

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Сибирский государственный университет науки и технологий
имени академика М. Ф. Решетнева

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

*Избранные статьи XII Научной интернет-конференции
с международным участием*

Под редакцией С. И. Сенашова

Красноярск 2020

Редакционная коллегия

СЕНАШОВ С. И., доктор физико-математических наук, профессор

ШИШОВ В. В., доктор технических наук, профессор

САВОСТЬЯНОВА И.Л., кандидат педагогических наук, доцент

Редакционный совет

МЕЛЕШКО С. В., доктор физико-математических наук,
профессор (Тайланд)

ЛЫЧАГИН В. В., доктор физико-математических наук,
профессор (Швеция)

ЮМАГУЖИН В. А., доктор физико-математических наук,
профессор (Россия)

ЯХНО А. Н., профессор (Мексика)

Информационные технологии и математическое моделирование :
И74 избр. статьи XII Науч. интернет-конф. с междунар. участием / под
ред. С. И. Сенашова ; СибГУ им. М. Ф. Решетнева : Университет
Гвадалахары. – Красноярск, 2020. – 122 с.

В основе сборника – избранные материалы XII Научной интернет-конференции с международным участием, в которых представлены результаты исследований ученых, преподавателей, научных сотрудников Российской Федерации и стран ближнего и дальнего зарубежья в области применения системного анализа, математического моделирования, оптимизации и информационных технологий в различных областях науки.

Сборник зарегистрирован в базе данных Ulrich's Periodicals Directory.

УДК 330.4(519.248)
ББК 65.04

СОДЕРЖАНИЕ

Курмичев Е., Пиньюэлас Кастро Л. М., Яхно А. Н., Яхно Л. В. Инвариантные решения системы колебаний упругой струны с электрическим током в статическом магнитном поле	4
Матвеев А. Д. Метод эквивалентных условий прочности в расчетах конструкций с неоднородной регулярной структурой	24
Сенашов В. И. Классы Шункова	49
Сенашов С. И., Филюшина Е. В. Групповой анализ динамических уравнений пластичности	61
Ширяева Т. А., Шлепкин А. К., Шлепкин А. А. Об одном методе суммирования конечных сумм	82
Шишов В. В., Коюпченко И. Н. Спектральное тестирование дендроклиматических рядов на базе нулевой гипотезы	92
Сведения об авторах	117

CONTENTS

Kourmychev E., Piñuelas Castro L. M., Yakhno A., Yakhno L. Invariant solutions of system for oscillations of elastic string with electric current in static magnetic field	4
Matveev A. D. Method of equivalent strength conditions in calculations of constructions with inhomogeneous regular structure	24
Senashov V. I. Shunkov Classes	49
Senashov S. I., Filushina E. V. Group analysis of dynamic plasticity equations	61
Shiryaeva T. A., Shlepkin A. K., Shlepkin A. A. About final amounts	82
Shishov V. V., Koyupchenko I. N. Spectral testing of dendroclimatic series based on the null hypothesis	92
Information about the authors	119

**ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ КОЛЕБАНИЙ
УПРУГОЙ СТРУНЫ С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ТОКОМ
В СТАТИЧЕСКОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

Е. Курмичев¹, Л. М. Пиньюэлас Кастро²,
А. Н. Яхно^{3*}, Л. В. Яхно³

¹Departamento de Ciencias Exactas y Tecnológicas, Centro Universitario
de los Lagos, Universidad de Guadalajara, México

²Maestría en Ciencias Físico-Matemáticas, Centro Universitario de los Valles
Universidad de Guadalajara, México

³Departamento de Matemáticas, Centro Universitario de Ciencias Exactas
e Ingenierías, Universidad de Guadalajara, México

*E-mail: alexander.yakhno@cucei.udg.mx

Рассмотрена система дифференциальных уравнений, описывающая колебания упругой струны с электрическим током в стационарном магнитном поле. Для поиска ее решений применяется метод группового анализа. Линейный и нелинейный случаи системы проанализированы по отдельности. В каждом случае найдены допускаемые операторы точечных симметрий для произвольных функций-параметров. Также определены виды функций-параметров, при которых происходит расширение группы симметрий. Проведена классификация алгебр Ли допускаемых симметрий по классам неподобных подалгебр. Для некоторых классов найдены инвариантные решения (по крайней мере выраженные в квадратурах), для которых дана механическая интерпретация и построены графики.

