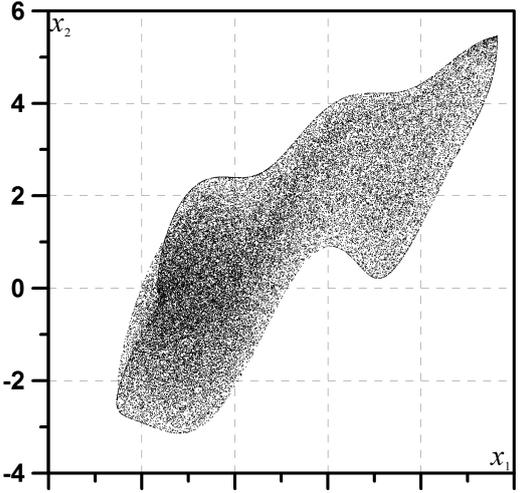
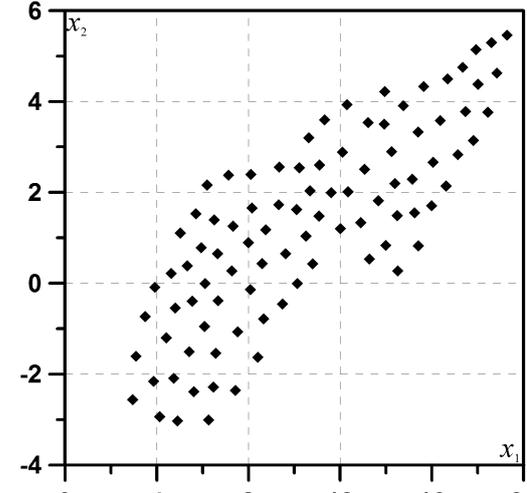
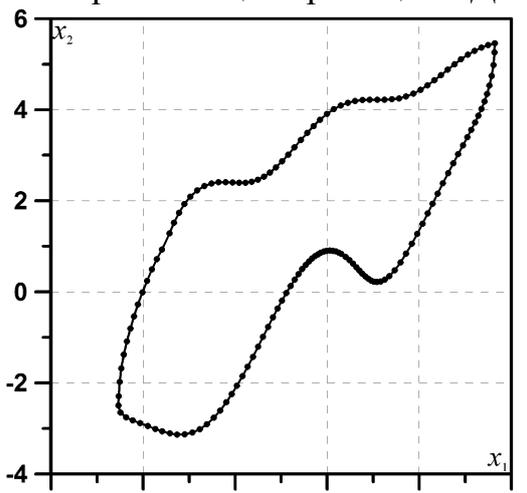
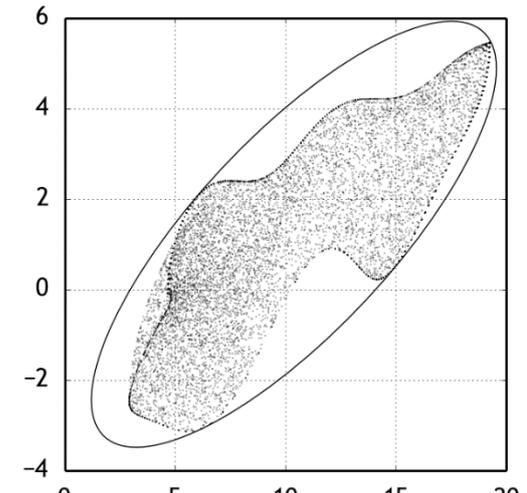
В невыпуклых задачах оптимального управления требование наличия известного решения обычно заменяется на «должно быть представлено лучшее из известных в тестовой задаче решений» (принцип «best of known») [36]. В нашем же случае и это не просто, т.к. решение поставленной задачи описания невыпуклого МД не выражается ни числом, ни формулой. Тем не менее, и тестовая коллекция, и тестирование алгоритмов необходимо, поэтому решение будем представлять в виде иллюстраций, а также давать различные численные характеристики, когда это возможно. Тестовые задачи преимущественно двумерные именно потому, что основным результатом решения является изображение множества, что становится определенной проблемой в многомерном случае. В коллекцию включены как задачи, опубликованные в научных изданиях, так и специально сконструированные тесты, моделирующие основные трудности для алгоритмов аппроксимации МД.

Разработана форма представления данных о задаче, в неё включены: информация об источнике задачи, математическая постановка и результаты решения задачи несколькими (в соответствии с вычислительными схемами) или всеми предложенными алгоритмами. Для каждого алгоритма указываются

значения существенных параметров, число задач Коши и процессорное время, затраченные на получение решения, размеры объемлющих параллелепипедов ($l^i = (x_{j_{\max}}^i - x_{j_{\min}}^i)$), и данные, которые позволяет получить конкретный алгоритм. Для методов получения облачных оценок – это среднее расстояние между точками аппроксимации и максимальное от него отклонение; для граничных аппроксимаций – это длина границы; для покрытий – это площадь покрытия.

В приложение включены 20 невыпуклых МД, вошедшие в разработанную в рамках диссертационной работы тестовую коллекцию.

Задача	01	
Имя	Non-linear Pendulum (NLP Problem)	
Источник	Тятюшкин А.И. Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992. 193 с. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003. 614 с.	
Постановка	Размерность задачи	$n = 2$
	Интервал изменения времени	$t \in T = [0, 5]$
	Система дифференциальных уравнений	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u - \sin x_1$
	Начальное значение	$x_0 = (5, 0)$
	Ограничения на управление	$u \in U = [-1, 1]$
Решение	(l^1, l^2)	(16,3315; 8,5451)
	Длина границы	40,0261
	S_{cont}	54,68823
	$S_{ellipse}$	85,079301
	$\bar{\rho}$	0,60913

<p>Стохастическая аппроксимация</p>  <p>$N = 50000$</p>	<p>Равномерная аппроксимация</p>  <p>$J_1, p = 32, N = 90, \max_time = 1000$</p>
<p>Количество задач Коши 50000</p>	<p>Количество задач Коши 5712779</p>
<p>Процессорное время 59 сек</p>	<p>Процессорное время 1000 сек</p>
<p>Равномерная монотонная аппроксимация границы МД</p>  <p>$N_s = 100, K_L = 1,5$</p>	<p>Аппроксимация эллипсом</p> 
<p>Количество задач Коши 527</p>	<p>Количество задач Коши 10000</p>
<p>Процессорное время 2 сек</p>	<p>Процессорное время 2500 сек</p>

3.5. Методики тестирования алгоритмов

Этот параграф посвящен вопросу тестирования реализованных алгоритмов и вычислительных технологий. При этом не имеютя ввиду тестирование и отладка реализаций алгоритмов на предмет обнаружения программистских ошибок. Эти безусловные этапы разработки мы полагаем все же более технической, хоть и трудоемкой, нежели научной работой, поэтому оставляем за кадром, полагая, что

добросовестное их выполнение, позволило устранить все критические недочеты в финальных и исследуемых реализациях алгоритмов. Тем самым тестирование в рамках этой диссертационной работы служит для исследования свойств предложенных вычислительных технологий, выявления классов задач, на которых некоторые алгоритмы более эффективны, определения областей применимости методов, и, наконец, демонстрации работоспособности всех представленных подходов. Широкий охват изучения особенностей, сильных и слабых мест алгоритмов достигается путем тестирования разных типов.

Сравнительное тестирование является очень распространенным и основывается на решении тестовых задач разными методами с целью дальнейшего сопоставления результатов и выбора лучших программных реализаций алгоритмов. Наличие целого спектра идеологически отличающихся подходов, применяемых к одной и той же задаче, позволяет считать выводы о корректности решения достоверными. Сравнение различных программных реализаций одного алгоритма или схожих алгоритмов может быть основано на процессорном времени решения задачи, при расчетах на одном и том же компьютере, учитывать количество решенных задач Коши, необходимых для получения решения и др.

Параметрическое тестирование – популярный метод в задачах оптимизации, заключается в генерации модельных примеров с параметрами и присваивании случайных значений этим параметрам. В нашем случае необходимо учитывать, что чувствительность моделей к варьированию их параметров может быть весьма высока, а дифференциальные свойства модели могут ухудшиться настолько, что решению вспомогательных задач станет проблемой. Рассматривается способ ввода параметра, действие которого имеет предсказуемое выражение – он влияет на размер множества допустимых управлений.

Стресс-тестирование для задач оптимизации направлено на получение информации о предельных свойствах исследуемого программного средства. Тестовые примеры моделируют типовые трудности, такие как: существование большого числа локальных экстремумов, наличие экстремумов с узкой областью притяжения, близость локального и глобального экстремумов и другие. Поскольку

рассматриваемые постановки задач не имеют ни локальных ни глобальных экстремумов, а неформальные геометрические трудности сложно смоделировать простым изменением параметров, в качестве проверочного объекта используем интервал изменения времени. Это оправдано тем, что на малом интервале времени большинство систем будет иметь МД близко к МД линейной системы, а на большом интервале даже в несложной, на первый взгляд, задаче могут обнаружиться неожиданные аспекты.

3.6. Сравнительное тестирование алгоритмов заполнения

Остановимся подробнее на тестировании и сравнении описанных в п. 2.2 алгоритмов равномерной и квазиравномерной аппроксимации. Основные моменты о большей надежности первого алгоритма и быстроте второго были высказаны ранее, однако, каждый из алгоритмов имеет варианты реализации вспомогательной задачи, и необходимо выявить лучший (хотя бы в большинстве случаев). Технология оценки полученных данных заключается в сравнении результатов расчетов, проведенных по первому алгоритму с негладким функционалом, а также с использованием аппроксимации функционала с различными параметрами p и α , и по второму алгоритму – с разными минимизируемыми функциями по нескольким характеристикам:

1. Среднее значение расстояния от точки до ближайшей $\bar{\rho} = \frac{1}{nb} \sum_i \tilde{\rho}_i$, где $\tilde{\rho}_i = \min_j \rho(x^i, x^j)$.
2. Максимальное отклонение от среднего $\rho_{\max} = \max_i |\bar{\rho} - \tilde{\rho}_i|$.
3. Общее отклонение $\Delta\rho = \frac{1}{nb} \sum_i |\bar{\rho} - \tilde{\rho}_i|$.
4. Размеры объемлющего параллелепипеда $l = (x_{j_{\max}}^i - x_{j_{\min}}^i)$.
5. Число решенных задач Коши (n_K).

Результаты представлены в таблицах 1–4, в столбцах которых располагаются характеристики для разных вариантов равномерного алгоритма: в первой строчке исходный метод (обозначается $\max \min$), далее – метод аппроксимации

показательной функцией (обозначается $\|\rho\|_p$) для различных p , метод с экспоненциальной функцией (обозначается $\exp[\alpha \cdot \rho]$) для разных α ; варианты квазиравномерного алгоритма с S^0, S^1, S^2 при указанных M и d . Причем, в первом случае число точек аппроксимации строго задается, а во втором — алгоритм имеет естественное условие останова, и количество точек может быть различным (указывается в предпоследнем столбце после размеров множества), поэтому параметры M и d задаются так, чтобы результаты были сопоставимы. Каждая таблица соответствует одной из задач из тестовой коллекции.

Таблица 1. Результаты тестирования для задачи 01.

	$\bar{\rho}$	ρ_{\max}	$\Delta\rho$	d	n_K
max min	1,2559	2,7175	0,2438	15,9982; 8,3843; 45 точек	3082795
$\ \rho\ _p, p = 4$	1,2765	2,2297	0,2865	16,3262; 8,4268; 45 точек	2881310
$\ \rho\ _p, p = 8$	1,2497	1,8699	0,2435	16,3393; 8,5451; 45 точек	3091861
$\ \rho\ _p, p = 32$	1,1315	1,7707	0,2827	16,3315; 8,4774; 45 точек	3126650
$\exp[10 \cdot \rho]$	1,2113	1,9942	0,2177	16,3314; 8,4319; 45 точек	3013465
$\exp[100 \cdot \rho]$	1,2302	2,6805	0,2947	15,8834; 8,4837; 45 точек	3058493
$S^0, M = 100,$ $d = 1,25$	1,2914	2,2059	0,1029	15,4154; 8,5865; 43 точки	231009
$S^1, M = 100,$ $d = 1,25$	1,3559	1,8551	0,1963	15,4154; 8,4978; 40 точек	96135
$S^2, M = 100,$ $d = 0,04$	1,2948	2,1914	0,1353	16,1939; 8,5785; 45 точек	235559

Таблица 2. Результаты тестирования для задачи 07.

	$\bar{\rho}$	ρ_{\max}	$\Delta\rho$	l	n_K
max min	1,3321	2,0299	0,2109	11,9477; 18,2171; 120 точек	2954340
$\ \rho\ _p, p = 4$	1,2763	1,0819	0,2102	12,3116; 18,2684; 120 точек	2834923
$\ \rho\ _p, p = 8$	1,2474	1,3211	0,2152	12,1367; 18,2457; 120 точек	2796201

$\ \rho\ _p, p = 32$	1,1595	0,5722	0,1793	11,9993; 18,1526; 120 точек	2761742
$\exp[10 \cdot \rho]$	1,2163	1,2465	0,1922	11,9954; 17,7861; 120 точек	2604326
$\exp[100 \cdot \rho]$	0,8578	0,7980	0,1701	11,5389; 15,7339; 120 точек	2605821
$S^0, M = 100,$ $d = 1$	1,0886	1,5917	0,0862	11,8559; 17,8665; 120 точек	121401
$S^1, M = 100,$ $d = 1$	1,0316	2,0821	0,0852	11,9785; 18,0453; 125 точек	98668
$S^2, M = 100,$ $d = 0,05$	0,8293	1,4886	0,1374	12,0819; 18,0079; 160 точек	800954

Таблица 3. Результаты тестирования для задачи 08.

	$\bar{\rho}$	ρ_{\max}	$\Delta\rho$	l	n_K
max min	0,4303	0,3027	0,0759	17,8862; 9,4016; 140 точек	4138617
$\ \rho\ _p, p = 4$	0,4575	0,3548	0,0679	17,8821; 9,4513; 140 точек	4244299
$\ \rho\ _p, p = 8$	0,4331	0,4041	0,0798	17,8827; 9,4079; 140 точек	3933243
$\ \rho\ _p, p = 32$	0,4485	0,3965	0,0833	17,8822; 9,4148; 140 точек	3587702
$\exp[10 \cdot \rho]$	0,4407	0,5413	0,0999	17,8824; 9,4308; 140 точек	2397973
$\exp[100 \cdot \rho]$	0,4374	0,3881	0,0872	17,8819; 9,3405; 140 точек	4341315
$S^0, M = 100,$ $d = 0,5$	0,5211	0,7181	0,0248	17,9132; 9,2401; 110 точек	108325
$S^1, M = 100,$ $d = 0,5$	0,4411	0,7181	0,0796	17,911; 9,1102; 140 точек	664901
$S^2, M = 100,$ $d = 0,1$	0,4713	0,8423	0,0707	17,4008; 9,4771; 125 точек	1526205

Таблица 4. Результаты тестирования для задачи 09

	$\bar{\rho}$	ρ_{\max}	$\Delta\rho$	d	n_K
max min	0,0376	0,0322	0,0068	3,8599; 6,3836; 150 точек	17958625
$\ \rho\ _p, p = 4$	0,0373	0,0211	0,0063	3,8535; 6,3836; 150 точек	16969818
$\ \rho\ _p, p = 8$	0,0381	0,0335	0,0066	3,8574; 6,3836; 150 точек	17751595

$\ \rho\ _p, p = 32$	0,0376	0,0273	0,0059	3,8586; 6,3836; 150 точек	15822356
$\exp[10 \cdot \rho]$	0,0377	0,0482	0,0062	3,8653; 6,3836; 150 точек	16032294
$\exp[100 \cdot \rho]$	0,0376	0,0386	0,0064	3,8668; 6,3836; 150 точек	15620045
$S^0, M = 100,$ $d = 0,035$	0,0379	0,0755	0,0031	3,8517; 6,3836; 155 точек	392710
$S^1, M = 10^5,$ $d = 0,035$	0,0381	0,0882	0,0031	3,8694; 6,3836; 159 точек	487940
$S^2, M = 100,$ $d = 0,1$	0,0389	0,0684	0,0036	3,8672; 6,3836; 150 точек	436902

С увеличением числа точек аппроксимации различия в значениях среднего расстояния $\bar{\rho}$ между точками для разных способов сглаживания в первом алгоритме становятся менее существенны. Характеристики максимального и среднего отклонений ρ_{\max} и $\Delta\rho$ в наибольшей степени отражают качество аппроксимации, а именно чем они меньше, тем равномернее расположены найденные точки на множестве достижимости. Принимая это во внимание, на основе приведенных таблиц, можно сделать вывод о том, что второй алгоритм лучше обеспечивает равномерность и, в большинстве случаев, не уступает первому алгоритму в точности поиска граничных точек, к тому же затрачивает значительно меньше вычислительных ресурсов. В последнем столбце в таблицах отражено число решенных за время исполнения алгоритма задач Коши, которое является более информативным показателем, чем время счета, т.к. в алгоритме равномерной аппроксимации оно устанавливается одинаковым для всех разновидностей. Помимо наиболее очевидной закономерности о том, что второй вид алгоритма требует на порядок меньше вычислений, также можно сделать вывод о том, что наиболее удачным выбором целевой функции в квазиравномерном алгоритме является S^1 , тогда как экспоненциальная функция, вероятно, в силу трудоемкости вычисления, не оправдала себя ни в первом, ни во втором алгоритме. В частности, в таблице 3 можно видеть, что для варианта $\alpha = 10$ решено примерно в два раза меньше задач Коши, чем в варианте $\alpha = 100$, что не означает меньшее время

работы, а наоборот указывает на то, что большое число интегрирований не были завершены удачно в силу возникающих авостов, и вычислительные ресурсы использовались впустую. Максимальную надежность из предложенных вариантов реализаций алгоритмов обеспечивает первый алгоритм с применением сглаживания показательной функцией степени 32.

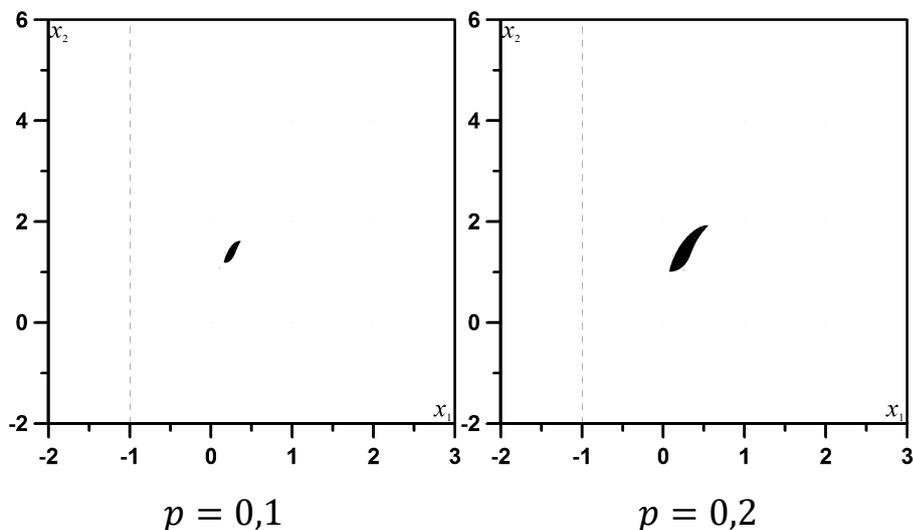
3.7. Параметрическое тестирование

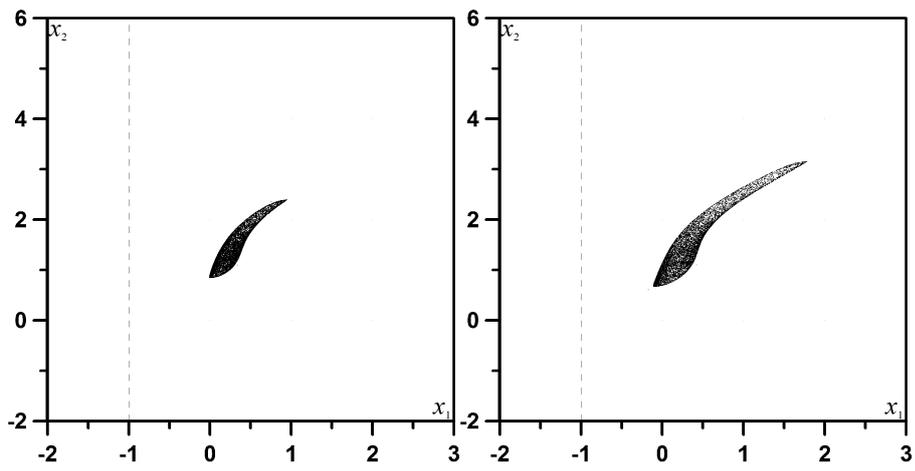
В рамках параметрического тестирования проведен ряд вычислительных экспериментов, которые заключались в решении последовательности задач с расширяющимися границами управлений. Основная закономерность таких вычислений для рассматриваемого класса непрерывных гладких систем известна, МД системы с большим ресурсом управления должно содержать в себе МД системы с меньшим ресурсом.

Вычислительный эксперимент состоял в решении набора задач аппроксимации МД системы $\dot{x} = f(x, u(t), t)$, $t \in [t_0, t_1]$, $x(t_0) = x^0$, при $p \cdot u_l \leq u \leq p \cdot u_g$ для $p = \{0,1; 0,2; \dots; 1\}$.

Все стадии приводятся для тестовой задачи номер 09.

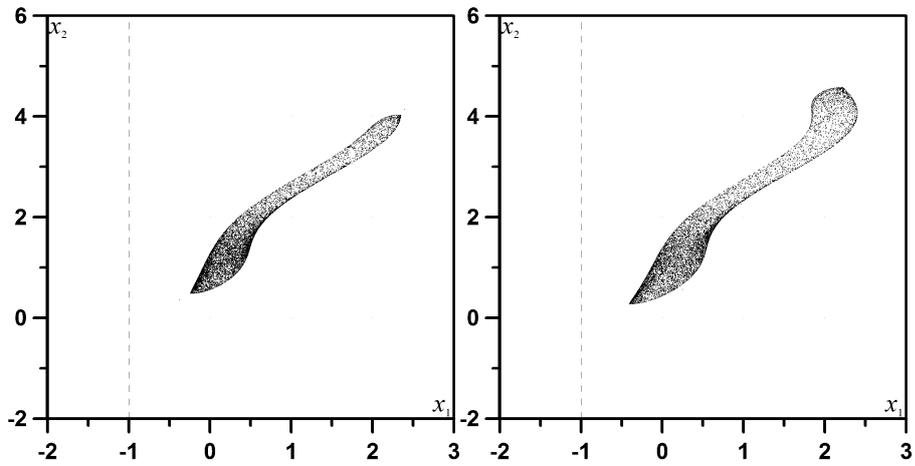
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \cos 2x_2 + u & x(0) &= (1, 0) & |u| &\leq p \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 - x_2 & t &\in [0, 2] \end{aligned}$$





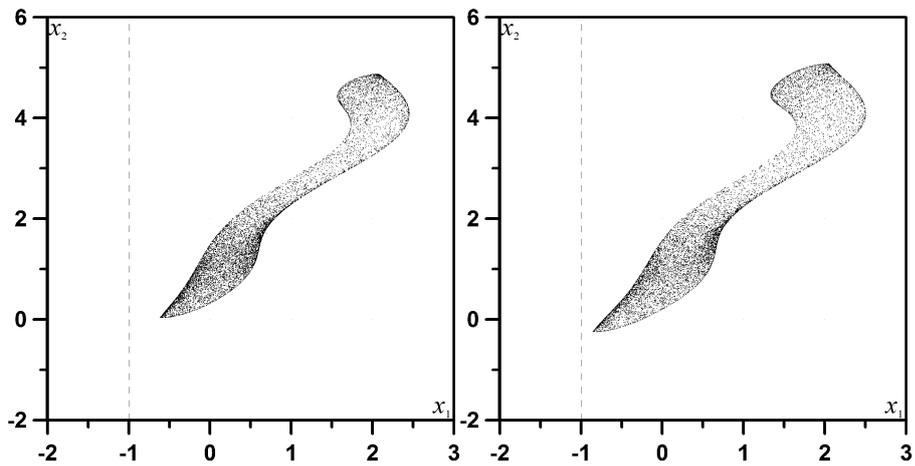
$p = 0,3$

$p = 0,4$



$p = 0,5$

$p = 0,6$



$p = 0,7$

$p = 0,8$

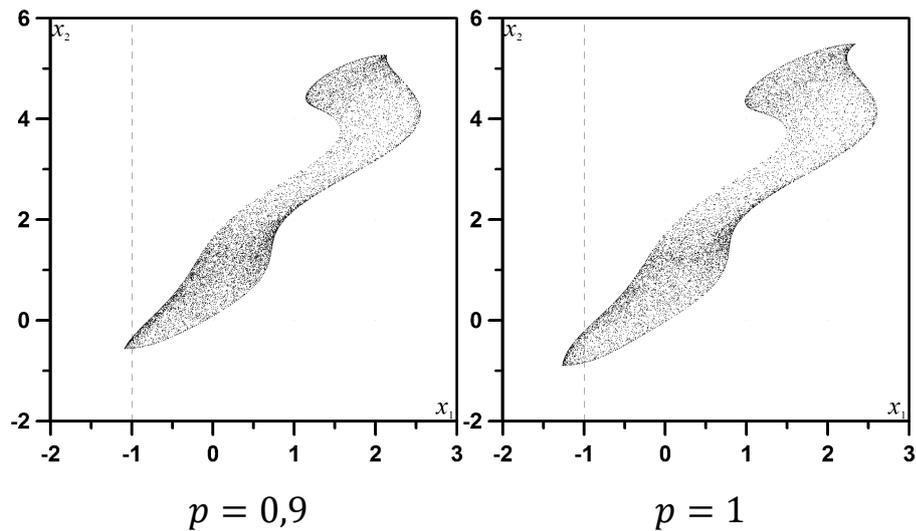


Рисунок 11 – Последовательность МД задачи 09, построенная в ходе параметрического тестирования.