Ключевые слова: колебания упругой струны, нелинейная система дифференциальных уравнений в частных производных, точечная симметрия, алгебра Ли, инвариантное решение.

**INVARIANT SOLUTIONS OF SYSTEM FOR OSCILLATIONS
OF ELASTIC STRING WITH ELECTRIC CURRENT IN STATIC
MAGNETIC FIELD**

E. Kourmychev¹, L. M. Piñuelas Castro²,
A. Yakhno³, L. Yakhno³

¹Instituto Transdisciplinar de Investigación y Servicios de la Universidad de Guadalajara, México

²Maestría en Ciencias Físico-Matemáticas, Centro Universitario de los Valles Universidad de Guadalajara, México

³Departamento de Matemáticas, Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías, Universidad de Guadalajara, México

*E-mail: alexander.yakhno@cucei.udg.mx

The system of differential equations of oscillations of an elastic string with electric current in a static magnetic field is considered. To construct solutions we apply the symmetry group analysis. Two special cases: the linear one and the nonlinear one were considered. Lie algebras of admitted point symmetries for both cases were calculated, and there were described specifications of functions parameters when additional symmetries are admitted. Classification of nonsimilarsubalgeras is realized. Also, invariant solutions for each specification were constructed at least in quadratures and mechanical interpretation for some solutions was given.

Keywords: oscillation of elastic string, nonlinear system of differential equations, point symmetry, invariant solution.

1. Введение

1.1. Постановка задачи

В данной работе, с точки зрения группового анализа, исследуется система неоднородных уравнений в частных производных второго порядка с тремя неизвестными функциями $u^x(x, t)$, $u^y(x, t)$, $u^z(x, t)$, которые зависят от двух независимых переменных x (расстояние) и t (время) [1], которая описывает движение упругой струны с электрическим током $I(t)$ в стационарном магнитном поле $\vec{H}$.

Для вывода уравнений, описывающих волновое движение струны с напряжением $T(x)$ под действием электрического тока и стационарного магнитного поля $\vec{H}$, рассматривается следующая геометрическая схема. Струна в состоянии равновесия является прямой линией и совпадает с осью x в декартовой системе координат (x, y, z) . Форма струны в любой момент времени может быть выражена в терминах смещения каждой ее точки P^0 . В состоянии равновесия, точка струны P^0 имеет координаты $(x, 0, 0)$. В момент времени t смещение точки P^0 описывается вектором $\vec{u}(x, t) = (u^x, u^y, u^z)$, где компоненты $u^y(x, t)$, $u^z(x, t)$ соответствуют небольшим поперечным смещениям натянутой струны, а компонента u^x – продольному смещению. Таким образом, точка P^0 смещается в точку P^1 с координатами $(x + u^x, u^y, u^z)$.

Рассмотрим систему уравнений поперечных и продольных движений струны под действием внешней силы Лоренца $\vec{f} = (f^x, f^y, f^z)$

$$\rho(x)u_{tt}^x = [(T(x) + \lambda(x))u_x^x]_x + f^x(x, t), \quad (1)$$

$$\rho(x)u_{tt}^{y,z} = [T(x)u_x^{y,z}]_x + f^{y,z}(x, t), \quad (2)$$

где $\rho(x)$ – это плотность, $\lambda(x)$ – модуль эластичности, а $T(x)$ – продольное натяжение струны. Нижний индекс обозначает производную по соответствующей переменной.

На произвольный малый элемент $\vec{dl}$ струны действует сила Лоренца

$$\vec{df} = I(t)[\vec{dl} \times \vec{H}(x, y, z)],$$

где магнитное поле $\vec{H} = (H^x, H^y, H^z)$ действует на вектор-сегмент $\vec{dl} = (dl^x, dl^y, dl^z)$. Полагая $dl^x \simeq dx$, $dl^{y,z} \simeq u_x^{y,z} dx$, получаем

$$f^x = I(H^z u_x^y - H^y u_x^z), \quad f^y = I(H^x u_x^z - H^z), \quad f^z = I(H^y - H^x u_x^y).$$

Значение магнитного поля берется в точке P^1 . В случае малых колебаний струны, каждая компонента магнитного поля, действующего на точку P^1 , может быть выражена в виде разложения в ряд Тэйлора в точке равновесия P^0 следующим образом:

$$\begin{aligned} H^{x,y,z}|_{P^1} &\simeq (H^{x,y,z} + u^x H_x^{x,y,z} + u^y H_y^{x,y,z} + u^z H_z^{x,y,z})|_{P^0} = \\ &= H^{x,y,z}|_{P^0} + \nabla \cdot H^{x,y,z}|_{P^0}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} f^x &= I(H^z u_x^y - H^y u_x^z) + I[(\vec{u} \cdot \nabla H^z(x))u_x^y - (\vec{u} \cdot \nabla H^y(x))u_x^z], \\ f^y &= I(H^x u_x^z - H^z) + I[(\vec{u} \cdot \nabla H^x(x))u_x^z - \vec{u} \cdot \nabla H^z(x)], \\ f^z &= I(H^y - H^x u_x^y) + I[\vec{u} \cdot \nabla H^y(x) - (\vec{u} \cdot \nabla H^x(x))u_x^y]. \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, что все функции в приведенных выше уравнениях рассчитываются вдоль оси x .

В общем случае, система (1), (2), (3) содержит семь функций параметров: $\rho(x)$, $T(x)$, $\lambda(x)$, $I(t)$, $H^x(x)$, $H^y(x)$, $H^z(x)$. Но при некоторых дополнительных условиях число параметров может быть уменьшено.

Во-первых, пусть $\rho(x)$, $\lambda(x)$, $T(x)$ – некоторые положительные постоянные. Введем величины $T_1 := (T + \lambda)/\rho$, $T_2 := T/\rho < T_1$. В пункте 2 рассмотрен простейший случай, когда магнитное поле ориентировано вдоль оси x и удовлетворяет условию $|\vec{u} \cdot \nabla H^x(x)| \ll |H^x(x)|$. Тогда колебания по y и z связаны между собой, но продольное перемещение от них не зависит и, кроме того, на него не действует магнитное поле. В этом случае, внешние силы Лоренца задаются следующим образом

$$f^x = 0, f^y = I(t)H^x(x)u_x^z, f^z = -I(t)H^x(x)u_x^y, \quad (4)$$

и получающаяся линейная система содержит только две функции-параметра I и H^x .

Нелинейный случай рассматривается в пункте 3, где полагаем

$$|\vec{u} \cdot \nabla H^{x,y}| \ll |H^{y,z}|, |\vec{u} \cdot \nabla H^x| \simeq |H^x|, |H^x| \gg |H^z|, |H^x| \simeq |H^y|$$

и получаем

$$f^x = -IH^y u_x^z, f^y = I[(H^x + \vec{u} \cdot \nabla H^x) u_x^z - H^z], f^z = IH^y, \quad (5)$$

так что исследуемая система имеет четыре функции-параметра.

1.2. Точечные симметрии

Построение частных решений систем дифференциальных уравнений (особенно в нелинейном случае) представляет определенные трудности, и одним из методов решения является метод группового анализа [2–5], в котором система дифференциальных уравнений $F = 0$ рассматривается как некоторое дифференцируемое многообразие в пространстве независимых переменных, функций и их производных.

Этот метод основывается на понятии точечной симметрии, допускаемой системой, которое можно неформально понимать, как некоторое непрерывное преобразование рассматриваемого пространства, не меняющее поверхности (многообразия), заданной системой, т. е. каждая точка поверхности $F = 0$ переходит в точку той же самой поверхности. Симметрии (группы непрерывных преобразований) были введены Софусом Ли и сейчас представляют одно из базовых понятий теории дифференциальных уравнений.