Рис. 11 демонстрирует ожидаемую вложенность множеств для десяти значений параметра на примере стохастической аппроксимации, можно наблюдать, как при дополнительном ресурсе управления МД приобретает более сложную форму.

Тестовая задача 10:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1) - 6 \sin x_2 - u & x(0) &= (2, 0) & |u| &\leq 2p \\ \dot{x}_2 &= x_1(10 - x_1) + x_2 + u & t &\in [0; 1,3] \end{aligned}$$

Тестовая задача 12:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2^2 + u & x(0) &= (-1, 1) & |u| &\leq p \\ \dot{x}_2 &= 15 \sin x_1 + x_2 + u & t &\in [0; 1,1] \end{aligned}$$

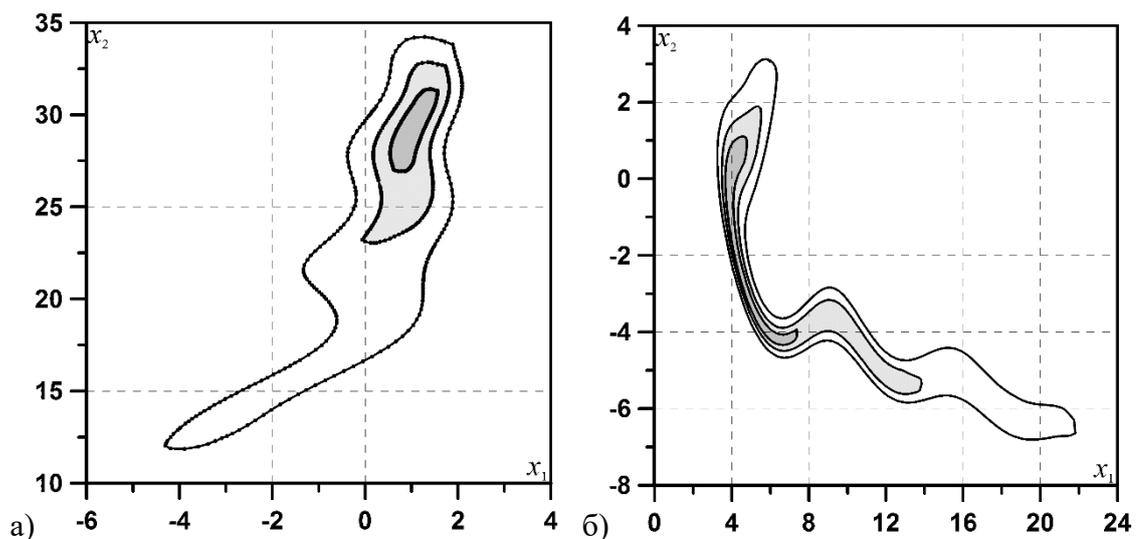


Рисунок 12 – МД для значений параметра $p = \{0,3; 0,6; 1\}$ наложены друг на друга для: а) тестовой задачи 10; б) тестовой задачи 12.

На рис. 12 обсуждаемая закономерность показана еще более наглядно, для тестовых задач 10 и 12 построены множества методом основанном на принципе максимума Понтрягина для значений параметра $p = \{0,3; 0,6; 1\}$ и наложены друг на друга.

3.8. Стресс-тестирование. Определение максимального временного интервала в задачах аппроксимации МД

В таблице ниже для каждой из тестовых задач приводится максимальное значение t_1 , для которого указанный метод позволил получить хорошую, адекватную аппроксимацию. Следует отметить, что оценка адекватности, в первую очередь, производилась на основе экспертного мнения. Точность нахождения максимального времени невысока, поскольку, на самом деле, важен лишь результат одного метода по отношению к другим. Также не придается большого значения тому, что в одной задаче лучшее значение может быть много больше, чем в другой.

Предполагается, что результаты приводятся для лучших возможных реализаций подходов и настроек параметров. Так, например, с увеличением интервала времени лучшее значения параметра k_{tp} числа точек переключения в стохастической аппроксимации будет изменяться.

В список тестируемых в этом параграфе алгоритмов мы не включаем алгоритмы покрытия эллипсами и шарами, т.к. они основываются на результате выполненной стохастической аппроксимации. Таким образом, если стохастическую аппроксимацию для некоего t_1 мы считаем приемлемой, то можно будет рассчитать покрытия, для большего же интервала времени в рамках сравнения затруднительно делать выводы о корректности.

В таблице 5 жирным выделен лучший результат, т.е. максимальное время, для конкретной задачи, курсивом выделены задачи, в которых рекордное значение t_1 совпало с тестовым. Лидером, на основании таблицы тестирования, является алгоритм стохастической аппроксимации, хотя преимущество не безоговорочное, в некоторых задачах другие алгоритмы не уступают, и даже выигрывают.

Таблица 5 – Исследование предельных свойств алгоритмов.

№	Тестовое время	Стохастическая аппроксимация	Равномерное заполнение объема	Метод ПМ
01	5	18	15	12
02	2,5	3	3,5	3
03	2	2,5	2,5	2,5
04	1	5	3,5	1
05	2	2	2	2
06	1,5	7	7	7
07	7	7	7	8
08	4	15	10	10
09	2	100	30	5
10	1,3	1,4	1,4	1,4
11	1,6	3	3	3,5
12	1,1	5	4	4
13	2	2	2	2
14	1	2,5	2,5	5
15	2	6	5	4

На рис. 13 приведены МД, полученные соответственно методом стохастической аппроксимации и равномерной монотонной аппроксимации границы для тестовой задачи 11 при $t_1 = 3,5$. На левом рисунке множество распадается на два, тонкий перешеек между ними, который четко обозначен на правом рисунке, размыт и почти отсутствует.

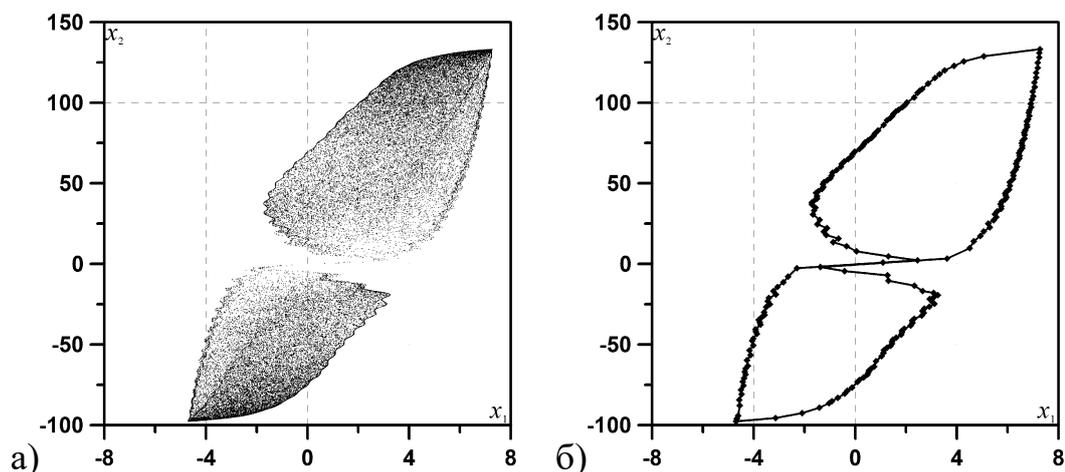


Рисунок 13 – Аппроксимация МД для тестовой задачи 11 при $t_1 = 3,5$, полученное а) методом стохастической аппроксимации; б) равномерной монотонной аппроксимации границы.

Такой пример является скорее исключением, но следует отметить, что в большинстве случаев, результаты двух других алгоритмов из сравниваемых отстают от стохастического не сильно и превышают показатели из тестовой коллекции.

3.9. Метод поиска глобального экстремума для конечномерной задачи

Многие из описанных во второй главе подходов к построению аппроксимаций МД динамических систем включают в себя в качестве вспомогательных задачи оптимизации. Их постановки таковы, что в ряде случаев поиск оптимального управления можно свести к нахождению экстремума для конечномерной задачи оптимизации, в большинстве случаев глобального. Решение таких задач в большинстве случаев опирается на использование эвристик и носит недетерминированный характер [65, 72, 88]. Большую популярность в глобальной конечномерной оптимизации набирает использование так называемых биоинспирированных подходов, только обзор [139] содержит 134 алгоритма, вместе с тем, ставшие уже классическими, методы, например, генетический алгоритм [129, 133] и алгоритм имитации отжига [130], развиваются и продолжают успешно применяться для решения практических задач.

Помимо известных методов в рамках работы реализован оригинальный алгоритм безусловной минимизации, основанный на одном из ведущих подходов к решению практических задач оптимизации – методе мултистарта. Предложенный

алгоритм является способом ускорения этого общеприменимого метода и основан на предотвращении спусков в уже найденные локальные экстремумы.

Главная идея предлагаемого подхода заключается в построении исходя из имеющейся информации – базы точек локальных экстремумов – покрытий, отсекающих неинформативные стартовые точки. В качестве базового элемента построения покрывающих множеств, предлагается использовать овалоиды.

Рассматривается следующая постановка задачи,

$$f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \min_{x \in Q}$$

Требуется найти все локальные минимумы функции многих переменных $f(x)$, заданной на параллелепипедной области $Q = \{\underline{x}_i \leq x_i \leq \overline{x}_i, i = \overline{1, n}\}$.

Для работы алгоритма требуется накопление информационной базы, элементы которой — пары точек (x_i, x_i^*) , где x_i случайно брошенная точка, а x_i^* точка, в которую привел локальный спуск из точки x_i . Суть метода состоит в покрытии области Q объектами, опирающимися на отрезок соединяющий x_i и x_i^* , а именно был выбран составной объект, называемый для простоты овалоидом, который состоит из правильного круглого цилиндра и двух полусфер прилегающих к основаниям цилиндра. На начальном этапе расчетов, сгенерировав определенное количество начальных точек, грубо покроем область овалоидами, у которых радиус сфер равен расстоянию между начальной и конечной точкой локального спуска, а оставшаяся высота цилиндра нулевая, т.е. сферами. На следующих этапах, после генерации новой стартовой точки, будем проверять, входит ли она в уже имеющееся покрытие и производить локальный спуск только в случае отрицательного результата, основываясь на гипотезе, что спуск из точки, лежащей внутри овалоида приведет в уже известный экстремум. На дальнейших этапах расчета производится сужение покрывающих овалоидов путем уменьшения радиуса полусфер и увеличения высоты цилиндра, их соединяющего. При нулевой «толщине овалоида» предлагаемый метод практически полностью совпадает с исходным методом мултистарта.

Алгоритм

1. Выбираем алгоритмические параметры:

N_s — число бросаний начальных точек (на каждой итерации N_s точек), e — эксцентриситет, коэффициент от нуля до единицы, окружность соответствует нулю, прямая — единице, a_s параметр, указывающий, на сколько процентов уменьшится эксцентриситет на каждой итерации, ε — максимальное значение эксцентриситета, достигнув которое, можно остановить алгоритм.

2. Полагаем:

2.1. $N_B = 0$ число записей в базе.

2.2. $B = \emptyset$, т.к. база пока пуста.

2.3. $e = 0$.

2.4. $i_s = 0$ (счетчик).

3. Генерируем $\tilde{x} \in X$, т.е. производим бросание. $i_s = i_s + 1$.

4. Проверяем $\tilde{x} \in B$, $j = 1, N_B$.

4.1 Если $\exists j: \tilde{x} \in B$, то переход на шаг 3.

4.2 Если $\forall j: \tilde{x} \notin B$, то переход на шаг 5.

5. Производим локальный спуск из точки \tilde{x} , получаем x^* . Записываем в базу $B \cup \{\tilde{x}, x^*\}$. $N_B = N_B + 1$.

6. Если $i_s < N_s$, то переход на шаг 2.

7. Если $i_s = N_s$, то $e = e + a_s$,

7.1. Если $e > \varepsilon$, то переход на шаг 8.

7.2. Иначе, переход на шаг 1.4

8. Точки x^* , хранящихся в базе, сортируются и группируются, получается список найденных экстремумов.

9. Конец.

Результатом работы алгоритма является информация о значениях локальных и глобальных минимумов, значениях координат, в которых они достигаются, а также графически представленные области притяжения разных экстремумов.

Тестирование алгоритма проводилось с использованием функции Ноймаера [126] с заданными локальными и глобальными минимумами

$$f(x) = \begin{cases} f_k, & \text{если } x = x_k \text{ для некоторого } k, \\ \frac{\sum_k 2f_k + r_k(x)/r_k(x)^2}{\sum_k 2/r_k^2(x)} & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $r_k(x) = \|R_k(x - x_k)\|^2$, а значение R_k влияет на размер области притяжения k -го экстремума. Функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема и имеет строгие минимумы в $x = x_k$, со значением $f(x_k) = f_k$ матрицей Гессе $f''(x_k) = R_k^T R_k$, причем глобальный минимум функции f в точке x_k , для которой $f_k = \min\{f_1, \dots, f_m\}$.

На рис. 12 приводятся покрытия 1-й, 10-й, 20-й и 40-й итерации алгоритма с параметром сжатия $a_s = 0.1$ для двумерной тестовой задачи определенной на $x_1, x_2 \in [0, 1]$, с пятью экстремумами, при $R_{glob} = 100, R_{loc} = 10$.

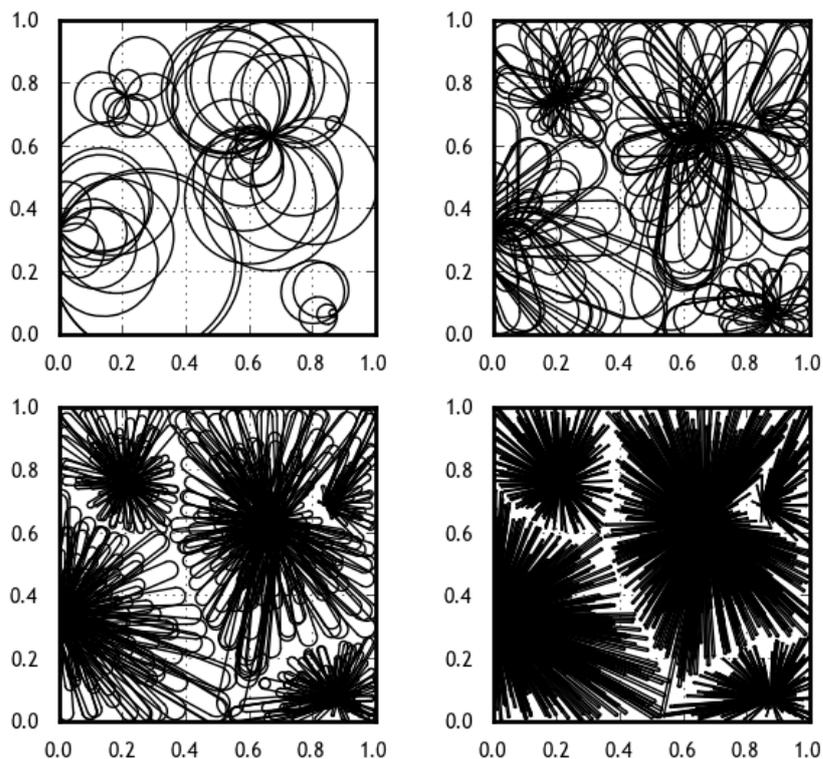


Рисунок 14 – Построенные покрытия области для 1-й, 10-й, 20-й и 40-й итерации алгоритма

Предложенному алгоритму потребовалось 2533 локальных спусков для нахождения всех экстремумов, тогда как классический метод мултистарта затратил 16052.

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что предложенная технология позволяет быстро и достаточно надежно находить глобальные и локальные минимумы функции, и позволили использовать алгоритм для решения вспомогательных задач безусловной минимизации при построении МД.

Выводы главы

Проведено глубокое тестирование вычислительных технологий по трем направлениям: сравнительное, параметрическое и стресс-тестирование, которое позволило исследовать основные свойства разработанных в рамках диссертации алгоритмов и предложить пять удобных вычислительных схем, названных стандартными. Разработан шаблон представления тестовых задач, который включает в себя постановку в наглядном виде и результаты решения.

Глава 4. Прикладные задачи

Глава посвящена прикладным и содержательным задачам. Описаны подходы к решению некоторых классов задач теории управления, основанные на алгоритмах аппроксимации множеств достижимости. Исследованы прикладные модели из области экологии, робототехники, и химии.

4.1. Поиск глобального экстремума в задаче оптимального управления

Поиск глобального экстремума в нелинейной задаче оптимального управления остается одной из самых актуальных проблем в теории экстремальных задач. Среди классических подходов к этой проблеме нельзя не отметить работы (Р. Беллмана) и В. Ф. Кротова. Известно несколько исследований по применению поисковых и генетических алгоритмов [34, 92, 93, 122, 123, 140]. Перспективные подходы экстраградиентного поиска и седловых методов рассчитаны преимущественно на линейные системы [2, 3, 91]. Как следствие, построение эффективных алгоритмов, способных успешно решать практические задачи широкого класса [103] преимущественно носят эвристический недетерминированный характер.

Дополнив постановку тестовых задач терминальным функционалом $I(u) = cx(t_1) \rightarrow \min$, можно перейти к задачам оптимального управления (ЗОУ). Предлагаемый метод численного решения ЗОУ основывается на подходе, описанном в п. 2.4 для задачи аппроксимации МД. Задача поиска глобального экстремума функционала, таким образом, может быть сведена к задаче поиска начальных приближений в начальном фазовом пространстве для сопряженных переменных. Точность решений, генерируемых предлагаемой вычислительной схемой зависит от алгоритмических параметров и, как правило, оказывается невысокой. Основной задачей рассматриваемого алгоритма является получение приближения, лежащего в области притяжения глобального экстремума, которое возможно будет уточнить с применением алгоритмов локальной оптимизации.

4.1.1. Схема решения задачи оптимального управления

0. Задаются начальные значения алгоритмических параметров.

1. Формируется «двойная» задача Коши

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

$$\dot{\psi} = - \frac{\partial H(\psi, x, u, t)}{\partial x}$$

2. Определяются начальные значения сопряженных переменных $\psi^0(\varphi)$, зависящие от угла или углов поворота единичного вектора φ .

3. В процессе интегрирования вычисляются управления $u(\varphi)$ и соответствующее значение функционала $J(u(\varphi))$, для конкретного φ .

4. Решается задача $\min J(u(\varphi))$.

Для случая системы двух переменных начальные значения сопряженной системы в п. 2 вычисляются как в алгоритме аппроксимации МД, являются точками на единичной окружности и определяются через угол поворота:

$$\psi_1(t_0) = \sin \varphi$$

$$\psi_2(t_0) = \cos \varphi$$

$$\varphi \in [0, 2\pi],$$

искмое управление $\bar{u}(\varphi, t) = \arg \max H(\psi(t), x(t), v, t)$, $u_l \leq v \leq u_g$ также определяется через φ , а следовательно поиск экстремума в двумерной ЗОУ может быть осуществлен одномерным поиском по окружности.

$$J(u(\varphi)) \rightarrow \min$$

Для частного случая трехмерной задачи начальные значения являются точками на поверхности единичной сферы и могут быть заданы через два угловых параметра:

$$\psi_1(t_0) = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$\psi_2(t_0) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$\psi_3(t_0) = \sin \varphi_2$$

$$\varphi_1 \in [0, 2\pi],$$

$$\varphi_2 \in [0, \pi],$$

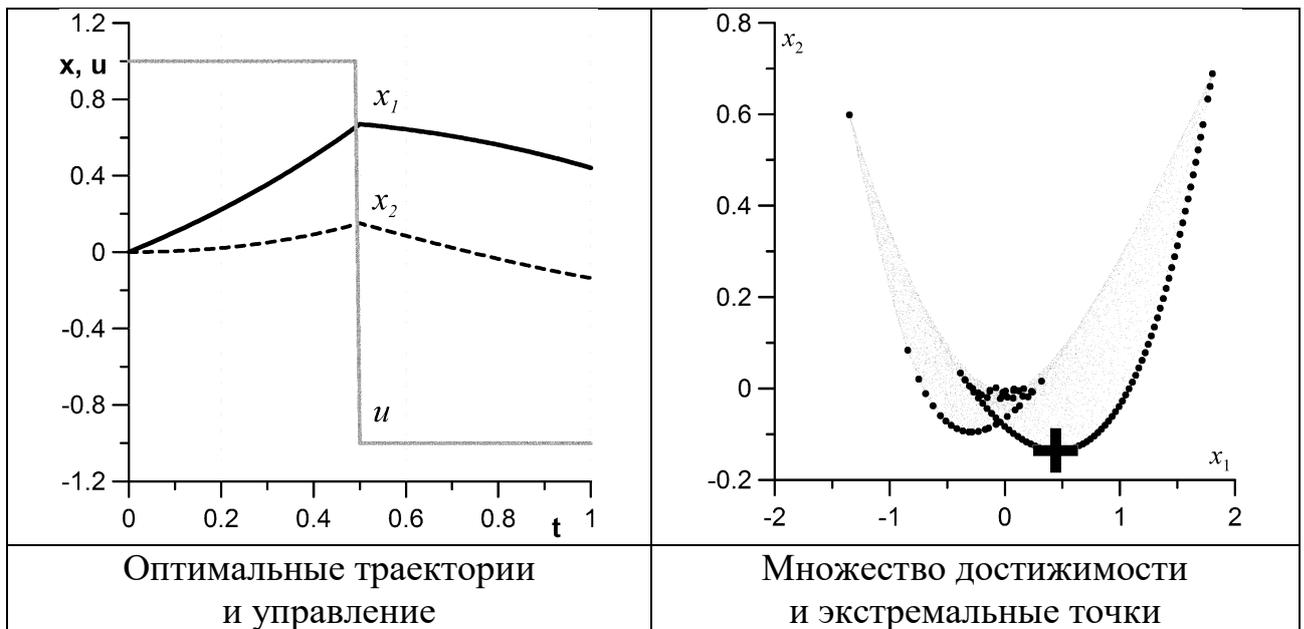
Тогда пункт минимизации в алгоритме следует заменить на

$$J(u(\varphi_1, \varphi_2)) \rightarrow \min$$

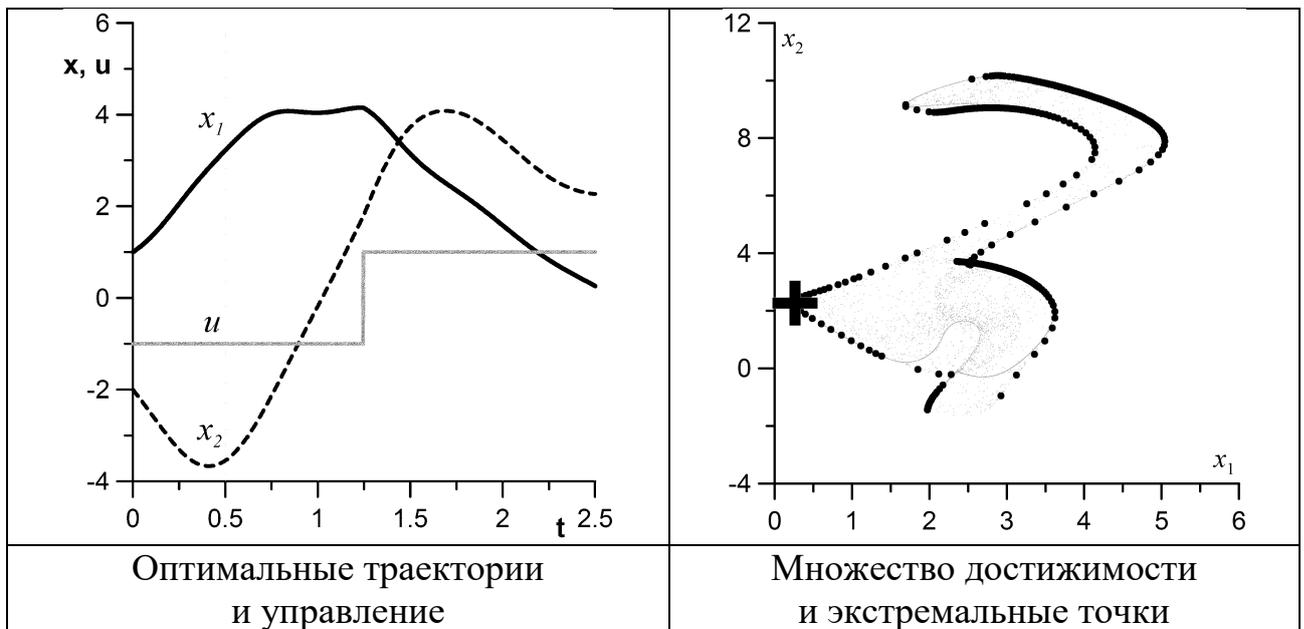
Для случая произвольной размерности системы задача о равномерном покрытии сферы является уже довольно сложной, поэтому представляется целесообразным использовать рандомизированный подход. Начальные значения для сопряженной системы можно выбирать случайными с поверхности сферы соответствующей размерности.