Под действием группы симметрий G , решение системы $F = 0$ переходит в другое решение этой же системы, но при этом некоторые решения переходят сами в себя. Такие решения называются инвариантными относительно группы G .

Группы допускаемых симметрий могут быть различными для различных форм функций-параметров, входящих в изучаемую систему дифференциальных уравнений. Такая задача известна как задача групповой классификации: определение симметрий, допускаемых для любого вида параметров, и всех спецификаций параметров, при которых допускаются дополнительные точечные преобразования.

Более детально, рассмотрим инфинитезимальный оператор X (генератор группы симметрий), который действует в пространстве переменных (x_i, u^α) ,

$$X = \xi^i \partial_{x_i} + \eta^\alpha \partial_{u^\alpha}, \quad i = 1, 2, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (6)$$

где введены обозначения $\vec{u} = (u^x, u^y, u^z) =: (u^1, u^2, u^3)$, $\partial_{x_i} := \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial_{u^\alpha} := \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$, $x_1 := t$, $x_2 := x$. При этом неизвестные коэффициенты ξ^i , η^α являются функциями от $x_{1,2}$ и $\vec{u}$. Здесь и далее мы используем соглашение о суммировании: если некоторый индекс повторяется дважды в некотором

слагаемом (и не оговаривается отдельно), то проводится суммирование членов по всем возможным значениям повторяющегося индекса.

По данному оператору X можно восстановить соответствующую однопараметрическую группу G , решая так называемые уравнения Ли:

$$\begin{aligned}\frac{df^i}{da} &= \xi^i, & f^i|_{a=0} &= x_i, \\ \frac{dg^\alpha}{da} &= \eta^\alpha, & g^\alpha|_{a=0} &= u^\alpha,\end{aligned}\tag{7}$$

где $a \in U \subset \mathbb{R}$ является групповым параметром, заданным в интервале $U \ni 0$. Таким образом, группа преобразований (относительно композиции) имеет вид

$$G: \bar{x}_i = f^i(x_1, x_2, \vec{u}; a), \quad \bar{u}^\alpha = g^\alpha(x_1, x_2, \vec{u}; a),$$

где $\bar{x}_i, \bar{u}^\alpha$ – преобразованные координаты точки пространства

$$(x_1, x_2, u^1, u^2, u^3).$$

Исходная система уравнений колебаний струны является системой второго порядка, поэтому необходимо рассчитать коэффициенты продолженного оператора X_2 , действующего в пространстве переменных $(x_1, x_2, u^\alpha, u_i^\alpha, u_{ij}^\alpha)$

$$X_2 = X + \xi_i^\alpha \partial_{u_i^\alpha} + \xi_{ij}^\alpha \partial_{u_{ij}^\alpha}, \quad j = 1, 2,$$

где $u_{ij}^\alpha := \partial^2 u^\alpha / \partial x_i \partial x_j$,

$$\xi_i^\alpha = D_i(\eta^\alpha) - u_\beta^\alpha D_i(\xi^\beta), \quad \beta = 1, 2,$$

$$\xi_{ij}^\alpha = D_j(\xi_i^\alpha) - u_{i\beta}^\alpha D_j(\xi^\beta),$$

а оператор

$$D_i = \partial_{x_i} + u_i^\alpha \partial_{u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \partial_{u_j^\alpha} + \dots$$

является оператором полной производной по переменной x_i .

На следующем этапе, оператор X_2 применяется к каждому уравнению системы $F = 0$. Затем необходимо сузить действие оператора на многообразие, задаваемое системой. При этом выбираются некоторые переменные в пространстве $(x_1, x_2, u^\alpha, u_i^\alpha, u_{ij}^\alpha)$ (так называемые внешние переменные), которые заменяются внутренними переменными в силу исходной системы. В результате получается следующая система дифференциальных уравнений

$$X_2(F) \Big|_{F=0} = 0.\tag{8}$$

Расщепление этой системы по внутренним производным $u_{2i}^\alpha, u_2^\alpha$ приводит к переопределенной системе линейных однородных

дифференциальных уравнений (так называемые определяющие уравнения) для неизвестных коэффициентов ξ^i , η^α . Общее решение определяющих уравнений дает допускаемые операторы X_k , $k = 1, \dots, n$, которые формируют базис алгебры Ли L_n размерности n относительно операции коммутирования $[X_k, X_l] = X_k X_l - X_l X_k$, $(k, l = 1, 2, \dots, n)$.

Множество преобразований, соответствующих операторам X_k для произвольного вида функций-параметров, называется ядром допускаемых симметрий. Далее, определяющие уравнения исследуются для различных видов функций-параметров. При этом могут возникнуть дополнительные симметрии.

Вычисляя функционально независимые инварианты определенного допускаемого оператора симметрии можно построить вид инвариантного решения, который в большинстве случаев совместим с исходной системой уравнений и содержит меньшее количество независимых переменных. В нашем случае, после подстановки вида инвариантного решения придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Линейный случай

2.1. Симметрии

Обозначая $H^x(x)/\rho =: H(x)$ и подставляя (4) в (1), (2), получаем линейную систему $F = 0$

$$\begin{aligned} u_{11}^1 &= T_1 u_{22}^1, \\ u_{11}^2 &= T_2 u_{22}^2 + I(x_1) H(x_2) u_2^3, \\ u_{11}^3 &= T_2 u_{22}^3 - I(x_1) H(x_2) u_2^2 \end{aligned} \quad (9)$$

для которой будем искать нетривиальные решения.

Решение определяющих уравнений (8) для произвольного вида функций I и H дает

$$\begin{aligned} \xi^1 &= c_1 x_1 + k_1, & \xi^2 &= c_1 x_2 + k_2, \\ \eta^1 &= n_1 u^1 + f^1, \\ \eta^2 &= n_2 u^2 + n_3 u^3 + f^2, \\ \eta^3 &= -n_3 u^2 + n_2 u^3 + f^3, \end{aligned}$$

где функции $f^\alpha = f^\alpha(x_1, x_2)$ представляют собой произвольное решение исходной системы (9), а $c_{1,2}$, $k_{1,2}$, $n_{1,2,3}$ – произвольные константы.

Соответствующая алгебра Ли N ядра симметрий имеет следующий базис:

$$\begin{aligned} X_1 &= u^1 \partial_{u^1}, X_2 = u^2 \partial_{u^2} + u^3 \partial_{u^3}, X_3 = u^3 \partial_{u^2} - u^2 \partial_{u^3}, \\ X_+ &= f^1 \partial_{u^1} + f^2 \partial_{u^2} + f^3 \partial_{u^3} \end{aligned}$$

и может быть представлена как прямая сумма трехмерной алгебры Ли $\langle X_1, X_2, X_3 \rangle$ и бесконечномерного идеала $\langle X_+ \rangle$. Наличие оператора $\langle X_+ \rangle$

характерно для всех линейных уравнений и означает принцип суперпозиции решений. Заметим, что конечная часть алгебры N является абелевой, т. е. все коммутаторы равны нулю.

Ниже перечислены виды функций-параметров, для которых происходит расширение ядра преобразований.

1. Степенные функции:

$$\begin{aligned} I &= m_1(x_1 + r_1)^{m-1}, \quad H = m_2(x_2 + r_2)^{-m}, \\ Y_p &= (x_1 + r_1)\partial_{x_1} + (x_2 + r_2)\partial_{x_2}, \quad m \neq 0, 1, \\ Y_p &= x_1\partial_{x_1} + (x_2 + r_2)\partial_{x_2}, \quad \tilde{Y}_p = \partial_{x_1}, \quad m = 1, \\ Y_p &= (x_1 + r_1)\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2}, \quad \tilde{Y}_p = \partial_{x_2}, \quad m = 0; \end{aligned}$$

2. Функции экспоненты:

$$I = a_1 e^{\frac{mx_1}{m_1}}, \quad H = a_2 e^{-\frac{mx_2}{m_2}}, \quad m \neq 0, \quad Y_e = m_1\partial_{x_1} + m_2\partial_{x_2};$$