4.1.2. Вычислительные эксперименты решения задач оптимального управления

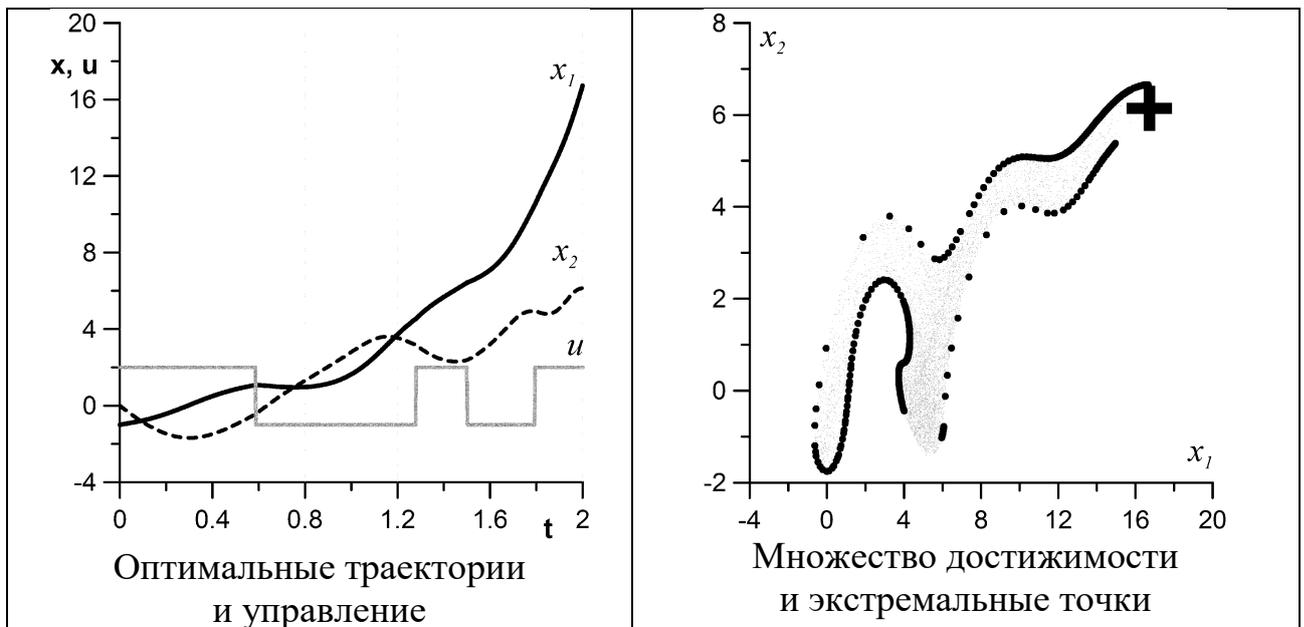
Задача		04		
Постановка	Размерность задачи	$n = 2$		
	Интервал изменения времени	$t \in [0, 1]$		
	Система дифференциальных уравнений	$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \sin x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 \cos x_2 u \end{aligned}$		
	Начальное значение	$x(t_0) = (-1, 0),$		
	Ограничения на управление	$ u \leq 1$		
	Целевой функционал	$J(u) = x_2$		
Решение	Метод	Значение функционала	Координаты точки	
		а	x_1	x_2
	Основанный на краевой задаче ПМ	-0,13593	0,440804	-0,13593
	Лучшее известное	-0,13599	0,456471	-0,13599
Количество задач Коши:		9149		
Процессорное время:		9 сек.		



Задача	02			
Постановка	Размерность задачи	$n = 2$		
	Интервал изменения времени	$t \in [0, 2]$		
	Система дифференциальных уравнений	$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sin x_1 + x_2 \cos x_2 - u^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 6 \sin x_1 + u \end{aligned}$		
	Начальное значение	$x(t_0) = (1, -2)$		
	Ограничения на управление	$ u \leq 1$		
	Целевой функционал	$J(u) = x_1$		
Решение	Метод	Значение функционала	Координаты точки	
			x_1	x_2
	Основанный на краевой задаче ПМ	0,26195	0,26195	2,26645
Лучшее известное	0,27027	0,27027	2,27093	
Количество задач Коши:		731		
Процессорное время:		13 сек.		



Задача		03		
Постановка	Размерность задачи	$n = 2$		
	Интервал изменения времени	$t \in [0, 2]$		
	Система дифференциальных уравнений	$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^2 + u \\ \dot{x}_2 &= 8 \sin x_1 + x_1 - x_2 - u \end{aligned}$		
	Начальное значение	$x(t_0) = (-1, 0)$		
	Ограничения на управление	$-2 \leq u \leq 1$		
	Целевой функционал	$J(u) = -x_2$		
Решение	Метод	Значение функционала а	Координаты точки x_1 x_2	
	Основанный на краевой задаче ПМ	-16.76268	-16,76268	6.35095
	Лучшее известное	-16,76194	-16,76194	6.35373
Количество задач Коши:		7451		
Процессорное время:		15 сек.		



4.2. Задача быстродействия

Рассмотрим еще один класс задач оптимального управления – задачи оптимального быстродействия, которые заключаются в нахождении минимального времени, т.е. значения функционала $J(u) = t_1$, необходимого для перехода системы из заданной начальной точки x^0 в фиксированное положение $x(t_1) = x^1$. Решение такой задачи естественным образом может быть реализовано с помощью технологии построения МД.

Проиллюстрируем подход для классической навигационной задачи Цермело [32], которая описывает движение лодки по воде без воздействия внешних сил:

$$\dot{x}_1 = \cos x_3$$

$$\dot{x}_2 = \sin x_3$$

$$\dot{x}_3 = u,$$

$$x(0) = (0, 0, 0), |u(t)| \leq 0,5, t \in [t_0, t_1],$$

$$J(u) = t_1 \rightarrow \min$$

$$x_1(t_1) = 4, x_2(t_1) = 3.$$

Поиск решения этой задачи в стандартной постановке ЗОУ потребовал бы введения дополнительных штрафующих функционалов для учета терминальных ограничений, с нашей же точки зрения, эта задача удобна еще и тем, что позволяет

рассматривать МД в плоскости $x_1 x_2$, т.к. фазовая переменная x_3 полностью зависит от управления и не фиксируется в момент времени t_1 .

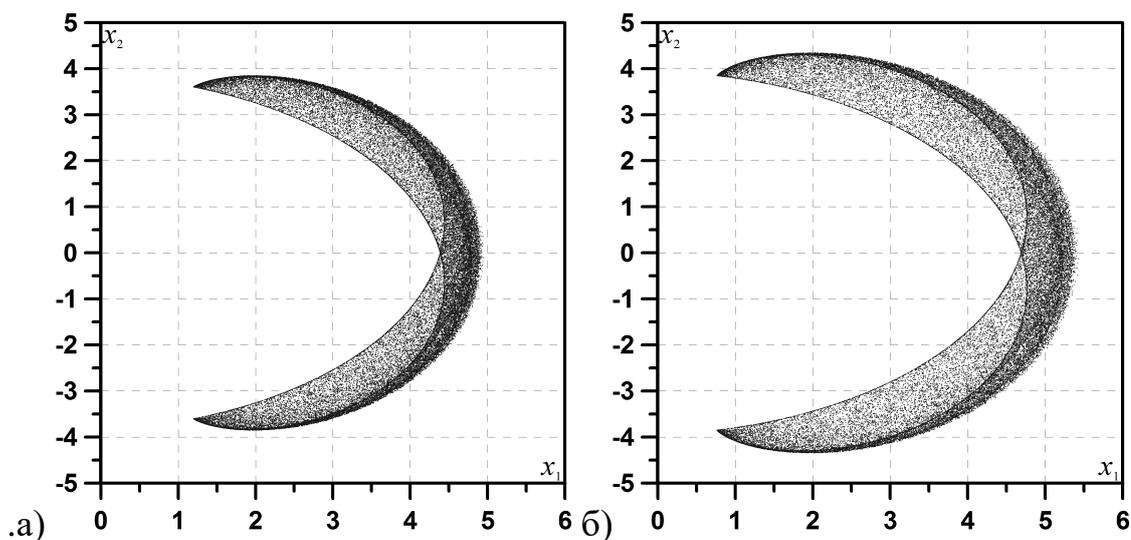


Рисунок 15 – Аппроксимация МД задачи Цермело для а) $t_1 = 5$, б) $t_1 = 5,5$.

На рис. 15 показаны шаги для грубой оценки оптимального времени, на рис. а) точка $(4, 3)$ еще не входит в множество, на рис. б) уже лежит внутри, таким образом выяснено что $5 < t_1^* < 5,5$.

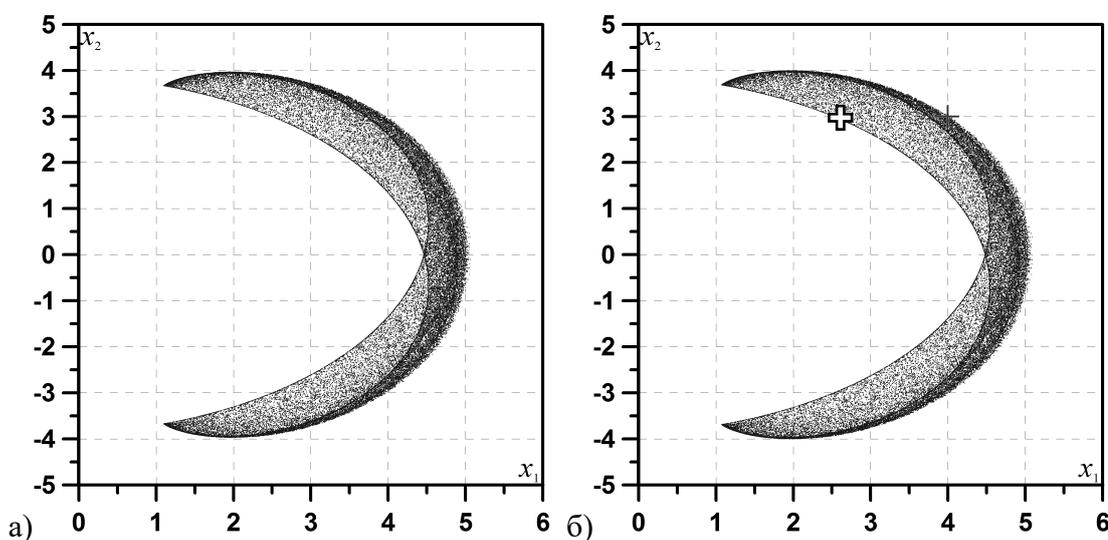


Рисунок 16 – Аппроксимация МД задачи Цермело для а) $t_1 = 5,12$, б) $t_1 = 5,15$.

На рис. 16 изображены уточняющие множества, на левом рис. при $t_1 = 5,12$ конечная точка все ещё не достигается, на правом рис. крестиком обозначена x^1 и её принадлежность МД. Таким образом получено решение $J(u) = t_1 = 5,15$, которое в рамках рассматриваемой точности соответствует известному решению.

4.3. Задача нормирования внешних воздействий

В рамках теории управления, в особенности при построении прикладных динамических моделей, возникает и обратная задача определения размеров управляющих воздействий, при которых система гарантированно не выходит за априорно заданные пределы. Технология решения может быть основана не только на многократном решении последовательности вспомогательных ЗОУ, но и на построении МД.

Общая постановка задачи имеет вид:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t),$$

$$x(t_0) = x^0, t \in [t_0, t_1],$$

$$\omega^l \leq u_i \leq \omega_i^g.$$

Требуется найти $\sum_{i=1}^r (\omega_i^g - \omega_i^l)^2 \rightarrow \max$, такое чтобы выполнялись ограничения $x_l \leq x(t) \leq x_g$.

Методика решения поставленной задачи заключается в построении набора МД заданной системы для различного параметра ω и ряда временных интервалов $[t_0, t_0 + \alpha(t_1 - t_0)]$, где $\alpha \in (0, 1]$. Построение МД не только в заданный конечный момент времени t_1 , но и в промежуточных значениях является аппроксимацией интегральной воронки, т.к. для рассматриваемого класса нелинейных систем, вообще говоря, МД для большего времени не обязательно содержит в себе МД для меньшего времени. Таким образом, решение нелинейной задачи нормирования воздействия будет опираться на построение проекции интегральной воронки, которая, в свою очередь, в рамках данного подхода состоит из построения аппроксимаций МД.

Поиск границ управления, обеспечивающих выполнение фазовых ограничений, использует информацию о расстоянии от заданных границ до границ, найденных на основе аппроксимации МД, состоит в решении задачи минимизации

$$\sum_i^n (\underline{x}_i - x_i^l)^2 + \sum_i^n (\bar{x}_i - x_i^g)^2 - \sum_{i=1}^r (\omega_i^g - \omega_i^l)^2 \rightarrow \min$$

и может быть осуществлен одним из локальных алгоритмов одномерного поиска.

Сформулируем набор тестовых задач нормирования воздействия на основе задачи 1 из тестовой коллекции:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = u - \sin x_1$$

$$x_0 = (5, 0)$$

$$t \in T = [0, 5]$$

$$|u(t)| \leq \omega, \omega^2 \rightarrow \max$$

$$\text{а) } 2 \leq x_1(t) \leq 22, -4 \leq x_2(t) \leq 6$$

Получено значение $\omega = 1,14553$, для этого потребовалось решение 100000 задач Коши и 410 сек. Решающее значение сыграло ограничение $x_1(t) \geq 2$. На рис. 17 изображены точки интегральной воронки для $t \in [0, 5]$, а именно МД, рассчитанные для различных t из отрезка с шагом 0,5. Прямые фазовые ограничения обозначены на рис. пунктирной линией.

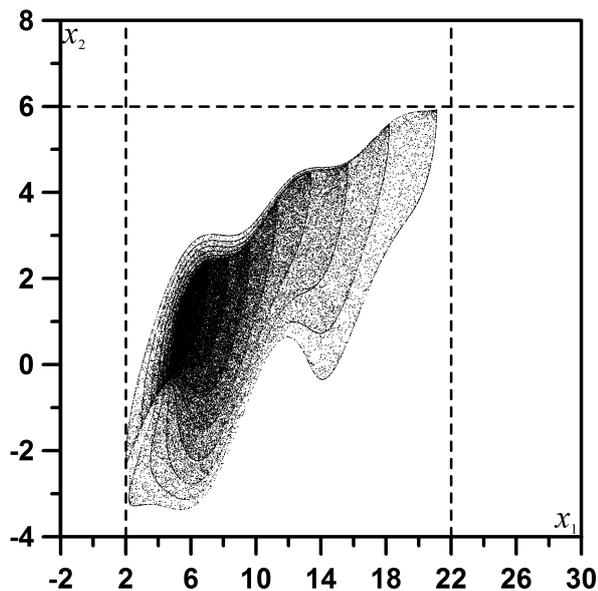


Рисунок 17 – Решение задачи нормирования воздействия в варианте а).

$$\text{б) } 2 \leq x_1(t) \leq 20, -4 \leq x_2(t) \leq 4$$

Для таких ограничений $\omega = 0,78317$, активным является ограничение $x_2(t) \leq 4$. На рис. 17 изображена проекция интегральной воронки и линии соответствующие фазовым ограничениям.

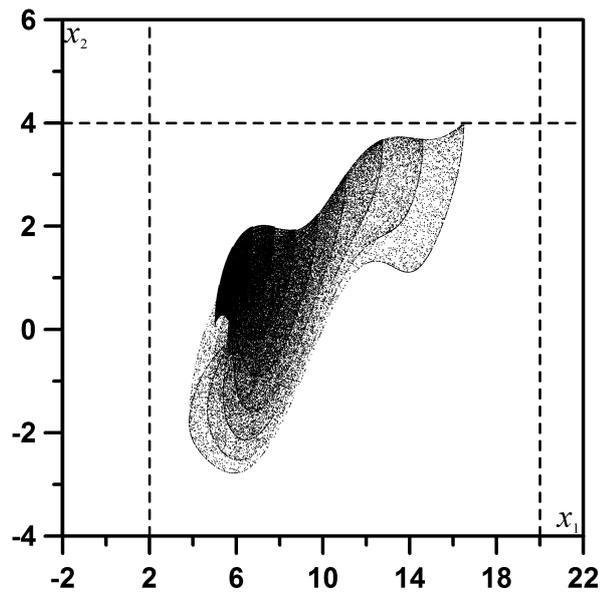


Рисунок 18 – Решение задачи нормирования воздействия в варианте б).

в) $2 \leq x_1(t) \leq 20, -4 \leq x_2(t) \leq 2$

В данном вариант найдено значение $\omega = 0,40657$, для поиска которого решено 100000 задач Коши и затрачено 290 сек (рис. 18).

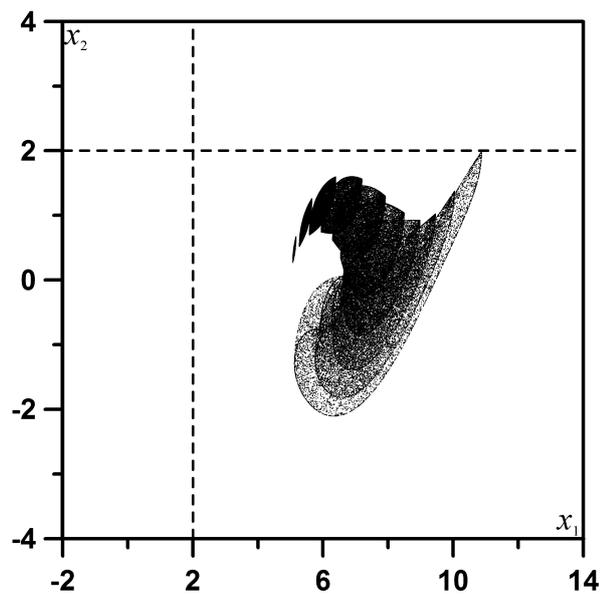


Рисунок 19 – Решение задачи нормирования воздействия в варианте в).

Решение сформулированной в варианте в) задачи проиллюстрировано на рис. 19, сечения интегральной воронки изображены с шагом по времени равным 0,5, чтобы они были видны и в т.ч. видно перемещение МД со временем.

4.4. Исследование множества достижимости климатическо-экономической модели

В качестве приложения сконструированных подходов проведено исследование множеств достижимости практической климатическо-экономической DICE модели (Dynamic Integrated Model of Climate and the Economy), которая была разработана У. Нордхаусом [127] и описывает влияние климатических факторов на промышленность и строительство.

Модель имеет следующие фазовые переменные:

$K(t)$ - мировой капитал, измеряемый в триллионах долларов США;

$M(t)$ - масса парниковых газов в атмосфере в миллиардах тонн;

$T^U(t)$ - температура воздуха;

$T^L(t)$ - температура глубокого океана.

Управляемыми переменными модели являются:

$s(t)$ - скорость сбережения капитала;

$\mu(t)$ - скорость снижения выбросов CO_2

Общий экономический выход $Q(t)$ (мирового валового продукта) описывается стандартной производственной функцией Кобба-Дугласа от технологического запаса $A(t)$, капитала $K(t)$, и рабочей силы (населения) $L(t)$:

$$Q(t) = \Omega(t)A(t)K^\gamma(t)L^{1-\gamma}(t),$$

здесь γ эластичность объема производства к капиталу, а $\Omega(t)$ воздействие сокращения выбросов и изменения климата на производство.

Модель имеет вид:

$$\dot{K} = \frac{s(t) \left(1 - b_1 \mu^{b_2}(t)\right) A(t) L^{1-\gamma}(t) K^\gamma(t)}{1 + \theta_1 T^U(t)^{\theta_2}} - \delta_K K(t),$$

$$\dot{M} = \alpha(1 - \mu(t))\sigma(t)A(t)L^{1-\gamma}(t)K^\gamma(t) - \delta_M(M(t) - \tilde{M}),$$

$$\dot{T}^U = \frac{1}{R_1} \left(\eta \log_2 \left(\frac{M(t)}{\tilde{M}} \right) + O(t) - \lambda T^U(t) - \frac{R_2}{\tau_{12}} (T^U(t) - T^L(t)) \right),$$

$$\dot{T}^L = \frac{1}{\tau_{12}} (T^U(t) - T^L(t)),$$

$$K(t_0) = K_0, M(t_0) = M_0, T^U(t_0) = T_0^U, T^L(t_0) = T_0^L,$$

$\mu(t) \in [0, 1], s(t) \in [0, 1]$.

Функции $A(t), L(t), O(t), \sigma(t)$ определены и зависят только от времени, константы взяты из первоисточника. Начальный момент времени $t_0 = 1965$, значения фазовых переменных в котором определены из статистических данных $K_0 = 16, M_0 = 677, T_0^U = 0,2, T_0^L = 0,1$.

На рис. 20 и 21 показана динамика МД в плоскостях KM и $T^U T^L$ для 2020, 2050 и 2100 годов.

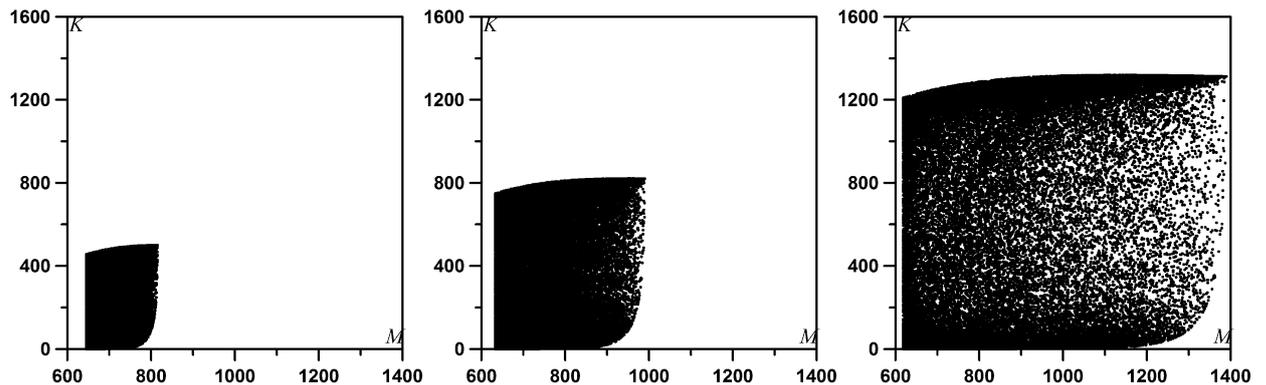


Рисунок 20 – Динамика МД модели DICE для 2020, 2050 и 2100 годов.

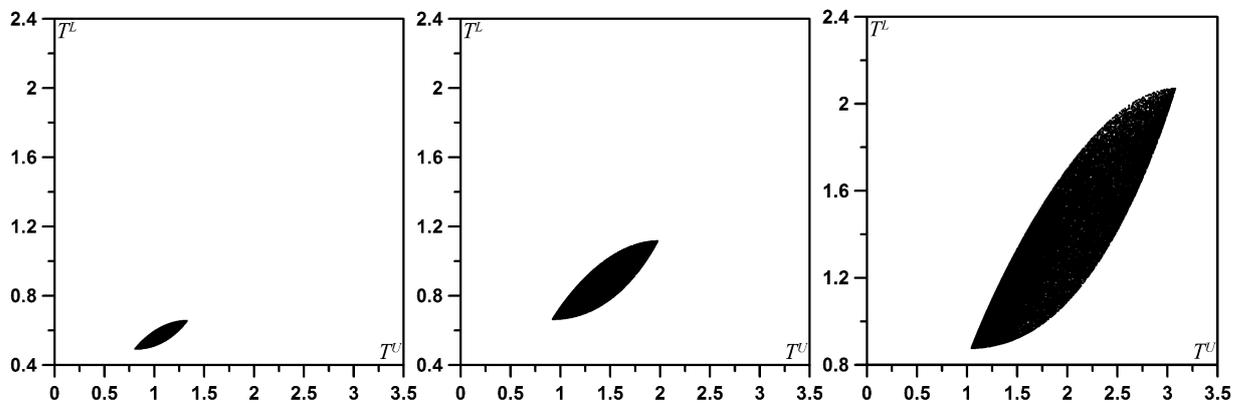


Рисунок 21 – Динамика МД модели DICE для 2020, 2050 и 2100 годов.

В [135] исследуются вопросы достижимости упрощенной постановки данной модели, переменные T^U и T^L исключены из системы, основное внимание сосредоточено на капитале и массе парниковых газов, их взаимозависимостям. МД, приводящиеся в статье, совпадают с изображенными на рис. 18 с точностью до задания констант, которые не влияют на форму множества, а только на масштаб.

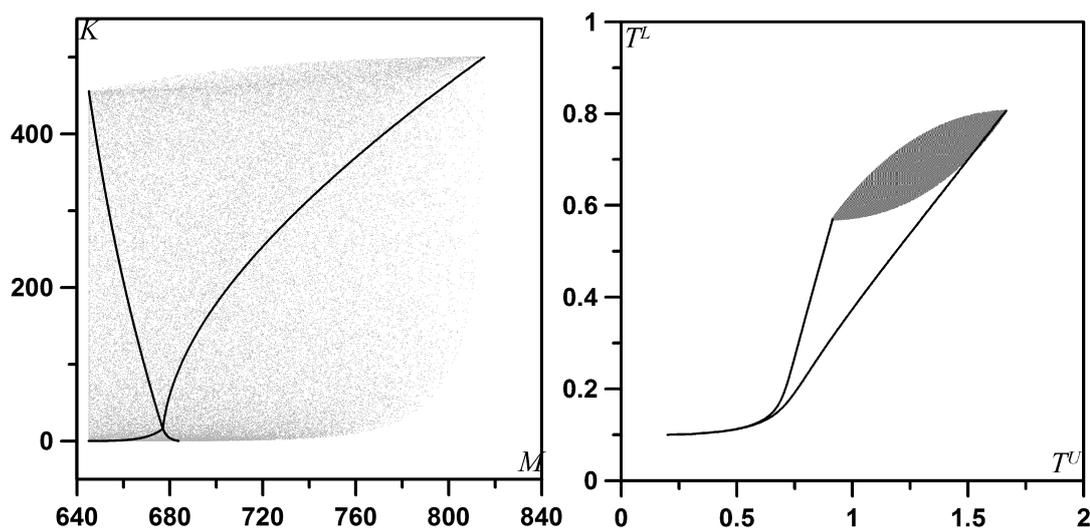


Рисунок 22 – МД и траектории, соответствующие постоянным граничным значениям управлений, модели DICE для 2020 года, а) плоскость KM , б) плоскость $T^U T^L$.

На рис. 20а) на светлом фоне МД изображены проекции траекторий, соответствующих постоянным граничным значениям управлений. Самая короткая линия отражает бездействие ($s(t) = \mu(t) \equiv 0$) и показывает, что при этом эколого-экономическая ситуация ухудшается. Левый нижний угол на МД достигается при полном расходовании капитала и максимальном снижении выбросов ($s(t) \equiv 0, \mu(t) \equiv 1$). Наилучший вариант с климатическо-экономической точки зрения естественно достигается при полном расходовании ресурсов $s(t) = \mu(t) \equiv 1$ и на МД находится в верхнем левом углу. Правый верхний угол соответствует экономическому росту и отсутствию мер, направленных на заботу об окружающей среде ($s(t) \equiv 1, \mu(t) \equiv 0$), траектория отражает быстро растущую массу пагубных парниковых газов в атмосфере. Рис. 20б) показывает траектории и МД в плоскости температур. Минимальные значения температуры и воздуха, и океана достигаются при $\mu(t) \equiv 1$ и любом значении $s(t)$, максимальные температуры получаются при $s(t) \equiv 1, \mu(t) \equiv 0$.

4.5. Моделирование управления сферическим роботом

Задача управления сферическим роботом достаточно современна и актуальна [110]. Основная сфера применения таких роботов – исследование местности, т.е. это может быть охранный наблюдение, изучение поверхности, даже существует прототип космического робота-разведчика. Благодаря своей форме такие роботы

защищены от переворачивания, имеют герметичную оболочку, отсутствие внешних двигающихся частей препятствует попаданию пыли и грязи внутрь робота, сферическая форма же минимизирует уровень загрязнения поверхности таких роботов. Авторы, занимающиеся этим вопросом, в большинстве случаев не ограничиваются теоретическими исследованиями, а представляют прототипы своих сферических роботов, которые можно разделить на два типа по принципу движения. К первой группе относятся роботы, внутри сферы которых расположен некий механизм, придающий вращательный момент (см. напр., [90]). Второй вид механизмов, рассмотренных, например, в [112] и [132] управляет положением центра масс, т.е. смещением его относительно центра сферы производится качение.

Рассматриваемая здесь модель описывает робота, конструкция которого представляет собой сферическую оболочку с размещенными в ней роторами (двигателями) и сформулирована Свининым М.М. [81]. Динамика робота, редуцированная к контактными координатам, задаётся следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = G(x)J^{-1}(x)J_r \sum_{k=1}^n n_k(x)u_k,$$

где векторы состояний и управлений определены как

$$x \triangleq [u_a, v_a, u_o, v_o, \psi]^T,$$

$$u \triangleq [\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3]^T,$$

а $\varphi_i, i = \overline{1,3}$ обозначают углы поворота двигателей.

Положение точки контакта на плоскости задается координатами u_a, v_a , а ее координаты на сфере задаются углами u_o, v_o . Кроме того, вводится координата ψ , определяемая как угол между осью робота и вертикалью.

Матричные и векторные величины определяются следующим образом

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 \\ R & 0 & 0 \\ \sin\psi/\cos v_o & \cos\psi/\cos v_o & 0 \\ \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi \tan v_o & \cos\psi \tan v_o & 1 \end{bmatrix},$$

а векторы n_1, n_2, n_3 суть столбцы матрицы

$$R = \begin{bmatrix} \cos u_o \cos \psi + \sin u_o \sin v_o \sin \psi & \cos v_o \sin \psi & -\sin u_o \cos \psi + \cos u_o \sin v_o \sin \psi \\ -\cos u_o \sin \psi + \sin u_o \sin v_o \cos \psi & \cos v_o \cos \psi & \sin u_o \sin \psi + \cos u_o \sin v_o \cos \psi \\ \sin u_o \cos v_o & -\sin v_o & \cos u_o \cos v_o \end{bmatrix}.$$

Матрица инерции системы определяется как

$$J = \begin{bmatrix} (2/3m_o + M)R^2 & 0 & 0 \\ 0 & (2/3m_o + M)R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3m_o R^2 \end{bmatrix} + (2J_p + J_r)E,$$

где M есть общая масса робота, а m_o и m_r обозначают, соответственно, массу сферической оболочки и массу отдельного ротора.

Исследование свойств МД данной системы в разных плоскостях показало, что при одинаковом расширении границ ограничений для всех управлений (сама модель не предполагает таких ограничений) множество в плоскости соответствующей положению точки контакта трансформируется из квадрата в круг. Решение задачи быстродействия при отсутствии ограничений не имеет смысла, сложность возникает при появлении терминальных ограничений на все переменные. Так рассмотрим ЗОУ по переводу робота из точки $x(0)$ в точку $x(T)$ при условии минимизации энергии управления $J = \int_0^T u^T u dt$

Пусть, например, $x(0) = [0, 0, 0, 0, 0]$, а $x(5) = [0,2, 0,3, 0, 0, \frac{\pi}{6}]$, тогда полученные решения представлены на рис. 21. Точность выполнения ограничений порядка 10^{-6} , значение функционала $J(5) = 5769001$.

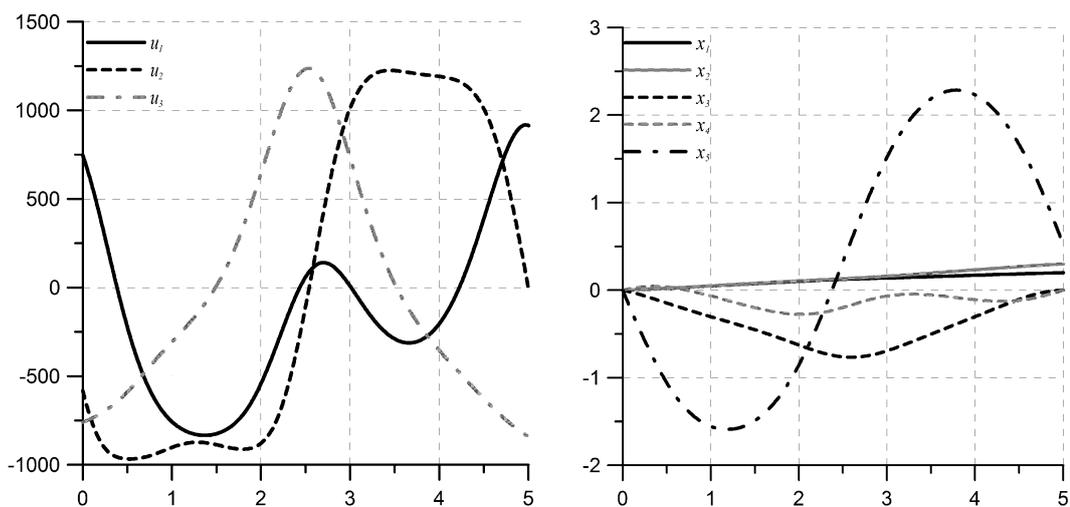


Рисунок 23 – Найденные управления и траектории в ЗОУ сферическим роботом с тремя роторами.

Существенное усложнение постановка получает, если исключить одно из управлений ($u \triangleq [\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2]^T$), т.е. оставить только два ротора, находящихся в одной плоскости с осями вращения перпендикулярными друг другу. Тогда, если точка контакта попадает на экватор ($u_0 = \pm(2k + 1)\frac{\pi}{2}, k = 0,1,2, \dots$) то плоскость расположения роторов занимает положение перпендикулярное плоскости качения. Система становится локально неуправляема, проявляется физическая сингулярность, это требует дополнительных настроек в расчетах.

Естественным образом, необходимо больше ресурсов и более сложная траектория движения для достижения конечной точки по сравнению с системой с тремя управлениями.

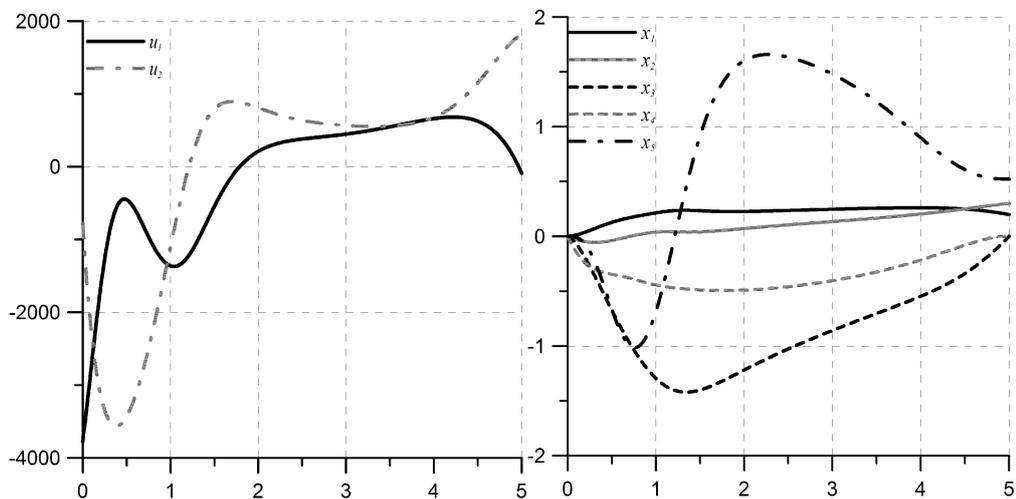


Рисунок 24 – Найденные управления и траектории в ЗОУ сферическим роботом с двумя роторами.

На рис. 24 показаны управления и траектории для ЗОУ мобильным сферическим роботом с двумя управляющими воздействиями, начальная и конечная точка такие же $x(0) = [0, 0, 0, 0, 0]$, а $x(10) = [0,2, 0,3, 0, 0, \frac{\pi}{6}]$.

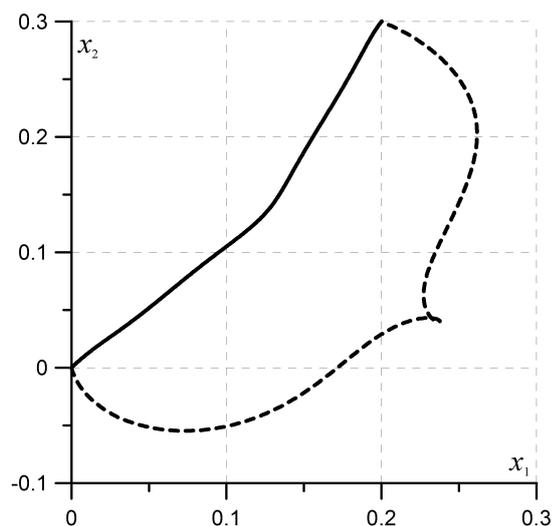


Рисунок 25 – Траектория точки контакта.

Возникающее усложнение хорошо отражается на рис. 25, на котором сплошной линией обозначена траектория точки контакта на плоскости для робота с тремя двигателями, а прерывистой – с двумя. Моделируется горизонтальное в нулевом положении расположение двух роторов, поэтому для выполнения терминального равенства $\psi(5) = \frac{\pi}{6}$ необходима петля в линии движения по плоскости.

Проведенные вычислительные эксперименты для различных конечных точек позволили получить управления, которые являются физически реализуемыми, и траектории, соответствующие поведению прототипа робота. Получаемые управления удовлетворяют условию оптимальности, справедливому для рассматриваемого класса систем и такого критерия (минимум квадрата управления) – сумма квадратов управлений в любой момент времени постоянная величина.

4.6. Численное исследование модели реакции окисления метана на поверхности никеля

В рамках диссертационной работы и в соответствии с разрабатываемыми технологиями была решена задача оценки области существования автоколебательных режимов в динамической системе, описывающей реакцию окисления метана на поверхности никеля. Задача определения значений параметров модели, при которых проявляются те или иные интересные

исследователя свойства моделируемого процесса возникает как на этапе идентификации модели, так и на этапе получения данных по модели. На этапе идентификации модели ограничения на параметры, как правило, задаются экспертно, исходя из физического смысла, либо могут быть установлены нормированием воздействий (см. п. 4.3.). Однако, на последующих этапах существенное значение имеет зависимость разных параметров, не связанных при этом напрямую в системе.

Рассмотрим систему описывающую реакцию из [51].

$$x_1' = k_1 P_{CH_4}(1 - S) - k_2 x_1 - k_3(1 - S)x_1,$$

$$x_2' = (k_3 x_1 - k_4 x_2)(1 - S),$$

$$x_3' = (k_4 x_2 - k_5 x_3)(1 - S),$$

$$x_4' = (k_5 x_3 - k_6 x_4)(1 - S),$$

$$x_5' = (k_3 x_1 + k_4 x_2 + k_5 x_3 + k_6 x_4)(1 - S) - 2k_{10}x_5^2 - k_{16}x_5x_7 - k_{17}x_5x_8 - k_{18}x_5x_{10},$$

$$x_6' = k_6 x_4(1 - S) - k_9 x_6 x_7 - k_{12} x_6 x_8,$$

$$x_7' = 2k_7 P_{O_2}(1 - S)^2 - 2k_8 x_7^2 - k_9 x_6 x_7 - k_{11} x_7 - k_{14} x_9 x_7 - k_{16} x_5 x_7,$$

$$x_8' = k_{11} x_7 - k_{12} x_6 x_8 - k_{15} x_9 x_8 - k_{17} x_5 x_8 - 4k_{19} P_{CH_4} x_8^4,$$

$$x_9' = k_9 x_6 x_7 + k_{12} x_6 x_8 - k_{13} x_9 - k_{14} x_9 x_7 - k_{15} x_9 x_8,$$

$$x_{10}' = k_{16} x_5 x_7 + k_{17} x_5 x_8 - k_{18} x_5 x_{10}.$$

Область определения: $0 \leq x_i \leq 1$, $S = \sum_{i=1}^{10} x_i \leq 1$, $k_j = k_j^0 \exp\left\{-\frac{E_j}{RT}\right\}$, где $R = 1,981 \frac{\text{кал}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — универсальная газовая постоянная, k_j^0 , E_j заданы и фиксированы, а значение температуры T и P_{CH_4} , P_{O_2} — парциальные давления CH_4 и O_2 заданы допустимыми интервалами: $T \in [800, 1200]$, $P_{CH_4} + P_{O_2} = 329$ Торр, $\frac{P_{CH_4}}{P_{O_2}} \in [1, 30]$. В такой модели имеют место устойчивые периодические решения, однако, они возникают не при всех допустимых значениях $(T, \frac{P_{CH_4}}{P_{O_2}})$.

Для конструктивной реализации поиска области существования периодических решений необходима формализация рассматриваемого свойства. В терминах данной модели оно может быть определено как периодичность функций,

описывающих компоненты $x_6(t)$ и $x_8(t)$ траектории, при этом подтверждающими характеристиками являются постоянные (с малой погрешностью) амплитуда и период колебаний. Выбраны именно эти компоненты, потому что диапазон изменения вдоль траекторий системы больше, чем у других переменных.

Начальное приближение — пара значений давлений для определенной температуры, при которых автоколебания имеют место — может быть задано экспертно либо, если такие данные отсутствуют, найдено методом Монте-Карло. Далее из точки на плоскости давлений, принадлежащей искомой области, будем двигаться в двух направлениях с крупным шагом и, определив интервал прохождения границ, применим метод деления шага пополам для уточнения граничного значения.

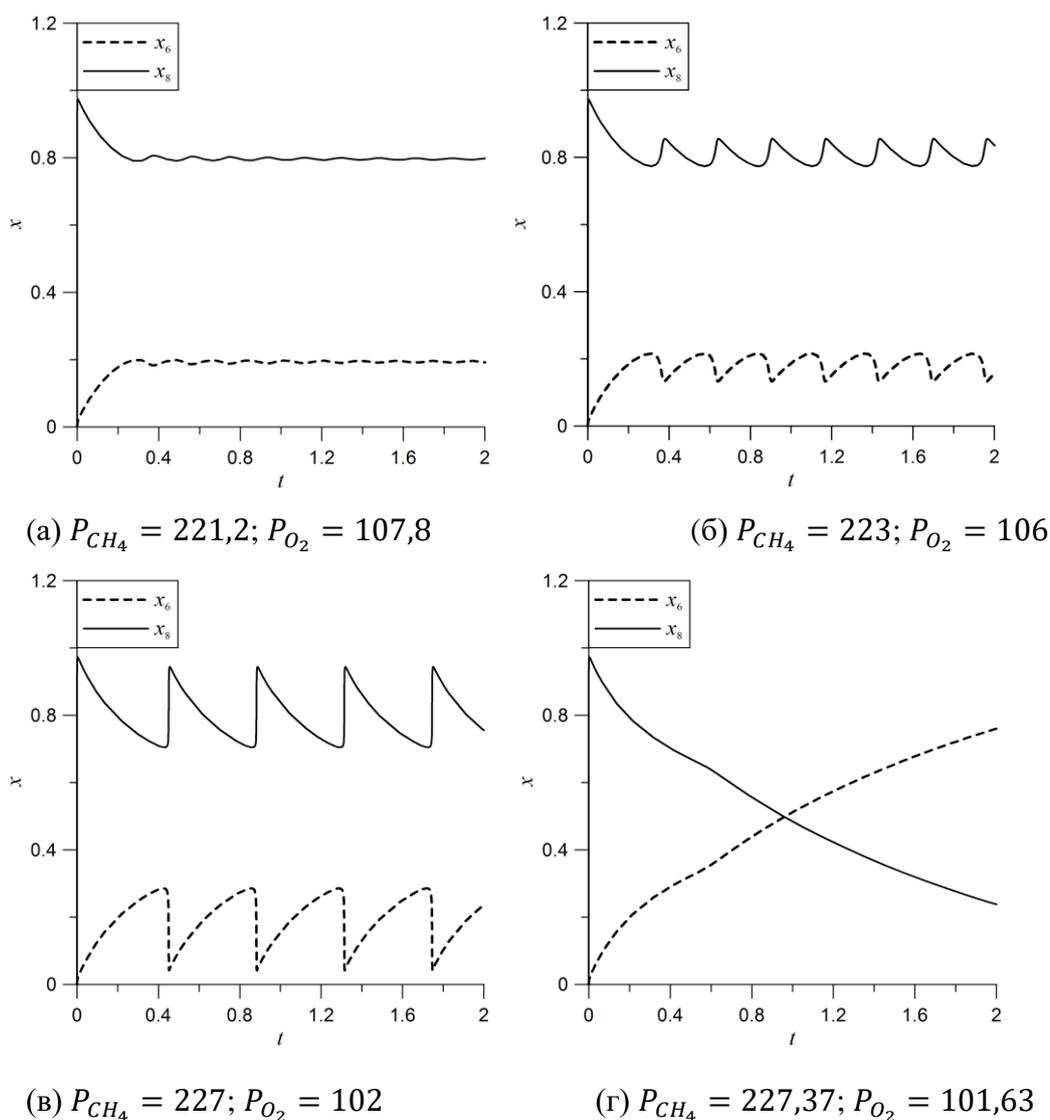


Рисунок 26 – Компоненты $x_6(t)$ и $x_8(t)$ траектории при $T = 1010K$ и различных значениях давлений.

Численное исследование показало, что при $T = 1010$ периодическое решение существует для $P_{CH_4} \in [221,2, 227,37], P_{O_2} = 329 - P_{CH_4}$. На рис. 26 показаны проекции интегральных кривых системы при различных значениях давлений, представлено характерное поведение траекторий на границах и внутри области существования периодических решений. Рис. 26(б) и 26(в) отражают различные период и амплитуду колебаний, на рис. 27 представлены аппроксимации найденных зависимостей для заданных параметров модели.