3. Постоянные функции:

$$\begin{aligned} I &= a_1, \quad H = a_2, \quad Z_1 = \partial_{x_1}, \quad Z_2 = \partial_{x_2}, \\ Z_3 &= -(u_2 \cos lx_2 + u_3 \sin lx_2)\partial_{u_2} - (u_2 \sin lx_2 - u_3 \cos lx_2)\partial_{u_3}, \\ Z_4 &= (-u_2 \sin lx_2 + u_3 \cos lx_2)\partial_{u_2} + (u_2 \cos lx_2 + u_3 \sin lx_2)\partial_{u_3}, \end{aligned}$$

где $m_{1,2}, a_{1,2} \neq 0, r_{1,2}, m \in \mathbb{R}$ и $l = a_1 a_2 / T_2$ – некоторые фиксированные постоянные.

Можно определить так называемые преобразования эквивалентности, при которых функции-параметры рассматриваются как новые независимые переменные [3], т. е. оператор (6) имеет вид

$$X = \xi^i \partial_{x_i} + \eta^\alpha \partial_{u^\alpha} + \zeta^I \partial_I + \zeta^H \partial_H.$$

Используя преобразования, которые действуют на функции-параметры $\phi: I \rightarrow \bar{I}, \psi: H \rightarrow \bar{H}$, можно упростить вид этих функций. В рассмотренном случае имеем следующие преобразования эквивалентности:

$$\phi: \bar{I} = \frac{1}{a_1 a_4} I(a_1(t + a_2)), \quad \psi: \bar{H} = a_4 H(a_1(x + a_3)), \quad a_i = \text{const}, \quad a_{1,4} \neq 0.$$

Таким образом, $\bar{I}\bar{H} = I(a_1(t + a_2))H(a_1(x + a_3))/a_1$ и можно получить, например, $r_{1,2} = 0$ для степенных функций I и H . Но для механической интерпретации решений иногда удобнее рассматривать наиболее общий вид функций-параметров.

2.2. Инвариантные решения

Для получения существенно различных инвариантных решений требуется построение системы неподобных подалгебр алгебры Ли допускаемых симметрий относительно группы внутренних изоморфизмов.

Заметим, что конечная часть ядра N не содержит операторов ∂_{x_i} , поэтому вся информация об инвариантном решении содержится в операторах расширения ядра. Будем рассматривать только подалгебры, в которые входят операторы Y или Z . Более того, будем анализировать только подалгебры, которые дают вид инвариантного решения с одной независимой переменной (как наиболее общий случай), а также ограничимся рассмотрением только одного представителя класса неподобных подалгебр для каждого конкретного случая.

1. Рассмотрим абелеву алгебру Ли $L_p = \langle Y_p, X_1, X_2, X_3 \rangle$. Эта четырехмерная алгебра Ли имеет следующие классы неподобных подалгебр [6] ($\gamma_{0,1,2} \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \langle Y_p \rangle, \quad \langle X_1 + \gamma_0 Y_p \rangle, \quad \langle X_2 + \gamma_1 X_1 + \gamma_0 Y_p \rangle, \\ \langle X_3 + \gamma_2 X_2 + \gamma_1 X_1 + \gamma_0 Y_p \rangle. \end{aligned}$$

Наиболее общая форма инвариантного решения соответствует первой подалгебре из приведенного выше списка и выглядит следующим образом

$$u^\alpha = u^\alpha(J), \quad J = \frac{x_2 + r_2}{x_1 + r_1}, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

$r_{1,2}$ – произвольные постоянные. После подстановки этого вида в систему (9) получаем так называемую фактор-систему, которая в данном случае представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений (штрих обозначает производную по переменной J):

$$\begin{aligned} \left((J^2 - T_1) u^1 \right)' &= 0, \\ \left((J^2 - T_2) u^2 \right)' &= m_1 m_2 J^{-m} u^3, \\ \left((J^2 - T_2) u^3 \right)' &= -m_1 m_2 J^{-m} u^2 \end{aligned}$$