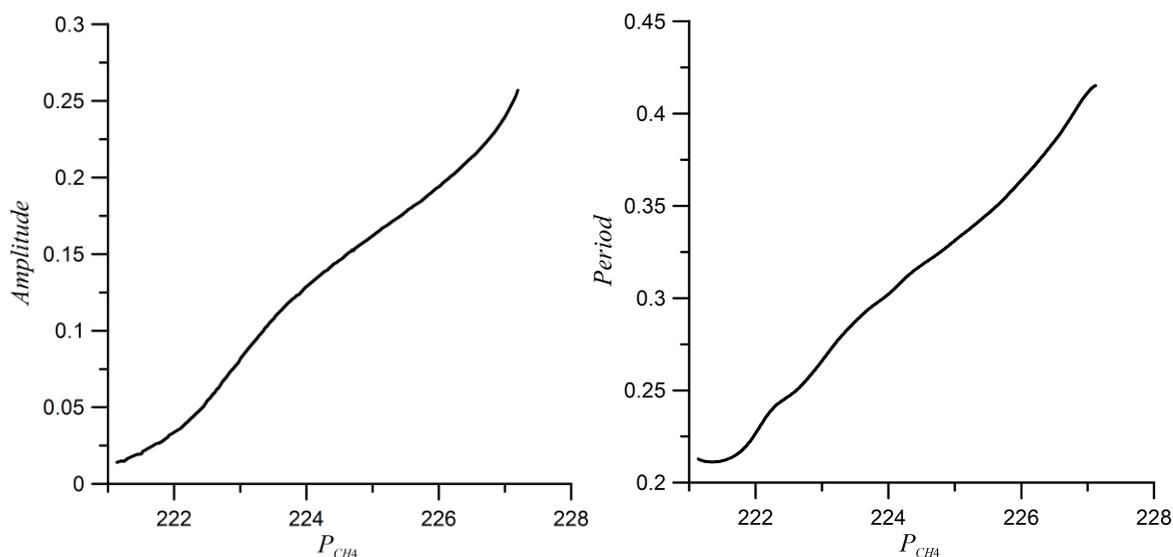


Рисунок 27 – Зависимость амплитуды и периода от значения параметра P_{CH_4} при заданном $T = 1010K$.

При значениях P_{CH_4} вблизи бифуркационного значения (рис. 26 а) существует предельный цикл малой амплитуды. В результате бифуркации Андронова-Хопфа возникло периодическое решение с периодом, равным 0,2125, который определяется мнимым собственным числом матрицы линеаризованной системы уравнений. По мере увеличения парциального давления метана P_{CH_4} наблюдается увеличение амплитуды и периода автоколебаний, от гармонических колебаний система переходит к релаксационным, которые исчезают при переходе параметра через критическое значение $227 < P_{CH_4} < 227,37$.

Задача выделения области значений параметров $(T, \frac{P_{CH_4}}{P_{O_2}})$ существования колебаний была сформулирована в терминах оптимального управления. Искомые величины температуры и давлений являлись оптимизируемыми параметрами, их

значения, обеспечивающие возникновение колебаний, доставляли функционалу минимальное нулевое значение. В противном случае, функционал принимал штрафное значение, для решения применялся метод мултистарта. Стоит отметить, что рассматриваемая система дифференциальных уравнений является жесткой, для её интегрирования используется метод интегрирования жестких систем, реализованный в комплексе, RADAU5 [82].

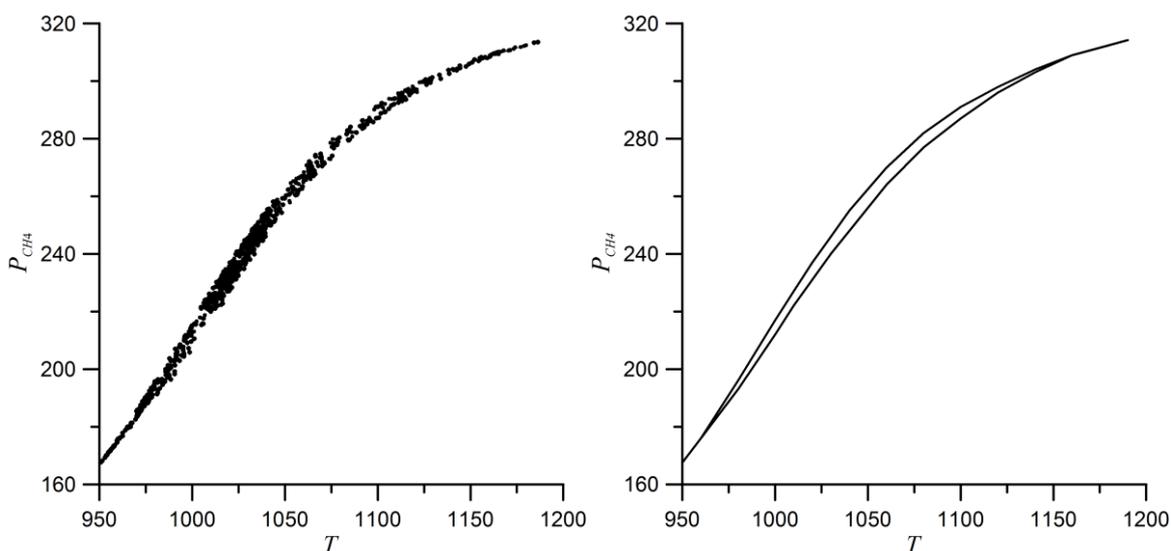


Рисунок 28 – Слева стохастическая аппроксимация, справа граница области значений параметров, при которых имеют места периодические решения в модели п. 4.5.

Решение задачи оптимального управления методом мултистарта позволило установить односвязность области значений параметров существования периодических решений, после чего стало возможным построить границу области. На рис. 28 изображены полученные области в плоскости (T, P_{CH_4}) , т.к. исходя из соотношения $P_{CH_4} + P_{O_2} = 329$, значение P_{CH_4} определяет значение отношения $\frac{P_{CH_4}}{P_{O_2}}$. Стохастическая аппроксимация при этом используется в качестве начального приближения и позволяет сузить поиск при нахождении граничных точек. Фиксируя один из параметров, например, температуру, найдены нижняя и верхняя границы значения второго параметра, на которых исчезают колебания.

Выводы главы.

Исследованы возможности применения разработанной вычислительной технологии к решению прикладных и содержательных задач. Предложен способ

поиска глобального экстремума в невыпуклой ЗОУ, основным качеством которого является получение приближения, лежащего в области притяжения глобального экстремума.

Решение задач быстродействия и нормирования воздействий естественным образом связано с исследованием МД и несмотря на то, что оно может быть получено без использования информации о МД, применение разработанных вычислительных технологий является целесообразным и позволяет получать достоверные результаты.

Проведено исследование климатическо-экономической DICE модели, описывающей влияние климатических факторов на промышленность и строительство, ранее такое исследование проводилось только для упрощенной модели. Построение МД в различных плоскостях показало, что наилучшая климатическо-экономическая ситуация достигается при полном расходовании ресурсов.

Решение задачи управления сферическим роботом с тремя роторными двигателями в постановке перевода объекта из точки в точку проводилось в качестве верификации модели. Существенное усложнение постановка получает, если двигателей останется только два. Тогда система становится локально неуправляема, проявляется физическая сингулярность, что требует дополнительных настроек в расчетах. Управления, вычисленные для различных конечных точек, физически реализуемы, а траектории, соответствуют поведению прототипа робота.

Исследование динамической системы, описывающей реакцию окисления метана на поверхности никеля в терминах достижимости позволило построить область технологических параметров реакции, приводящих к возникновению автоколебательных процессов. Вопрос об односвязности искомой области был решен с применением метода мультистарта, граница области была найдена методом последовательного уточнения.

Заключение

1. Разработаны новые алгоритмы получения внутренних (равномерная и квазиравномерная облачная аппроксимация), граничных (кусочно-линейные аппроксимации, основанные на максимизации площади, принципе максимума Понтрягина и свойстве релейности управлений) и внешних (аппроксимация объединением эллипсов или шаров) оценок множеств достижимости нелинейных управляемых систем. Набор предложенных алгоритмов позволяет в зависимости от заданной цели реализовывать необходимые преимущества, такие как скорость или точность, а сочетание подходов гарантирует надежность результирующей аппроксимации.

2. Разработаны вычислительные технологии аппроксимации множеств достижимости. Эти технологии реализованы в специальном программном обеспечении OPTCON-MD.

3. Сформирована коллекция невыпуклых тестовых множеств для оценки и сравнения вычислительных технологий, отсутствующая ранее в доступной литературе как для задач аппроксимации множеств достижимости, так и для соответствующих задач оптимального управления.

4. Предложены и реализованы подходы решения классов задач оптимального управления и нормирования управляющих воздействий, основанные на разработанных алгоритмах.

5. Решены практические задачи из области химии, экологии и робототехники. Построена область технологических параметров реакции, приводящих к возникновению автоколебательных процессов в реакции окисления метана на никеле. Проведено исследование климатическо-экономической DICE модели в общей постановке. Получены решения задач управления сферическим роботом в постановке перевода объекта из точки в точку.

В диссертационной работе достигнута поставленная цель, сформулированные задачи решены. Основным результатом исследования являются разработанные вычислительные технологии аппроксимации множеств достижимости нелинейных динамических систем, которые позволяют

рассматривать задачи широкого класса и превосходят по скорости, точности или степени надежности, известные методы, в зависимости от конкретного случая. Работоспособность вычислительных технологий продемонстрирована на тестовых, а также содержательных и прикладных задачах.

Литература

1. Аникин А. С. Архитектура и функциональное наполнение программного комплекса OPTCON-M для задач оптимизации потенциалов атомно-молекулярных кластеров / А. С. Аникин, А. Ю. Горнов, А. Н. Андрианов // Труды XVIII Байкальской всероссийской конференции «Информационные и математические технологии в науке и управлении». Часть III. — Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2013. — С. 213–219.
2. Антипин А. С. Экстраградиентный метод поиска решения задачи оптимального управления с неявно заданными граничными условиями / А. С. Антипин, Л. А. Артемьева, Ф. П. Васильев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2017. — Т. 57, № 1. — С. 49–54.
3. Антипин А. С. Оптимальное управление со связанными начальными и терминальными условиями / А. С. Антипин, Е. В. Хорошилова // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2014. — Т. 20, № 2. — С. 13–28.
4. Ащепков, Л. Т. Оптимальное управление разрывными системами / Л. Т. Ащепков. — Новосибирск: Наука, 1987. — 225 с.
5. Баландин Д. В. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств / Д. В. Баландин, М. М. Коган. — М.: Физматлит, 2007. — 281 с.
6. Батурин В. А. Метод улучшения, основанный на приближенном представлении множества достижимости. Теорема о релаксации / В. А. Батурин, Е. В. Гончарова // Автоматика и телемеханика. — 1999. — № 11. — С. 19–29.
7. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. — М.: Наука, 1976. — 352 с.
8. Беллман Р. Динамическое программирование и современная теория управления / Р. Беллман, Р. Кабала. — М.: Наука, 1969. — 118 с.
9. Берёзкин В. Е. Гибридные адаптивные методы аппроксимации невыпуклой многомерной границы Парето / В. Е. Берёзкин, Г. К. Каменев, А. В. Лотов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — Т. 46, № 11 — С. 2009–2023.

10. Березкин В. Е. Сравнение двух аппроксимаций границы Парето / В. Е. Березкин, А. В. Лотов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2014. — Т. 54, № 9. — С. 1455–1464.
11. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями / Дж. Варга. — М.: Наука, 1977. — 624 с.
12. Васильев О. В. Лекции по методам оптимизации. / О. В. Васильев. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1994. — 344 с.
13. Габасов Р. Пакет прикладных программ «Математическое программирование многомерных задач» / Р. Габасов, А. И. Тятюшкин, А. И. Жолудев, Н. М. Эринчек // Алгоритмы и программы: Инф. Бюлл. — М.: ВНТИЦ. — 1986. — № 2 (71). — 33 с.
14. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления / Р. В. Гамкрелидзе. — Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1977. — 254 с.
15. Горнов А. Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. / А. Ю. Горнов. — Новосибирск: Наука, 2009. — 279 с.
16. Горнов А. Ю. Технология решения задач оптимизации непрерывных динамических систем, основанная на комплексе программ OPTCON / А. Ю. Горнов // Моделирование неравновесных систем: Тез. докл. V Всерос. семинара. Красноярск, 18–20 октября, 2002. — С. 50–51.
17. Горнов А. Ю. Комплекс программ OPTCON для решения задач оптимального управления. / А. Ю. Горнов, А. О. Диваков // Руководство пользователя. — Иркутск: ИрВЦ СО РАН, 1990. — 36 с.
18. Горнов А. Ю. Численное решение задач оптимального управления в пакетном режиме / А. Ю. Горнов, А. И. Жолудев, А. И. Тятюшкин, Н. М. Эринчек // Пакеты прикладных программ. Опыт разработки. — Новосибирск: Наука, 1983. — С. 3–17.
19. Горнов А. Ю. Метод случайных покрытий для задачи оптимального управления / А. Ю. Горнов, Т. С. Зароднюк // Вычислительные технологии. — 2012. — Т. 17, № 2. — С. 31–42.

20. Грачев Н. И. Решение задач оптимального управления в системе ДИСО / Н. И. Грачев, А. Н. Фильков. — М.: ВЦ АН СССР, 1986. — 67 с.
21. Гурман В. И. Оценки множеств достижимости управляемых систем / В. И. Гурман // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, № 11. — С. 1601–1609.
22. Гурман В. И. Принцип расширения в задачах оптимального управления. / В. И. Гурман. — М.: Наука, 1985. — 287 с.
23. Гурман В. И. Приближенные методы оптимального управления. / В. И. Гурман, В. А. Батулин, И. В. Расина. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1983. — 178 с.
24. Гурман В. И. Нормирование воздействий на динамические системы / В. И. Гурман, Г. Н. Константинов // Автоматика и телемеханика. — 1977. — № 9. — С. 92–97
25. Гурман В. И. Точное описание и оценки множества достижимости управляемой системы банаховом пространстве / В. И. Гурман, Д. М. Розенраух // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 3. — С. 3–11
26. Гурман В. И. Метод улучшения дискретного управления, основанный на аппроксимации множества достижимости / В. И. Гурман, М. Ю. Ухин // Сборник научных трудов, посвященный 20-летию ИПС. — М.: Физматлит, 2004. — Т. 1. — С. 369–376.
27. Добронев Б. С. Численный вероятностный анализ для исследования систем в условиях неопределенности / Б. С. Добронев, О. А. Попова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2012. — Т. 21, № 4. — С. 39–46.
28. Добронев Б. С. Численный вероятностный анализ неопределенных данных / Б. С. Добронев, О. А. Попова. — Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2014. — 168 с.
29. Дыхта В. А. Вариационные необходимые условия оптимальности с позиционными управлениями спуска в задачах оптимального управления / В. А. Дыхта // Доклады Академии Наук. — 2015. — Т. 462, № 6. — С. 653–656.

30. Дыхта В. А. Некоторые приложения неравенств Гамильтона-Якоби в оптимальном управлении / В. А. Дыхта // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. — 2009. — Т. 2, № 1. — С. 183–196.
31. Дыхта В. А. Оценки множеств достижимости и условия оптимальности для нелинейных управляемых систем с разрывными траекториями / В. А. Дыхта, О. Н. Самсонюк // Вестн. Тамбовского ун-та. Сер. Естественные и технические науки. — 2009. — Т. 14, Вып. 4. — С. 707–709.
32. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применения в системах оптимизации / Ю. Г. Евтушенко. — М.: Наука, 1982. — 432 с.
33. Евтушенко Ю. Г. Диалоговый комплекс ДИСО / Ю. Г. Евтушенко, О. П. Бурдаков, А. И. Голиков, В. Г. Жадан, М. А. Потапов // Раздел нелинейного программирования (версия 2). — М.: ВЦ АН СССР, 1982. — 88 с.
34. Жиглявский А. А. Методы поиска глобального экстремума / А. А. Жиглявский, А. Г. Жилинскас. — М.: Наука, 1991. — 248 с.
35. Жолудев А. И. Численные методы оптимизации управляемых систем / А. И. Жолудев, А. И. Тятюшкин, Н. М. Эринчек // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1989. — № 4. — С. 14–31.
36. Зароднюк Т. С. Вычислительные технологии поиска глобального экстремума в задаче оптимального управления с параллелепипедными ограничениями: дис. канд. тех. наук: 05.13.01 / Зароднюк Татьяна Сергеевна. — Иркутск, 2011. — 138 с.
37. Каменев Г. К. Аппроксимация вполне ограниченных множеств методом глубоких ям / Г. К. Каменев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2001. — Т. 41, № 11. — С. 1751–1760.
38. Комаров В. А. Об одном методе аппроксимации множеств достижимости дифференциальных включений с заданной точностью / В. А. Комаров, К. Э. Певчих // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1991. — Т. 31, № 1. — С. 152–157.
39. Кондратьев Д. Л. О внешних оценках и построении множеств достижимости для нелинейных управляемых систем / Д. Л. Кондратьев, А. В. Лотов // Журнал

вычислительной математики и математической физики. — 1990. — Т. 30, № 4. — С. 483–490.

40. Константинов Г. Н. Нормирование воздействий на динамические системы / Г. Н. Константинов. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 1983. — 187 с.

41. Константинов Г. Н. Внешние оценки множеств достижимости управляемых систем / Г. Н. Константинов, Г. В. Сидоренко // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1986. — Т. 3. — С. 28–34.

42. Костоусова Е. К. Об ограниченности внешних полиэдральных оценок множеств достижимости линейных систем / Е. К. Костоусова // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2008. — Т. 48, № 6. — С. 974–989.

43. Костоусова Е. К. О полиэдральном методе решения задач синтеза стратегий управления / Е. К. Костоусова // Труды ИММ УрО РАН. — 2014. — Т. 20, № 4. — С. 153–167.

44. Костоусова Е. К. О полиэдральном методе решения задач синтеза стратегий управления в многошаговых системах с неопределенностями и фазовыми ограничениями / Е. К. Костоусова // Труды ИММ УрО РАН. — 2017. — Т. 23, № 2. — С. 151–166.

45. Костоусова Е. К. О полиэдральном оценивании областей достижимости линейных многошаговых систем / Е. К. Костоусова // Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 3. — С. 57–68.

46. Красовский Н. Н. Позиционные дифференциальные игры / Н. Н. Красовский, А. И. Субботин. — М.: Наука, 1974. — 456 с.

47. Кротов В. Ф. Вычислительные алгоритмы решения и оптимизации управляемых систем уравнений. Ч. I / В. Ф. Кротов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1975. — № 5. — С. 3–15

48. Кротов В. Ф. Вычислительные алгоритмы решения и оптимизации управляемых систем уравнений. Ч. II / В. Ф. Кротов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1975. — № 6. — С. 3–13.

49. Кротов В. Ф. Методы и задачи оптимального управления. / В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. — М.: Наука, 1973. — 446 с.
50. Куржанский А. Б. Управление эллипсоидальными траекториями. Теория и вычисления / А. Б. Куржанский, А. И. Месяц // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2014. — Т. 54, № 3. — С. 404–414.
51. Лашина Е. А. Математическое моделирование автоколебаний в реакции окисления метана на никеле: изотермическая модель / Е. А. Лашина, В. В. Каичев, Н. А. Чумакова, В. В. Устюгов, Г. А. Чумаков, В. И. Бухтияров // Кинетика и катализ. — 2012. — Т. 53, № 3. — С. 389–399.
52. Лотов А. В. Новая внешняя оценка множества достижимости нелинейной многошаговой динамической системы / А. В. Лотов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2018. — Т. 58, № 2. — С. 209–219.
53. Лотов А. В. О понятии обобщенных множеств достижимости и их построении для линейных управляемых систем / А. В. Лотов // Доклады Академии Наук СССР. — 1980. — Т. 250, № 5. — С. 1081–1083.
54. Лотов А. В. О сходимости методов численной аппроксимации множеств достижимости для линейных дифференциальных систем с выпуклыми фазами ограничениями / А. В. Лотов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1979. — Т. 19, № 1. — С. 44–55.
55. Лотов А. В. Численный метод построения множеств достижимости для линейной управляемой системы / А. В. Лотов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1972. — Т. 12, № 3. — С. 785–788.
56. Лотов А. В. Численный метод построения множеств достижимости для линейных управляемых систем с фазовыми ограничениями / А. В. Лотов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1975. — Т. 15, № 1. — С. 67–78.
57. Массель Л. В. Интеграция информационных технологий в системных исследованиях энергетики / Л. В. Массель, Е. А. Болдырев, А. Ю. Горнов; под ред. Н. И. Воропая. — Новосибирск: Наука, 2003. — 320 с.

58. Массель Л. В. Создание вычислительных ресурсов в Internet на основе унаследованного программного обеспечения / Л. В. Массель, А. Ю. Горнов, Д. В. Подкаменный // Совместный выпуск журналов «Вычислительные технологии», т. 7 и «Вестник КазНУ», № 4(32) по материалам Междунар. конф. «Вычислительные технологии и математическое моделирование в науке, технике, образовании», Новосибирск-Алматы. — 2002. — Ч. 3. — С. 247–252.
59. Милютин А. А. Оптимальное управление в линейных системах / А. А. Милютин, С. В. Чуканов. — М.: Наука, 1993. — 268 с.
60. Морозов Ю. В. Численные методы оценки областей притяжения в задаче управления колесным роботом / Ю. В. Морозов, Л. Б. Рапопорт // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 1. — С. 16–29.
61. Назин С. А. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов / С. А. Назин, М. В. Топунов // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 3. — С. 106–125.
62. Никольский М. С. Об одном методе аппроксимации множества достижимости для управляемого процесса / М. С. Никольский // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1988. — Т. 28, № 8. — С. 1252–1254.
63. Панасюк А. И. Дифференциальное уравнение невыпуклых множеств достижимости / А. И. Панасюк // Матем. заметки. — 1985. — Т. 37, № 5. — С. 717–726.
64. Панасюк А. И. Множества достижимости дифференциальных включений в замкнутой области определения / А. И. Панасюк // Матем. заметки. — 1991. — Т. 50, № 3. — С. 113–121.
65. Панов Н. В. Интервальный эволюционный алгоритм поиска глобального оптимума / Н. В. Панов, С. П. Шарый // Известия Алтайского государственного университета. — 2011. — № 1–2. — С. 108–113.
66. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию / Б. Т. Поляк. — М.: Наука, 1983. — 384 с.

67. Поляк Б. Т. Множества достижимости и притяжения линейных систем с ограниченным управлением: описание с помощью инвариантных эллипсоидов / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков // Стохастическая оптимизация в информатике. — 2008. — Вып. 4. — С. 3–23.
68. Поляк Б. Т. Робастная устойчивость и управление / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
69. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов. / Л. С. Понтрягин, Е. В. Мищенко. — М.: Физматгиз, 1961. — 384 с.
70. Попов В. С. Комплекс программ для приближенного решения задач оптимального управления (описание применения) / В. С. Попов, Р. П. Федоренко. — М.: ИПМ АН СССР, 1984. — 56 с.
71. Попов В. С. О стандартной программе решения задач оптимального управления: препринт / В. С. Попов, Р. П. Федоренко. — М.: ИПМ АН СССР, 1983. — 32 с.
72. Посыпкин М. А. Параллельный эвристический алгоритм глобальной оптимизации / М. А. Посыпкин // Труды ИСА РАН. — 2008. — Т. 32. — С. 166–179.
73. Саксонов М. Т. Об одном бесконечномерном аналоге задачи управления обыкновенными дифференциальными уравнениями / М. Т. Саксонов // Дифференциальные уравнения. — 1982. — Т. 18, № 3. — С. 430–439.
74. Стрекаловский А. С. Современные методы решения невыпуклых задач оптимального управления / А. С. Стрекаловский // Известия Иркутского гос. ун-та. Серия: Математика. — 2014. — Т. 8. — С. 141–163.
75. Стрекаловский А. С. Элементы невыпуклой оптимизации. / А. С. Стрекаловский. — Новосибирск: Наука, 2003. — 356 с.
76. Толстоногов А. А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве / А. А. Толстоногов. — Новосибирск: Наука, 1986. — 295 с.
77. Тятюшкин А. И. ППП КОНУС для оптимизации непрерывных управляемых систем / А. И. Тятюшкин // Пакеты прикладных программ: Опыт использования. — М.: Наука, 1989. — С. 63–83.

78. Ушаков В. Н. Аппроксимация множеств достижимости и интегральных воронок / В. Н. Ушаков, А. Р. Матвийчук, А. В. Ушаков // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. — 2011. — Вып. 4. — С. 23–39.
79. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов. — М.: Наука, 1985. — 224 с.
80. Филиппова Т. Ф. Дифференциальные уравнения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной динамической управляемой системы / Т. Ф. Филиппова // Труды ИММ УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 1. — С. 223–232.
81. Финкельштейн Е. А. Численное исследование задачи оптимального управления сферическим мобильным роботом с трехмерными управляющими воздействиями / Е. А. Финкельштейн, М. М. Свинин // Тезисы докладов III Международной школы-семинара «Нелинейный анализ и экстремальные задачи». Иркутск, 25 июня–1 июля 2012. — Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2012. — С. 46.
82. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. Хайрер, Г. Ваннер // Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — М.: Мир, 1999. — 685 с.
83. Хрусталеv М. М. Точное описание множеств достижимости и условия глобальной оптимальности динамических систем. Ч. 1. Оценки и точное описание множеств достижимости и управляемости / М. М. Хрусталеv // Автоматика и телемеханика. — 1988. — № 5. — С. 62–70.
84. Хрусталеv М. М. Точное описание множеств достижимости и условия глобальной оптимальности динамических систем. Ч. 2. Условия глобальной оптимальности / М. М. Хрусталеv // Автоматика и телемеханика. — 1988. — № 7. — С. 70–80.
85. Ченцов А. Г. Асимптотика достижимых множеств и обобщенные конструкции в классе конечно-аддитивных мер / А. Г. Ченцов // Челябинский физико-математический журнал, 1994. — Т. 3, № 1. — С. 126–135.
86. Ченцов А. Г. К вопросу о построении множества достижимости при ограничениях асимптотического характера / А. Г. Ченцов, А. П. Бакланов // Труды ИММ УрО РАН. — 2014. Т. 20, № 3. — С. 309–323.

87. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем / Ф. Л. Черноусько. — М.: Наука, 1988. — 319 с.
88. Шарый С. П. Рандомизированные алгоритмы в интервальной глобальной оптимизации / С. П. Шарый // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2008. — Т. 11, № 4. — С. 457–474.
89. Alur R. Reachability analysis of hybrid systems via predicate abstraction / R. Alur, T. Dang, F. Ivancic // Hybrid Systems: Computation and Control, LNCS. — 2002. — Vol. 2289. — P. 35–48.
90. Alves J. Design and control of a spherical mobile robot / J. Alves, J. Dias // Journal of Systems and Control Engineering. — 2003. — Vol. 217, № 6. — P. 457–467.
91. Antipin A. Saddle point approach to solving problem of optimal control with fixed ends / A. Antipin, E. Khoroshilova // Journal of Global Optimization. — 2016. — Т. 65, № 1. — P. 3–17.
92. Barton P. I. The cluster problem in constrained global optimization / P. I. Barton, R. Kannan // Journal of Global Optimization. — 2017. — Vol. 69, № 3. — P. 629–676.
93. Barton P. I. Optimization of hybrid systems / P. I. Barton, C. K. Lee, M. Yunt // Comput. Chem. Eng. — 2006. — Vol. 30, № 1012. — P. 1576–1589.
94. Bertsekas D. P. Approximation Procedures based on the method of multipliers. / D. P. Bertsekas // J. Optim. Theory Appl. — 1977. — Vol. 23. — P. 487–510.
95. Betts J. T. Sparse optimal control software (SOCS) / J. T. Betts, W. P. Huffman // Boeing information and support services. — Seattle, Washington. — 1997.
96. Brockett R. W. On the reachable set for bilinear systems / R. W. Brockett // Lect. Notes Econ. and Math. Syst. — 1975. — Vol. 111. — P. 54–63.
97. Cellina A. Representation of the attainable set for Lipschitzian differential inclusions / A. Cellina, A. Orneals // Rocky mountain J. Math. — 1990.
98. Charalamous C. Nonlinear minimax optimization as a sequence of least pth optimization with finite values of p. / C. Charalamous, J. W. Bandler // Internat. J. Systems Sci. — 1976. — Vol. 7. — P. 377–391.
99. Clarke F. H. A proximal characterization of the reachable set / F. H. Clarke // Systems & Control Letters. — 1996. — Vol. 27, № 3. — P. 195–197.

100. Clarke F. H. The Maximum Principle under Minimal Hypotheses / F. H. Clarke // *SIAM Journal on Control and Optimization*. — 1976. — Vol. 14, № 6. — P. 1078–1091.
101. Dontchev A. L. Euler approximation of the feasible set / A. L. Dontchev, W. W. Hager // *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.* — 1994. — Vol. 15, №3, 4. — P. 245–261.
102. Donchev A. L. Difference methods for differential inclusions: A survey / A. L. Donchev, F. Lempio // *SIAM Rev.* — 1992. — Vol. 34, № 2. — P. 263–294.
103. Floudas C. A. A Review of Recent Advances in Global Optimization \ C. A. Floudas, C. E. Gounaris. \ *Journal of Global Optimization*. — 2009. — № 45 — P. 3–38.
104. Frankowska H. Contingent cones to reachable sets of control systems / H. Frankowska // *SIAM J. Contr. and Optimiz.* — 1989. — Vol. 27. № 1. — P. 170–198.
105. Frankowska H. Boundary solutions of differential inclusion / H. Frankowska, C. Olech // *Journal of Differential Equations*. — 1982. — Vol. 44, № 2. — P. 156–165.
106. Gornov A. Yu. On a class of algorithms for constructing Internal Estimates of reachable set / A. Yu. Gornov // *Proc. of the Intern. Workshop DIC-98, Pereslavl-Zalessky*. — 1998. — P. 10–12.
107. Gornov A. Yu. Project OPTCON: Software for optimization problems / A. Yu. Gornov // *Abstracts of the Fourth International Conference on Optimization, Simulation and Control (COSC'2013), Ulanbaatar, Mongolia*. — P. 63.
108. Gornov A. Yu. Software OPTCON-A for solving nonconvex problems of parametric identification of dynamical systems / A. Yu Gornov. // *Computer Modeling and Simulation: труды международной научно-технической конференции, 2–4 июля 2014 года*. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. — С. 95.
109. Gornov A. Yu. Tunneling algorithm for solving nonconvex optimal control problems / A. Yu. Gornov, T. S. Zarodnyuk // *Optimization, Simulation, and Control, Springer Optimization and Its Applications*. — 2013. — Vol. 76. — P. 289–299.
110. Halme A. Motion control of a spherical mobile robot / A. Halme, T. Schonberg, Y. Wang // *4th International IEEE Workshop on Advanced Motion Control Proceedings*. — 1996. — P. 259–264.

111. Hwang I. Reachability analysis of deltanotch lateral inhibition using predicate abstraction / I. Hwang, H. Balakrishnan, R. Ghosh, C. J. Tomlin // High Performance Computing-HiPC2002, LNCS. — 2002. — Vol. 2552. — P. 715–724.
112. Joshi V. Motion analysis of a spherical mobile robot / V. Joshi, R. Banavar // Robotica. — 2009. — P. 343–353.
113. Kaskosz B. Extremality, Controllability, and Abundant Subsets of Generalized Control Systems / B. Kaskosz. // Journal of Optimization Theory and Applications. — 1999. — Vol. 101, № 1. — P. 73–108.
114. Kaskosz B. On a nonsmooth, nonconvex control system / B. Kaskosz, S. Lojasiewicz // Journal of Mathematical Analysis & Applications. — 1988. — № 136. — P. 39–53.
115. Kastner-Maresch A. Implicit Runge-Kutta methods for differential inclusions / A. Kastner-Maresch // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. — 1991. — Vol. 11, № 9–10.
116. Kort B. W. A new penalty function algorithm algorithm for constrained minimization / B. W. Kort, D. P. Bertsekas // Proceedings of the 1972 IEEE conferences on Decision and Control, New Orleans, Louisiana. — 1972. — Vol. 11. — P. 162–166.
117. Kreinovich V. Interval methods for data fitting under uncertainty: a probabilistic treatment / V. Kreinovich, S. P. Shary // Reliable Computing. — 2016. — T. 23. — C. 105–140.
118. Kurzhanski A. A. Ellipsoidal Toolbox. Technical Report / A. A. Kurzhanski, P. Varaiya. —The University of California, Berkeley, 2006.
119. Kurzhanski A. B. Ellipsoidal techniques for dynamic systems: Control synthesis for uncertain systems / A. B. Kurzhanski, I. Valyi // Dynamics and Control. — 1992. — Vol. 2, № 2. — P. 87–111.
120. Li X. S. An aggregate function method for nonlinear programming / X. S. Li // Science in China (A). —1991. — № 34. — P. 1467–1473.
121. Lin Y. D. Deterministic global optimization of nonlinear dynamic systems / Y. D. Lin, M. A. Stadtherr // AIChE J. — 2007. — Vol. 53, № 4. — P. 866–875.
122. Lopez Cruz I. L. Efficient Evolutionary Algorithms for Optimal Control: PhD-Thesis / I. L. Lopez Cruz. — Wageningen, 2002. — 126 p.

123. Luus R. Direct Search Luus-Jaakola Optimization Procedure / R. Luus // Encyclopedia of Optimization (2nd Edition). — 2009. — P. 735–739.
124. Mitchell I. M. A Time-Dependent Hamilton-Jacobi Formulation of Reachable Sets for Continuous Dynamic Games / I. M. Mitchell, A. M. Bayen, C. J. Tomlin // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2005. — Vol. 50, № 7. — P. 947–957.
125. Mitchell I. M. Validating a Hamilton-Jacobi approximation to hybrid system reachable sets / I. M. Mitchell, A. M. Bayen, C. J. Tomlin // Hybrid Systems: Computation and Control, LNCS. — 2001. — Vol 2034. —P. 418–431.
126. Neumaier A. Rational functions with prescribed global and local minimizers / A. Neumaier // Journal Global Optimization. — 2003. — № 25. — P. 175–181.
127. Nordhaus W.D. Managing the Global Commons / W. D. Nordhaus // The Economics of Climate Change. — MIT Press, 1994.
128. O. von Stryk. User's Guide for DIRCOL (version 2.1): a direct collocation method for the numerical solution of optimal control problems / O. von Stryk // Fachgebiet Simulation und Systemoptimierung (SIM). — Technische Universität Darmstadt, 2000.
129. Patrascu M. HELGA: a heterogeneous encoding lifelike genetic algorithm for population evolution modeling and simulation / M. Patrascu, A. F. Stancu, F. Pop // Soft Computing. — 2014. — № 18. — P. 2565–2576.
130. Press W. H. Section 10.12. Simulated Annealing Methods / W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery // Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (3rd ed.). New York: Cambridge University Press, 2007.
131. Raczynski S. Differential Inclusions in System Simulation / S. Raczynski //Transaction of the SCS. — 1996. — Vol. 13, № 1. — P. 47–54.
132. Sang S., Modeling and simulation of a spherical mobile robot / Shengju Sang, Jichao Zhao, Hao Wu, Shoujun Chen, Qi An // Comput. Sci. Inf. Syst. — 2010. — Vol. 7, № 1. — P. 51–62.
133. Schmitt L. M. Theory of Genetic Algorithms / L. M. Schmitt // Theoretical Computer Science. —2001. — Vol. 259 — P. 1–61.
134. Schweiger C. S. MINOPT: A software package for mixed-integer nonlinear optimization / C. S. Schweiger, C. A. Floudas. — Princeton: Princeton University, 1996.

135. Smirnov A. Attainability Analysis of the DICE Model / A. Smirnov // Interim Report. — Laxenburg, Austria: The International Institute for Applied Systems Analysis, 2005.
136. Summers S. Stochastic Hybrid System Controller Synthesis for Reachability Specifications Encoded by Random Sets / S. Summers, M. Kamgarpour, C. J. Tomlin, J. Lygeros // Automatica. — 2013. — Vol. 49, № 9. — P. 2906–2910.
137. Teo K. L. A unified computational approach to optimal control problems. / K. L. Teo, C. J. Goh, K. H. Wong // Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics. — N.Y.: John Wiley & Sons, 1991. — 345 p.
138. Wolenski P. The Exponential Formula for the Reachable Set of Lipschitz Differential Inclusion / P. Wolenski // SIAM J. Contr. and Optimiz. — 1990. — Vol. 28. № 5. — P. 1148–1161.
139. Xing B. Innovative computational intelligence: a rough guide to 134 clever algorithms. / B. Xing, W. J. Gao. — Cham: Springer, 2014. — P. 53–54.
140. Zhigljavsky, A. Stochastic Global Optimization / A. Zhigljavsky, A. Zilinskas. — Springer, 2008.



«УТВЕРЖДАЮ»

Директор

Института катализа СО РАН

академик РАН В.И. Бухтияров

« 5 » апреля 20 18 г.

СПРАВКА

о внедрении результатов исследования, полученных
в диссертационной работе Е.А. Финкельштейн
«Вычислительные технологии аппроксимации множества
достижимости управляемой системы»

Настоящим подтверждаем, что результаты диссертационной работы Финкельштейн Евгении Александровны «Вычислительные технологии аппроксимации множества достижимости управляемой системы» обладают высокой актуальностью, представляют практический интерес и были использованы в нашем Институте при реализации Междисциплинарного интеграционного проекта фундаментальных исследований СО РАН № 81 «Нелинейные явления в гетерогенных каталитических системах: пространственная и временная организация». Справка выдана Е.А. Финкельштейн для предоставления в диссертационный Совет.

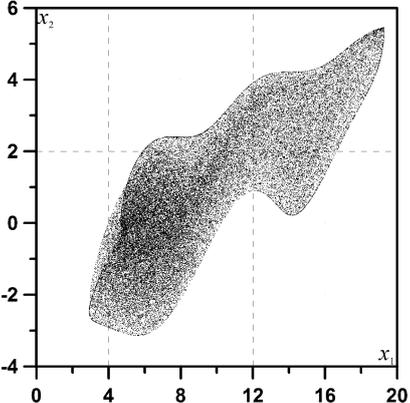
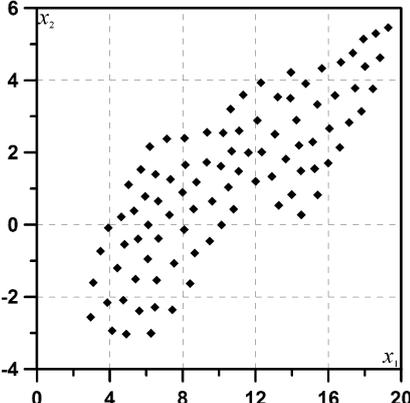
Главный научный сотрудник,
к.ф.-м.н.

В.В. Каичев

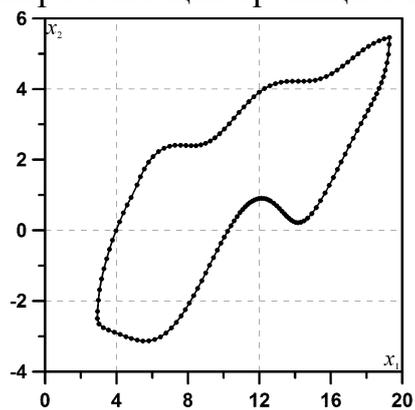
исп: В.В. Каичев
тел: 456

e-mail: vvk@catalysis.ru

Приложение
Тестовая коллекция невыпуклых множеств достижимости

Задача		01	
Источник	Тятюшкин А.И. Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992. 193 с. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003. 614 с.		
Постановка	Размерность задачи	$n = 2$	
	Интервал изменения времени	$t \in T = [0, 5]$	
	Система дифференциальных уравнений	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u - \sin x_1$	
	Начальное значение	$x_0 = (5, 0)$	
	Ограничения на управление	$u \in U = [-1, 1]$	
Решение	(l^1, l^2)	(16,3315; 8,5451)	
	Длина границы	40,0261	
	S_{cont}	54,68823	
	$S_{ellipse}$	85,079301	
	$\bar{\rho}$	0,60913	
Стохастическая аппроксимация		Равномерная аппроксимация	
 <p style="text-align: center;">$N = 50000$</p>		 <p style="text-align: center;">$J_1, p = 32, N = 90, \max_time = 1000$</p>	
Количество задач Коши 50000		Количество задач Коши 5712779	
Процессорное время 59 сек		Процессорное время 1000 сек	

Равномерная монотонная
аппроксимация границы МД

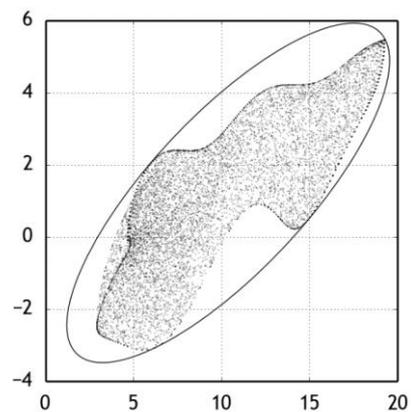


$N_s = 100, K_L = 1,5$

Количество задач Коши 527

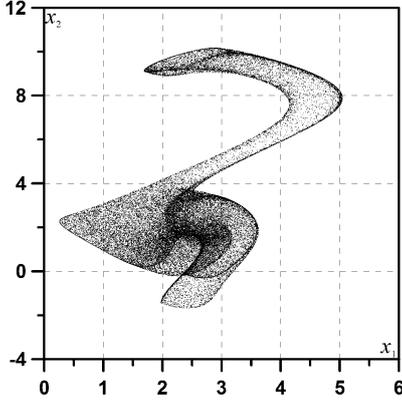
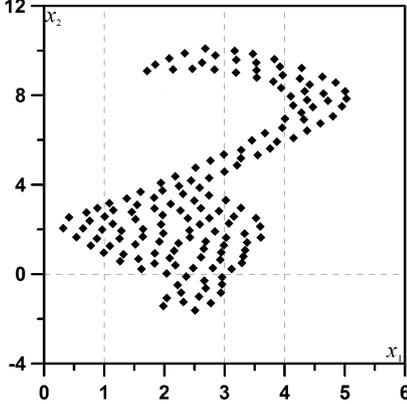
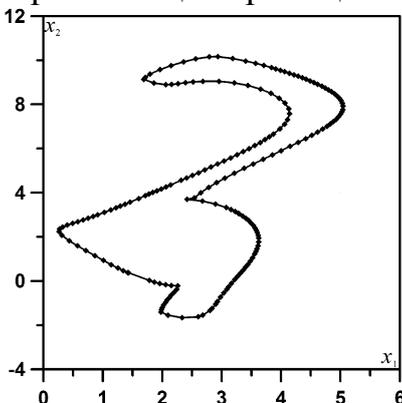
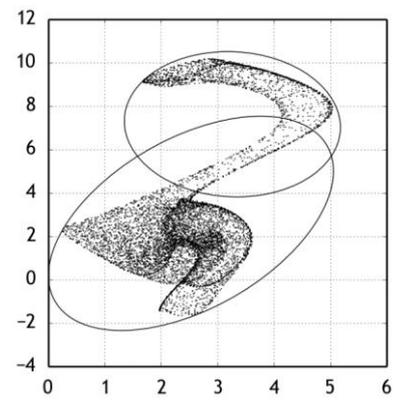
Процессорное время 2 сек

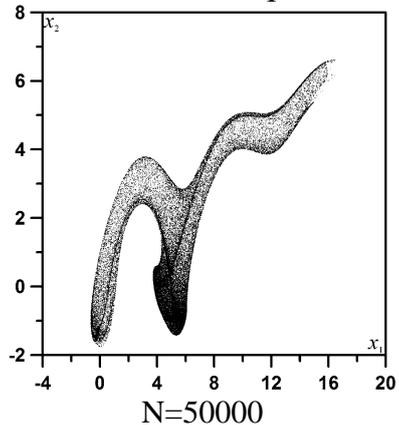
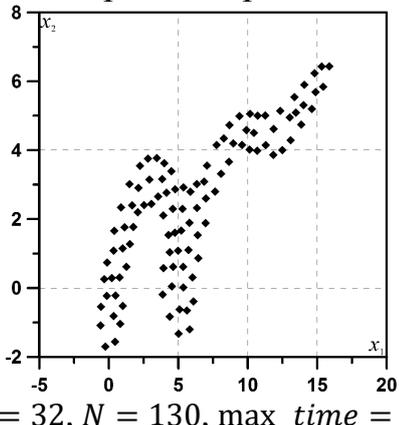
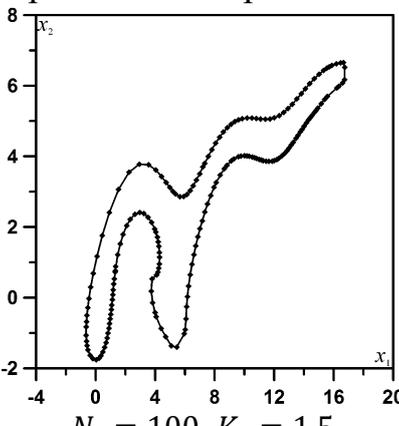
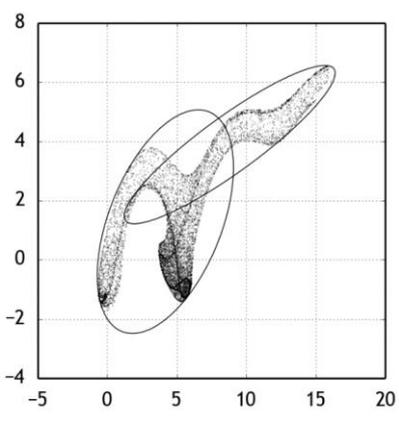
Аппроксимация эллипсом

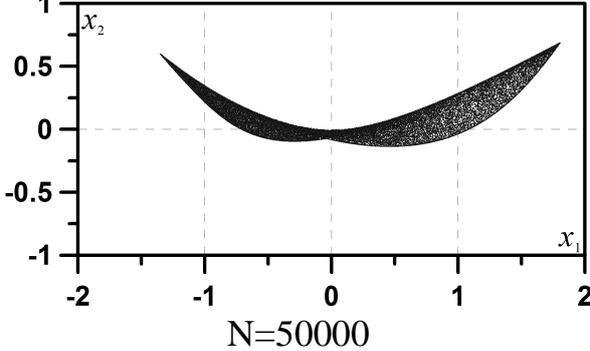
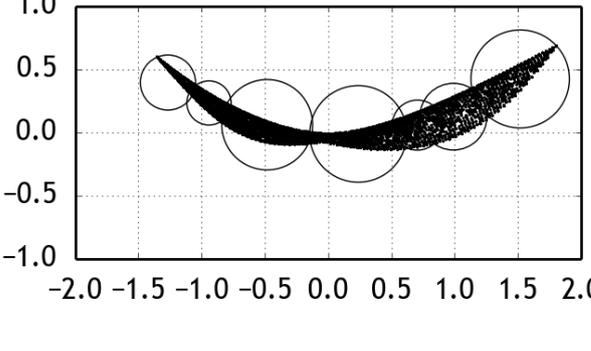


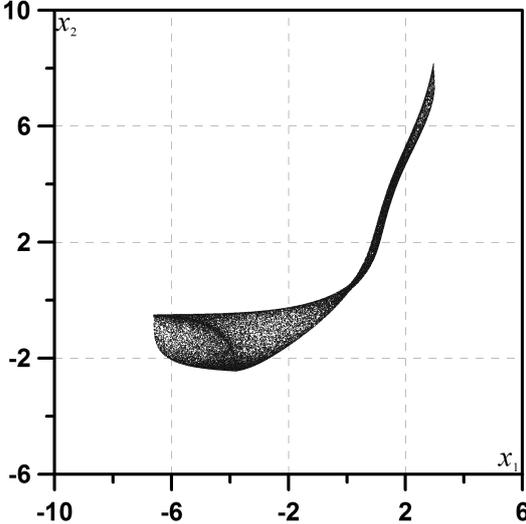
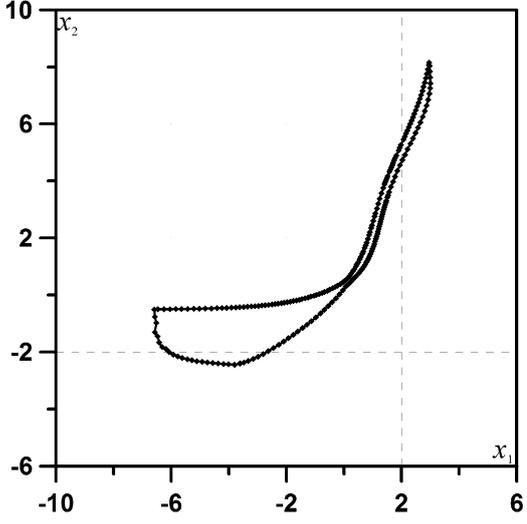
Количество задач Коши 10000

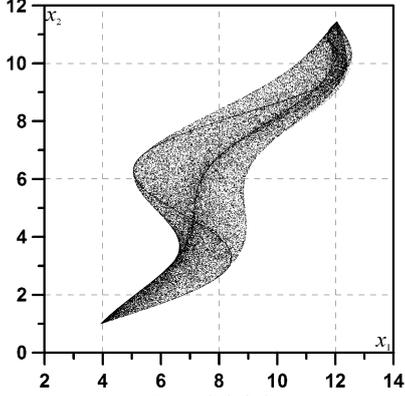
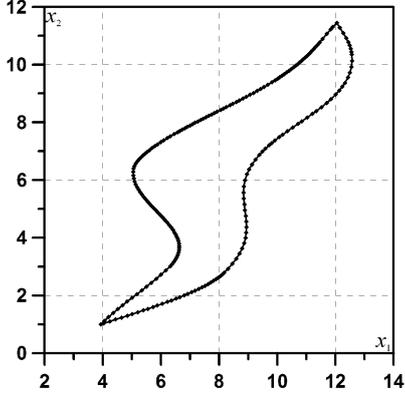
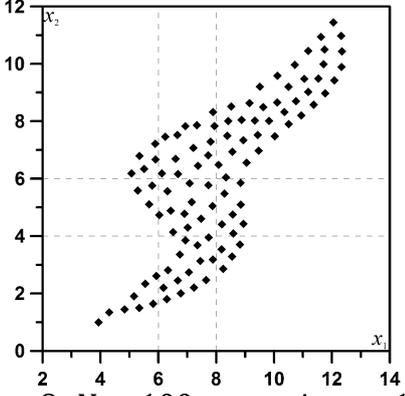
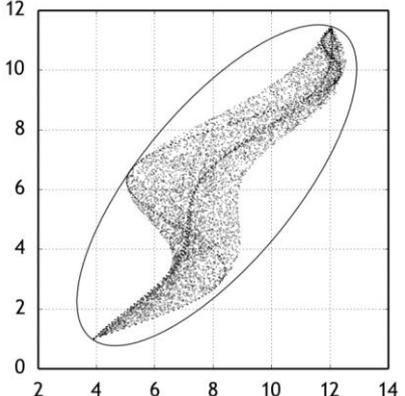
Процессорное время 2500 сек

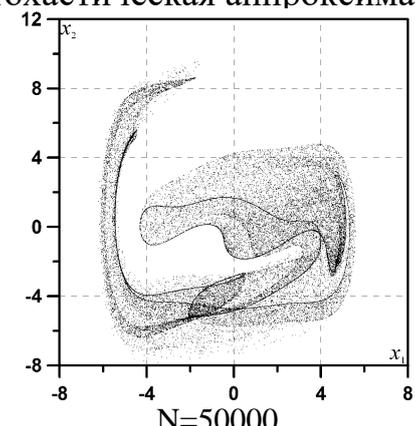
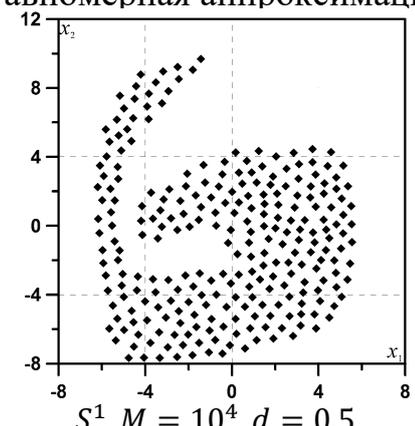
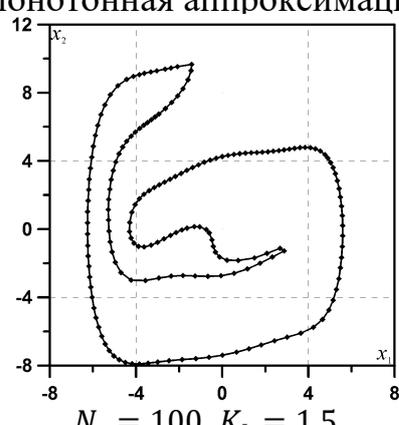
Задача	02	
Источник	Тестовая задача сгенерирована на основе разработанных методик конструирования тестов	
Постановка	Размерность задачи	$n = 2$
	Интервал изменения времени	$t \in [0; 2,5]$
	Система дифференциальных уравнений	$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sin x_1 + x_2 \cos x_2 - u^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 6 \sin x_1 + u \end{aligned}$
	Начальное значение	$x(t_0) = (1, -2)$
	Ограничения на управление	$ u \leq 1$
Решение	(l^1, l^2)	(4,71138; 11,7155)
	Длина границы	31,17197
	S_{cont}	16,95857
	$\bar{\rho}$	0,1103177
Стохастическая аппроксимация		
 <p style="text-align: center;">$N = 50000$</p>		
Квазиравномерная аппроксимация		
 <p style="text-align: center;">$S^1, M = 10^4, d = 0,1$</p>		
Количество задач Коши 50000		Количество задач Коши 312284
Процессорное время 63 сек		Процессорное время 81 сек
Равномерная монотонная аппроксимация границы МД		
		
Аппроксимация объединением эллипсов		
		
Количество задач Коши 10707		Количество задач Коши 757005
Процессорное время 2 сек		Процессорное время 850 сек

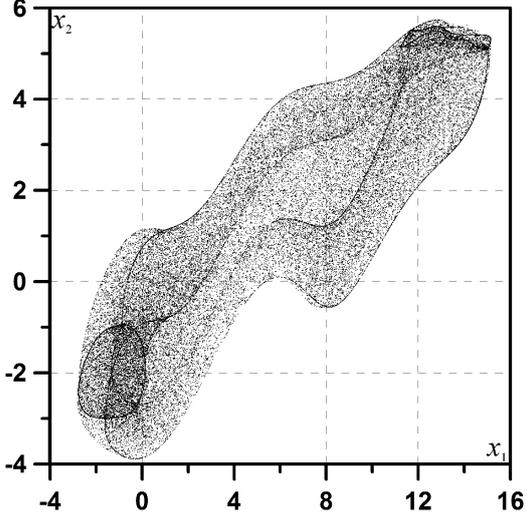
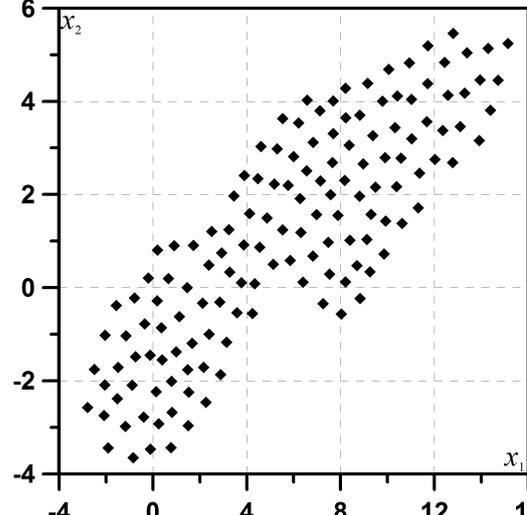
Задача	03	
Источник	Тестовая задача сгенерирована на основе разработанных методик конструирования тестов	
Постановка	Размерность задачи	$n = 2$
	Интервал изменения времени	$t \in [0, 2]$
	Система дифференциальных уравнений	$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^2 + u \\ \dot{x}_2 &= 8 \sin x_1 + x_1 - x_2 - u \end{aligned}$
	Начальное значение	$x(t_0) = (-1, 0)$
	Ограничения на управление	$-2 \leq u \leq 1$
Решение	(l^1, l^2)	(16,46101; 8,00105)
	Длина границы	48,57872
	S_{cont}	29,53087
	$\bar{\rho}$	0,248233
	$S_{ellipse}$	64,61289
Стохастическая аппроксимация		
 <p style="text-align: center;">N=50000</p>		
Равномерная аппроксимация		
 <p style="text-align: center;">$J_1, p = 32, N = 130, \max_time = 1450$</p>		
Количество задач Коши 50000		Количество задач Коши 9857046
Процессорное время 29 сек		Процессорное время 1400 сек
Равномерная монотонная аппроксимация границы МД		
 <p style="text-align: center;">$N_s = 100, K_L = 1,5$</p>		
Аппроксимация объединением эллипсов		
		
Количество задач Коши 122638		Количество задач Коши 1746247
Процессорное время 164 сек		Процессорное время 1600 сек

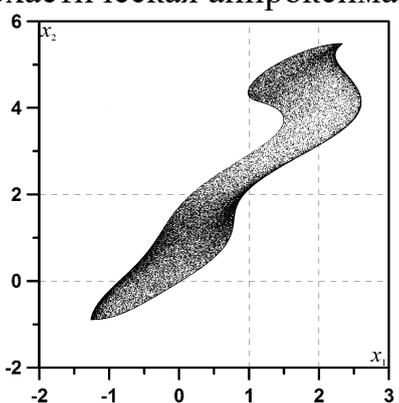
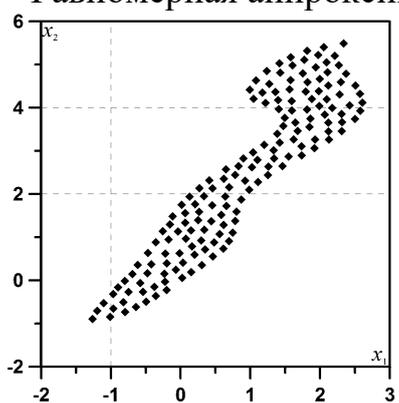
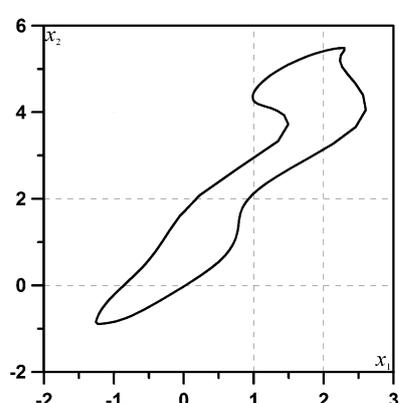
Задача		04	
Источник	Горнов А.Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск: Наука, 2009. – 279 с.		
Постановка	Размерность задачи	$n = 2$	
	Интервал изменения времени	$t \in [0, 1]$	
	Система дифференциальных уравнений	$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \sin x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 \cos x_2 u \end{aligned}$	
	Начальное значение	$x(t_0) = (0, 0),$	
	Ограничения на управление	$ u \leq 1$	
Решение	(l^1, l^2)	(3,1549; 0,82489)	
	S_{circle}	1,832643	
	r_{max}	0,388866	
<p>Стохастическая аппроксимация</p>  <p>N=50000</p>		<p>Аппроксимация шарами</p> 	
Количество задач Коши 50000		Количество задач Коши 237842	
Процессорное время 21 сек		Процессорное время 200 сек	

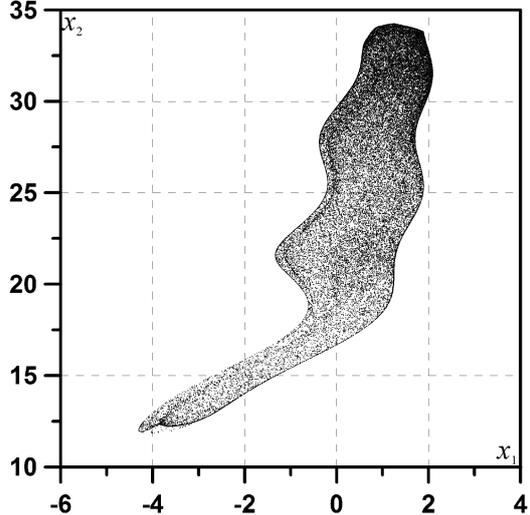
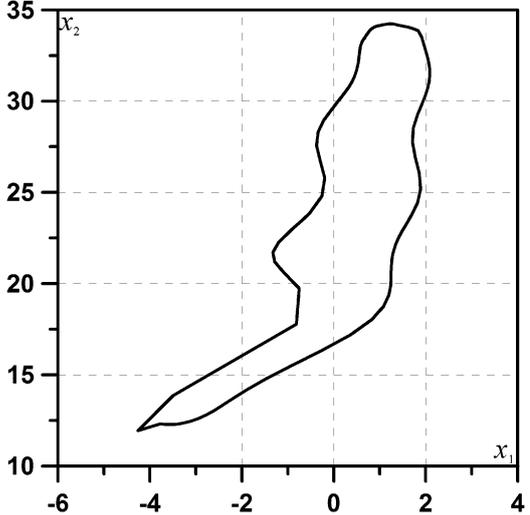
Задача		05	
Источник	Тестовая задача сгенерирована на основе разработанных методик конструирования тестов		
Постановка	Размерность задачи	$n = 2$	
	Интервал изменения времени	$t \in [0, 2]$	
	Система дифференциальных уравнений	$\dot{x}_1 = x_1 \sin(x_2 + 2) + x_2,$ $\dot{x}_2 = x_1 x_2 + 1.5x_1 + x_1 u$	
	Начальное значение	$x_1(0) = -2, x_2(0) = 3$	
	Ограничения на управление	$ u \leq 1$	
Решение	(l^1, l^2)	(9,6132; 8,39909)	
	Длина границы	31,76215e	
	S_{cont}	9,486173	
Стохастическая аппроксимация  $N=50000$		Равномерная монотонная аппроксимация границы МД  $N_s = 100, K_L = 1,5$	
Количество задач Коши 50000		Количество задач Коши 12423	
Процессорное время 26 сек		Процессорное время 90 сек	

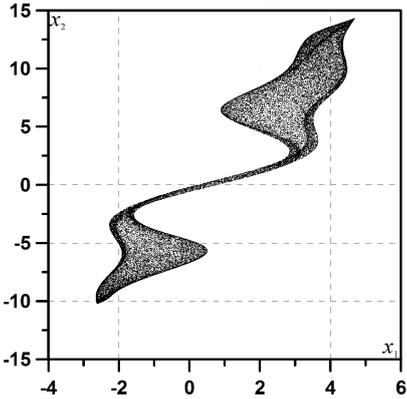
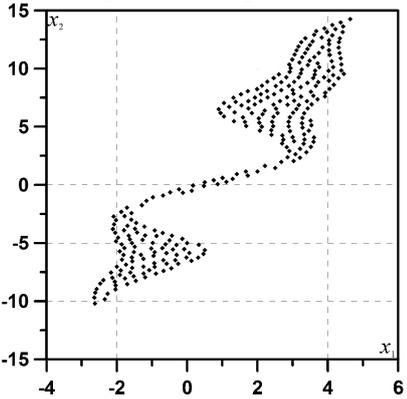
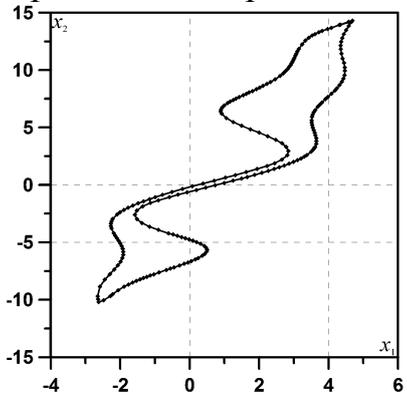
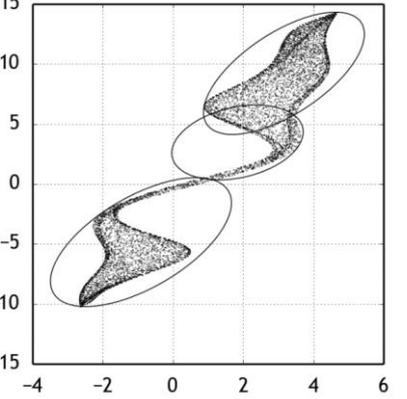
Задача	06	
Источник	Тестовая задача сгенерирована на основе разработанных методик конструирования тестов	
Постановка	Размерность задачи	$n = 2$
	Интервал изменения времени	$t \in [0; 1,5]$
	Система дифференциальных уравнений	$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 \sin x_2 + u$ $\dot{x}_2 = x_2 + u$
	Начальное значение	$x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$
	Ограничения на управление	$-1 \leq u \leq 2$
Решение	(l^1, l^2)	(8,6313; 10,4453)
	Длина границы	31,07630
	S_{cont}	26,13263
	$S_{ellipse}$	55,55166
	$\bar{\rho}$	0,2096795
Стохастическая аппроксимация		
		
N=50000		
Количество задач Коши 50000		
Процессорное время 24 сек		
Равномерная монотонная аппроксимация границы МД		
		
$N_s = 100, K_L = 1,5$		
Количество задач Коши 840		
Процессорное время 1 сек		
Равномерная аппроксимация		
		
$J_1, p = 8, N = 100, \max_time = 1000$		
Количество задач Коши 7582343		
Процессорное время 1000 сек		
Аппроксимация эллипсом		
		
Количество задач Коши 2519328		
Процессорное время 320 сек		

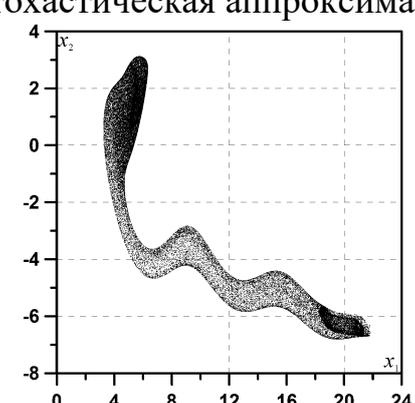
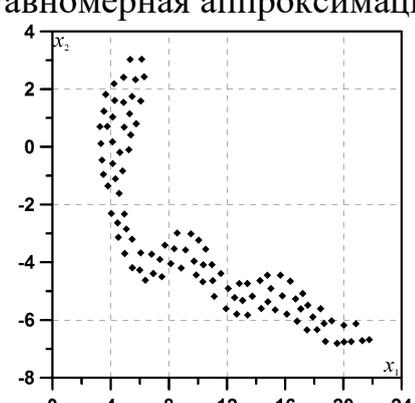
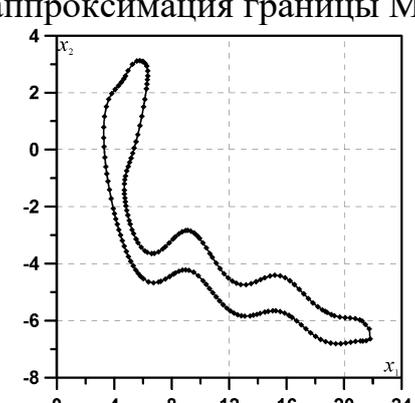
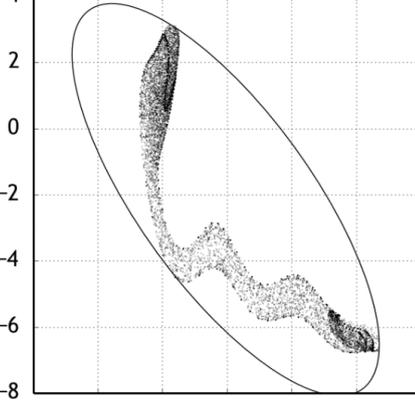
Задача	07	
Источник	Gornov A.Y., Zarodnyuk T.S., Madzhara T.I., Daneyeva A.V., Veyalko I.A. A collection of test multiextremal optimal control problems // Optimization, Simulation and Control. Ser. Springer Optimization and Its Applications. 2013. Vol. 76. – P. 257–274.	
Постановка	Размерность задачи	$n = 2$
	Интервал изменения времени	$t \in [0, 7]$
	Система дифференциальных уравнений	$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u - x_1 + \frac{x_1^3}{6} - \frac{x_1^5}{120} \end{aligned}$
	Начальное значение	$x_0 = (5, 0)$
	Ограничения на управление	$u \in U = [-1, 1]$
Решение	(l^1, l^2)	(11,74389; 17,36087)
	Длина границы	82,95567
	S_{cont}	119,9404
	$\bar{\rho}$	0,4353551
Стохастическая аппроксимация		
 <p style="text-align: center;">N=50000</p>		<p style="text-align: center;">Равномерная аппроксимация</p>  <p style="text-align: center;">$S^1, M = 10^4, d = 0,5$</p>
Количество задач Коши 50000		Количество задач Коши 2201210
Процессорное время 24 сек		Процессорное время 831 сек
Равномерная монотонная аппроксимация границы МД		
 <p style="text-align: center;">$N_s = 100, K_L = 1,5$</p>		
Количество задач Коши 631		
Процессорное время 1 сек.		

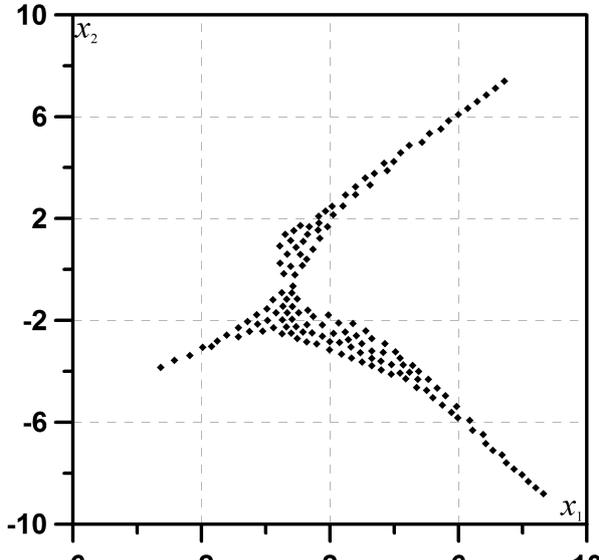
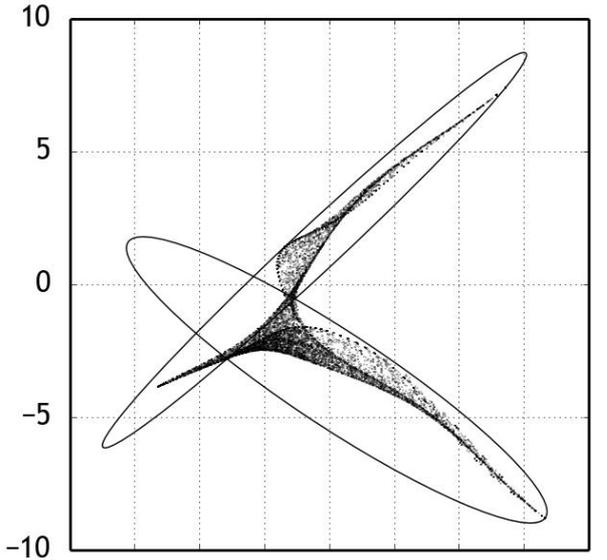
Задача	08	
Источник	Тестовая задача сгенерирована на основе разработанных методик конструирования тестов	
Постановка	Размерность задачи	$n = 2, r=2$
	Интервал изменения времени	$t \in [0, 4]$
	Система дифференциальных уравнений	$\dot{x}_1 = x_2 + u_1$ $\dot{x}_2 = u_2 - \sin x_1$
	Начальное значение	$x_1(0) = -2, x_2(0) = 1$
	Ограничения на управление	$0 \leq u_1 \leq 1$ $-1 \leq u_2 \leq 1$
Решение	(l^1, l^2)	(17,4008; 9,477061)
	Длина границы	43,83081
	S_{cont}	68,73990
	$\bar{\rho}$	0,4710379
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 48%;"> <p>Стохастическая аппроксимация</p>  <p style="text-align: center;">N=50000</p> </div> <div style="width: 48%;"> <p>Равномерная аппроксимация</p>  <p style="text-align: center;">$J_1, p = 8, N = 45, \max_time = 500$</p> </div> </div>		
Количество задач Коши 1000		Количество задач Коши 664901
Процессорное время 11 сек		Процессорное время 397 сек

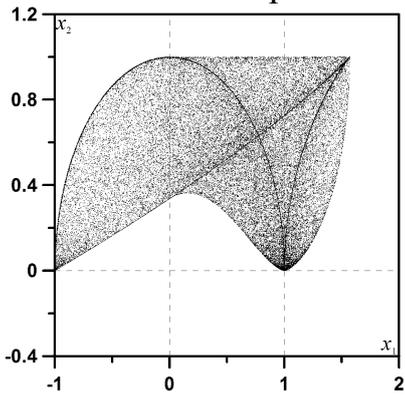
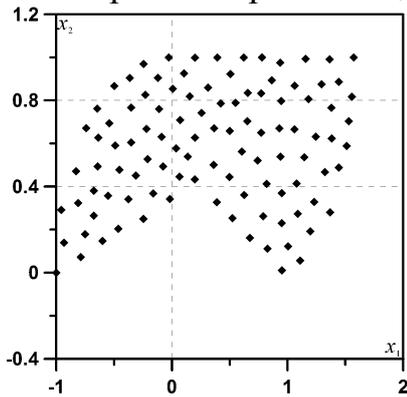
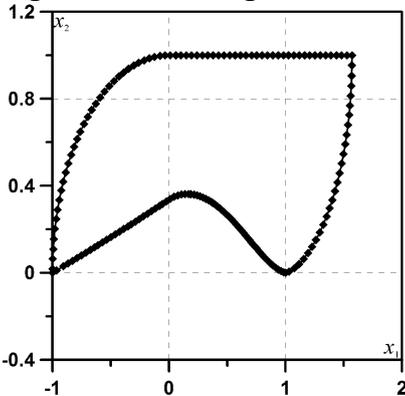
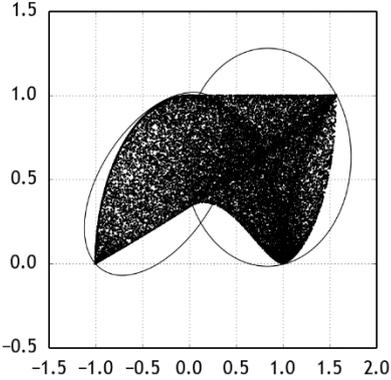
Задача	09	
Источник	Тестовая задача сгенерирована на основе разработанных методик конструирования тестов	
Постановка	Размерность задачи	$n = 2$
	Интервал изменения времени	$t \in [0, 2]$
	Система дифференциальных уравнений	$\dot{x}_1 = x_1 \cos 2x_2 + u$ $\dot{x}_2 = 3x_1 - x_2$
	Начальное значение	$x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$
	Ограничения на управление	$ u \leq 1$
Решение	(l^1, l^2)	(3,8586; 6,3836)
	Длина границы	16,17345
	S_{cont}	5,752341
	$\bar{\rho}$	0,0376
Стохастическая аппроксимация	 <p style="text-align: center;">N=50000</p>	
Равномерная аппроксимация	 <p style="text-align: center;">$J_1, p = 32, N = 150, \max_time = 1500$</p>	
Количество задач Коши 50000	Количество задач Коши 15822356	
Процессорное время 30 сек	Процессорное время 1500 сек	
Кусочно-линейная аппроксимации, основанная на максимизации площади		
		
Количество задач Коши 297302		
Процессорное время 250 сек		

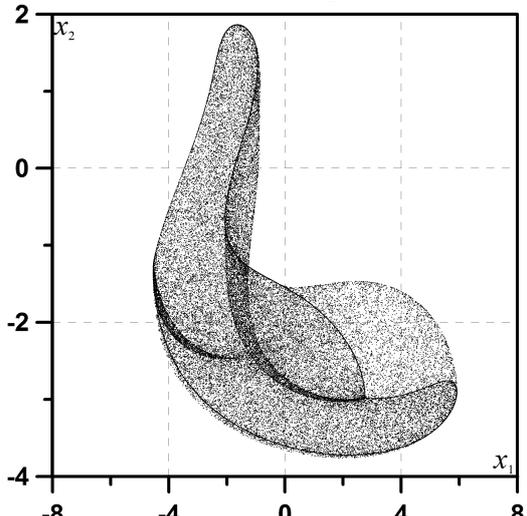
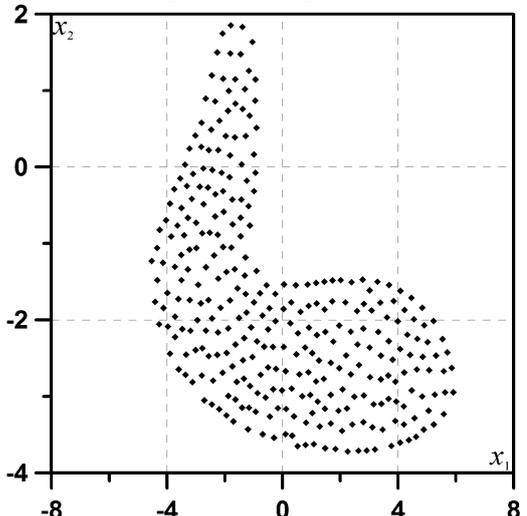
Задача	10	
Источник	Тестовая задача сгенерирована на основе разработанных методик конструирования тестов	
Постановка	Размерность задачи	$n = 2$
	Интервал изменения времени	$t \in [0; 1,3]$
	Система дифференциальных уравнений	$\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1) - 6 \sin x_2 - u$ $\dot{x}_2 = x_1(10 - x_1) + x_2 + u$
	Начальное значение	$x_1(0) = 2, x_2(0) = 0$
	Ограничения на управление	$ u \leq 2$
Решение	(l^1, l^2)	(6,3873; 22,3841)
	Длина границы	48,85037
	S_{cont}	40,07535
Стохастическая аппроксимация		
		
N=50000		
Количество задач Коши 50000		
Процессорное время 11 сек		
Кусочно-линейная аппроксимация, основанная на максимизации площади		
		
Количество задач Коши 475683		
Процессорное время 400 сек		

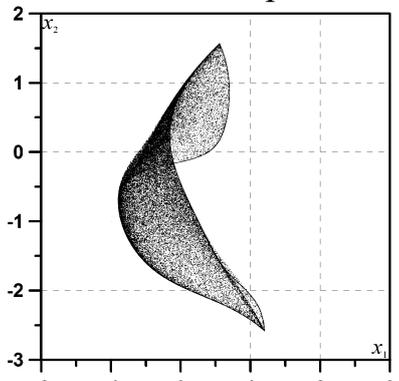
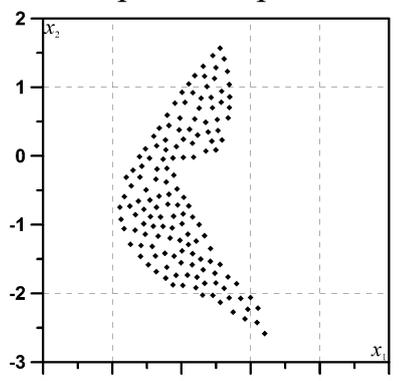
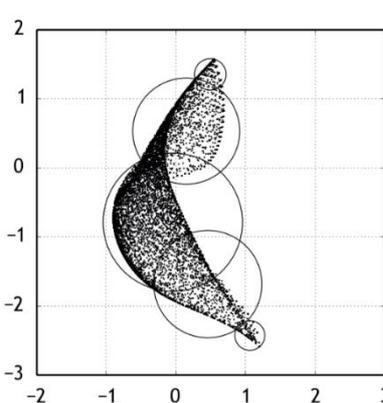
Задача		11	
Источник	Тестовая задача сгенерирована на основе разработанных методик конструирования тестов		
Постановка	Размерность задачи	$n = 2$	
	Интервал изменения времени	$t \in [0; 1,6]$	
	Система дифференциальных уравнений	$\dot{x}_1 = \frac{1}{\cos x_1 + 2} + 3 \sin x_2 + u$ $\dot{x}_2 = x_1 + x_2 + u$	
	Начальное значение	$x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$	
	Ограничения на управление	$-2 \leq u \leq 1$	
Решение	(l^1, l^2)	(7,281144; 24,47228)	
	Длина границы	57,82805	
	S_{cont}	31,65283	
	$S_{ellipse}$	75,5412814	
	$\bar{\rho}$	0,1105101	
Стохастическая аппроксимация		Равномерная аппроксимация	
 <p>N=50000</p>		 <p>$S^1, M = 100, d = 0,1$</p>	
Количество задач Коши 50000		Количество задач Коши 368786	
Процессорное время 33 сек		Процессорное время 83 сек	
Равномерная монотонная аппроксимация границы МД		Аппроксимация эллипсами	
 <p>$N_s = 100, K_L = 1,5$</p>			
Количество задач Коши 43665		Количество задач Коши 1164164	
Процессорное время 75 сек		Процессорное время 1000 сек	

Задача	12	
Источник	Тестовая задача сгенерирована на основе разработанных методик конструирования тестов	
Постановка	Размерность задачи	$n = 2$
	Интервал изменения времени	$t \in [0; 1,1]$
	Система дифференциальных уравнений	$\dot{x}_1 = x_1 + x_2^2 + u$ $\dot{x}_2 = 15 \sin x_1 + x_2 + u$
	Начальное значение	$x_1(0) = -1, x_2(0) = 1$
	Ограничения на управление	$ u \leq 1$
Решение	(l^1, l^2)	(18,50743; 9,848659)
	Длина границы	51,37039
	S_{cont}	29,06490
	$S_{ellipse}$	148,732573
	$\bar{\rho}$	0,3228724
Стохастическая аппроксимация		
 <p style="text-align: center;">N=50000</p>		
Равномерная аппроксимация		
 <p style="text-align: center;">$J_1, p = 32, N = 100, \max_time = 1000$</p>		
Количество задач Коши 50000		Количество задач Коши 10166985
Процессорное время 26 сек		Процессорное время 1000 сек
Равномерная монотонная аппроксимация границы МД		
 <p style="text-align: center;">$N_s = 100, K_L = 1,5$</p>		
Аппроксимация эллипсом		
		
Количество задач Коши 614		Количество задач Коши 1445875
Процессорное время 1 сек		Процессорное время 150 сек

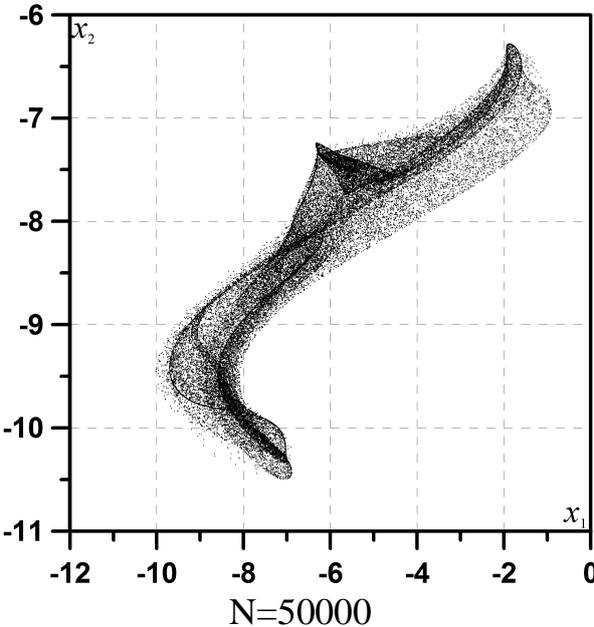
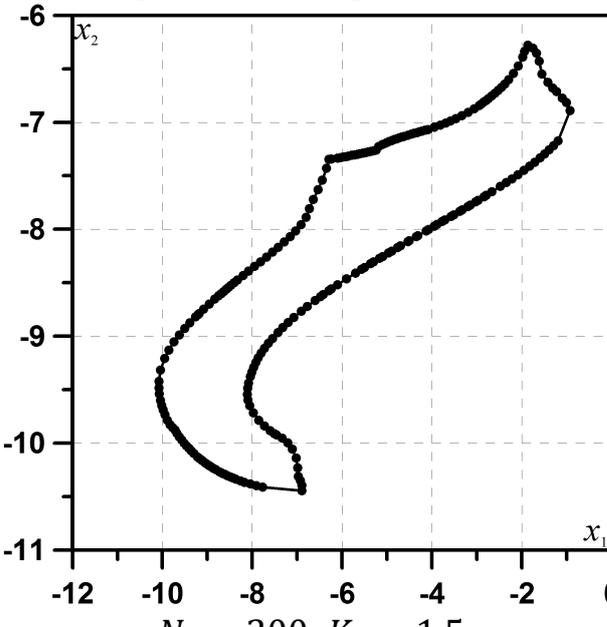
Задача	13	
Источник	Тестовая задача сгенерирована на основе разработанных методик конструирования тестов	
Постановка	Размерность задачи	$n = 2$
	Интервал изменения времени	$t \in [0, 2]$
	Система дифференциальных уравнений	$\dot{x}_1 = u x_2 + u \cos x_1$ $\dot{x}_2 = u x_1 + \sin x_2$
	Начальное значение	$x_1(0) = 1, x_2(0) = -1$
	Ограничения на управление	$-1 \leq u \leq 2$
Решение	(l^1, l^2)	(11,91953; 16,19264)
	$\bar{\rho}$	0,1108876
	$S_{ellipse}$	62,63405
<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="width: 45%;"> <p style="text-align: center;">Равномерная аппроксимация</p>  <p style="text-align: center;">$J_1, p = 32, N = 150, \max_time = 1500$</p> </div> <div style="width: 45%;"> <p style="text-align: center;">Аппроксимация эллипсами</p>  <p style="text-align: center;">$J_1, p = 8, N = 45, \max_time = 500$</p> </div> </div>		
Количество задач Коши 10471431		Количество задач Коши 582082
Процессорное время 1500 сек		Процессорное время 500 сек

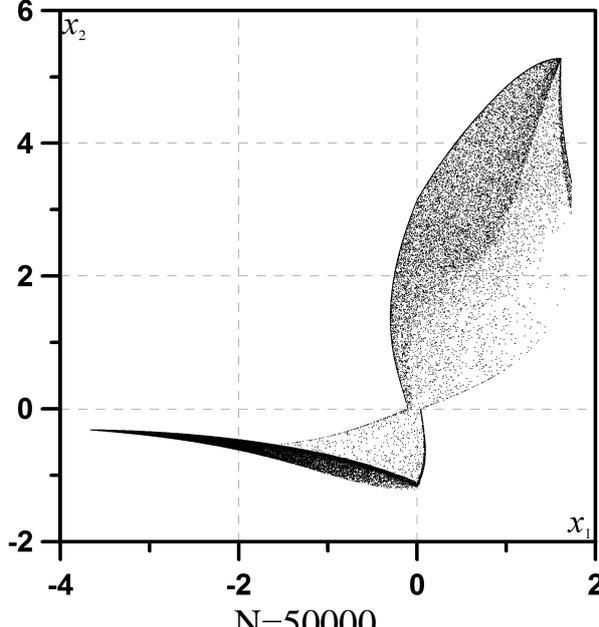
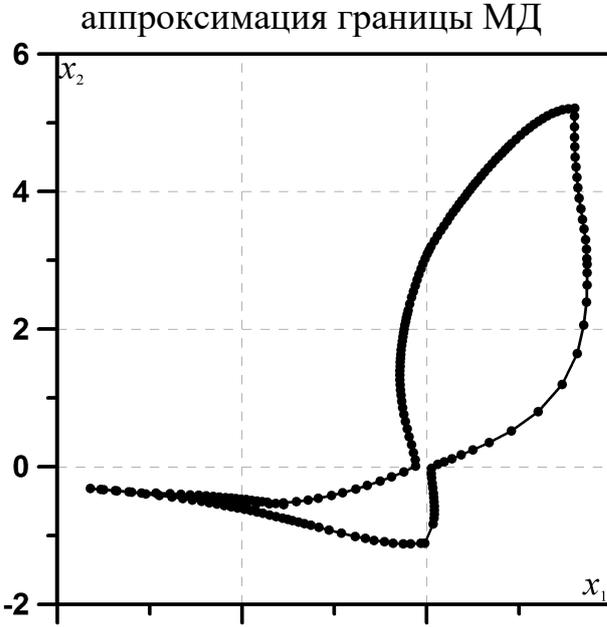
Задача		14	
Источник		Baier R., Gerdts M., Хауса I. Approximation of reachable sets using optimal control algorithms // Numer. Algebra Control Optim. 2013. Vol 3 (3). Pp. 519–548.	
Постановка	Размерность задачи	$n = 2$	
	Интервал изменения времени	$t \in [0, 1]$	
	Система дифференциальных уравнений	$\dot{x}_1 = \pi x_2$ $\dot{x}_2 = -\pi x_1 u$	
	Начальное значение	$x_1(0) = -1, x_2(0) = 0$	
	Ограничения на управление	$0 \leq u \leq 1$	
Решение	(l^1, l^2)	(2,5708; 1)	
	Длина границы	6,519149	
	S_{cont}	1,823565	
	$S_{ellipse}$	2,714677	
	$\bar{\rho}$	0,01157229	
Стохастическая аппроксимация		Равномерная аппроксимация	
 <p>N=50000</p>		 <p>$J_1, p = 32, N = 150, \max_time = 500$</p>	
Количество задач Коши 50000		Количество задач Коши 1933142	
Процессорное время 10 сек		Процессорное время 500 сек	
Равномерная монотонная аппроксимация границы МД		Аппроксимация эллипсом	
 <p>$N_s = 100, K_L = 1,5$</p>		 <p>$n=5, k=2$</p>	
Количество задач Коши 515		Количество задач Коши 359539	
Процессорное время 1 сек		Процессорное время 300 сек	

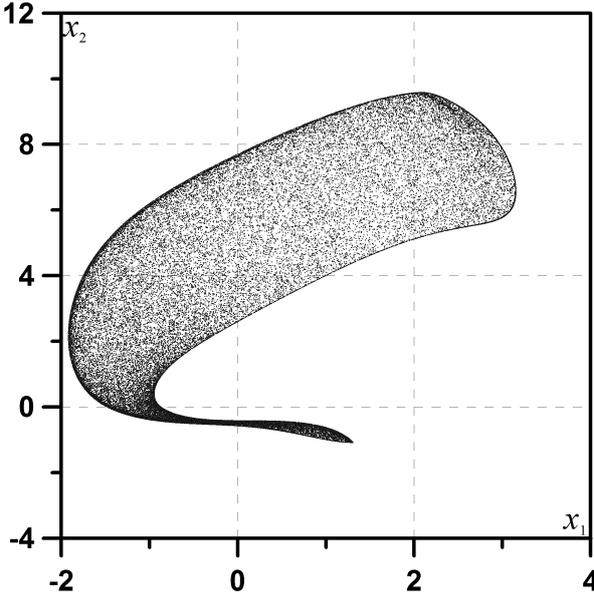
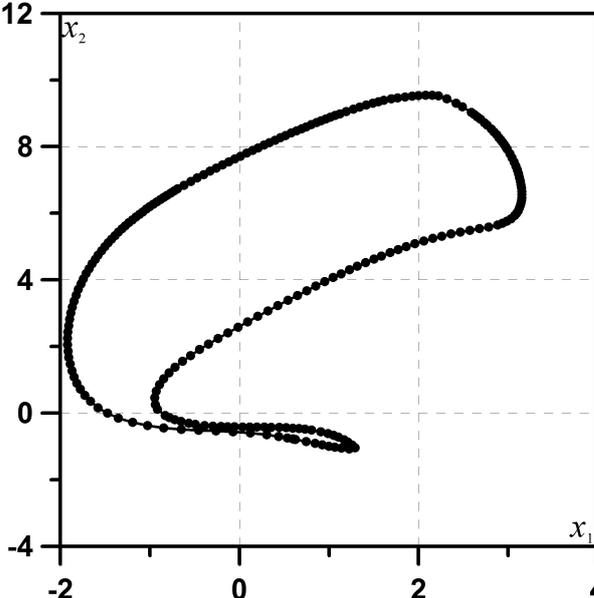
Задача	15	
Источник	Тестовая задача сгенерирована на основе разработанных методик конструирования тестов	
Постановка	Размерность задачи	$n = 2$
	Интервал изменения времени	$t \in [0, 2]$
	Система дифференциальных уравнений	$\dot{x}_1 = x_2 - \frac{1}{2}x_2^3 - \frac{1}{10}x_2^2x_1$ $\dot{x}_2 = x_1 + u$
	Начальное значение	$x_1(0) = 0, x_2(0) = 3$
	Ограничения на управление	$ u \leq 2$
Решение	(l^1, l^2)	(10,43893; 5,574449)
	Длина границы	27,22769
	S_{cont}	25,26057
	$\bar{\rho}$	0,09439352
<p>Стохастическая аппроксимация</p>  <p style="text-align: center;">N=50000</p>		
<p>Равномерная аппроксимация</p>  <p style="text-align: center;">$J_1, p = 8, N = 250,$ $\max_time = 1500$</p>		
Количество задач Коши 10000		Количество задач Коши 30993526
Процессорное время 11 сек		Процессорное время 1500 сек

Задача	16	
Источник	Тестовая задача сгенерирована на основе разработанных методик конструирования тестов	
Постановка	Размерность задачи	$n = 2$
	Интервал изменения времени	$t \in [0; 1,5]$
	Система дифференциальных уравнений	$\dot{x}_1 = x_2^2 + \sin x_1 u$ $\dot{x}_2 = \frac{u}{\cos(x_1+4)-1.01}$
	Начальное значение	$x_1(0) = -1, x_2(0) = 1$
	Ограничения на управление	$-1,8 \leq u \leq 3$
Решение	(l^1, l^2)	(2,092836; 4,15151)
	S_{circle}	5,8046
	$\bar{\rho}$	0,02158074
	r_{max}	0.998966
Стохастическая аппроксимация	Равномерная аппроксимация	
 <p style="text-align: center;">N=1000</p>	 <p style="text-align: center;">$J_1, p = 8, N = 45, \max_time = 500$</p>	
Количество задач Коши 10000	Количество задач Коши 123223	
Процессорное время 11 сек	Процессорное время 110 сек	
Аппроксимация шарами		
 <p style="text-align: center;">n=5, k=3</p>		
Количество задач Коши 989539		
Процессорное время 600 сек		

Задача	17	
Источник	Тестовая задача сгенерирована на основе разработанных методик конструирования тестов	
Постановка	Размерность задачи	$n = 2$
	Интервал изменения времени	$t \in [0, 2]$
	Система дифференциальных уравнений	$\dot{x}_1 = x_2 + x_1 u$ $\dot{x}_2 = \cos x_1 + u$
	Начальное значение	$x_1(0) = -1, x_2(0) = 1$
	Ограничения на управление	$ u \leq 1$
Решение	(l^1, l^2)	(5,83149; 2,9611)
Стохастическая аппроксимация		
<p style="text-align: center;">N=50000</p>		
аппроксимация границы МД		
Количество задач Коши 50000		Количество задач Коши 1000
Процессорное время 9 сек		Процессорное время 8 сек

Задача		18	
Источник		Тестовая задача сгенерирована на основе разработанных методик конструирования тестов	
Постановка	Размерность задачи	$n = 2$	
	Интервал изменения времени	$t \in [0, 2,5]$	
	Система дифференциальных уравнений	$\dot{x}_1 = x_2 \sin(2x_2) + \text{sign}(x_2)$ $\dot{x}_2 = x_1 - \frac{1}{2} + u$	
	Начальное значение	$x_1(0) = -5, x_2(0) = 1$	
	Ограничения на управление	$ u \leq 1$	
Решение	(l^1, l^2)	(9,11368; 4,1623)	
	Длина границы	22,9782	
	S_{cont}	9,7079	
<p>Стохастическая аппроксимация</p>  <p>N=50000</p>		<p>Равномерная монотонная аппроксимация границы МД</p>  <p>$N_s = 200, K_L = 1,5$</p>	
Количество задач Коши 50000		Количество задач Коши 385285	
Процессорное время 54 сек		Процессорное время 1066 сек	

Задача	19	
Источник	Тестовая задача сгенерирована на основе разработанных методик конструирования тестов	
Постановка	Размерность задачи	$n = 2$
	Интервал изменения времени	$t \in [0, 2,5]$
	Система дифференциальных уравнений	$\dot{x}_1 = \text{sign}(x_2) \cdot \cos(x_2) + u$ $\dot{x}_2 = x_1 x_2 + \text{sign}(x_1)$
	Начальное значение	$x_1(0) = -5, x_2(0) = 1$
	Ограничения на управление	$ u \leq 1$
Решение	(l^1, l^2)	(5,3483; 6,18724)
	Длина границы	19,75256
	S_{cont}	7,389330
Стохастическая аппроксимация		
		
Равномерная монотонная аппроксимация границы МД		
		
Количество задач Коши 50000		Количество задач Коши 385285
Процессорное время 54 сек		Процессорное время 1066 сек

Задача	20	
Источник	Тестовая задача сгенерирована на основе разработанных методик конструирования тестов	
Постановка	Размерность задачи	$n = 2$
	Интервал изменения времени	$t \in [0, 2]$
	Система дифференциальных уравнений	$\dot{x}_1 = x_2 + \sin(x_1) - u$ $\dot{x}_2 = x_2 - x_1^3$
	Начальное значение	$x_1(0) = 1, x_2(0) = -3$
	Ограничения на управление	$ u \leq 1$
Решение	(l^1, l^2)	(5,0721; 10,6176)
	Длина границы	28,09798
	S_{cont}	23,76366
Стохастическая аппроксимация		
		
N=50000		
Количество задач Коши 50000		
Процессорное время 26 сек		
Равномерная монотонная аппроксимация границы МД		
		
$N_s = 100, K_L = 1,5$		
Количество задач Коши 611		
Процессорное время 1 сек		