с общим решением, выраженным в квадратурах

$$\begin{aligned} u^1 = u^x &= \frac{k_1}{2\sqrt{T_1}} \ln \left| \frac{J - \sqrt{T_1}}{J + \sqrt{T_1}} \right| + k_2, \\ u^2 = u^y &= r_0 \int \frac{\sin MF(J)}{J^2 - T_2} dJ, \\ u^3 = u^z &= r_0 \int \frac{\cos MF(J)}{J^2 - T_2} dJ, \end{aligned}$$

где $M = m_1 m_2 \neq 0$, $J = (x + r_2)/(t + r_1)$, $F(J) := \int \frac{dJ}{J^m(J^2 - T_2)}$ и $k_{1,2}$, r_0 – некоторые постоянные.

В частности, при $m = 0$, $M = 1$ ($m_1 = 1/m_2$) в явном виде получаются следующие выражения

$$\begin{aligned} u^x &= \frac{k_1}{\sqrt{T_1}} \tanh^{-1} \sqrt{T_1} \frac{t + r_1}{x + r_2} + k_2, \\ u^y &= r_0 \cos \left(\frac{1}{\sqrt{T_2}} \tanh^{-1} \sqrt{T_2} \frac{t + r_1}{x + r_2} \right) + A_1, \\ u^z &= r_0 \sin \left(\frac{1}{\sqrt{T_2}} \tanh^{-1} \sqrt{T_2} \frac{t + r_1}{x + r_2} \right) + A_2, \end{aligned}$$

для функций-параметров $I = (t + r_1)^{-1}/m_2$, $H^x = m_2$. При $k_1 \neq 0$ решение определено для $|t + r_1| < |x + r_2|/\sqrt{T_1}$, иначе его областью определения является $|t + r_1| < |x + r_2|/\sqrt{T_2}$.

Это инвариантное решение можно интерпретировать как решение, описывающее колебание бесконечной струны в областях, удаленных от концов струны с начальными смещениями при $t = 0$:

$$\begin{aligned} u^x(0, x) &= \frac{k_1}{\sqrt{T_1}} \tanh^{-1} \sqrt{T_1} \frac{r_1}{x + r_2} + k_2, \\ u^y(0, x) &= r_0 \cos \left(\frac{1}{\sqrt{T_2}} \tanh^{-1} \sqrt{T_2} \frac{r_1}{x + r_2} \right) + A_1, \\ u^z(0, x) &= r_0 \sin \left(\frac{1}{\sqrt{T_2}} \tanh^{-1} \sqrt{T_2} \frac{r_1}{x + r_2} \right) + A_2, \end{aligned}$$

с начальными скоростями:

$$\begin{aligned} u_t^x(0, x) &= k_1 \frac{x + r_2}{(x + r_2)^2 - r_1^2 T_1}, \\ u_t^y(0, x) &= -r_0 \frac{x + r_2}{(x + r_2)^2 - r_1^2 T_2} \sin \left(\frac{1}{\sqrt{T_2}} \tanh^{-1} \sqrt{T_2} \frac{r_1}{x + r_2} \right), \\ u_t^z(0, x) &= r_0 \frac{x + r_2}{(x + r_2)^2 - r_1^2 T_2} \cos \left(\frac{1}{\sqrt{T_2}} \tanh^{-1} \sqrt{T_2} \frac{r_1}{x + r_2} \right). \end{aligned}$$

Для интервала времени $t \in [0, t_1]$ можно считать, что концы струны фиксированны при $x \rightarrow \infty$, потому что $u^x \rightarrow k_2$, $u^y \rightarrow r_0 + A_1$ и $u^z \rightarrow A_2$, которые можно взять нулевыми.

На рис. 1 приведен профиль струны при $k_{1,2} = A_2 = 0$ и $r_0 = r_1 = T_2 = m_2 = 1$, $A_1 = -r_0$ и $r_2 = 20$ при $t = 0$ (красная линия), $t = 1$ (синяя линия) и $t = 2$ (зеленая линия).

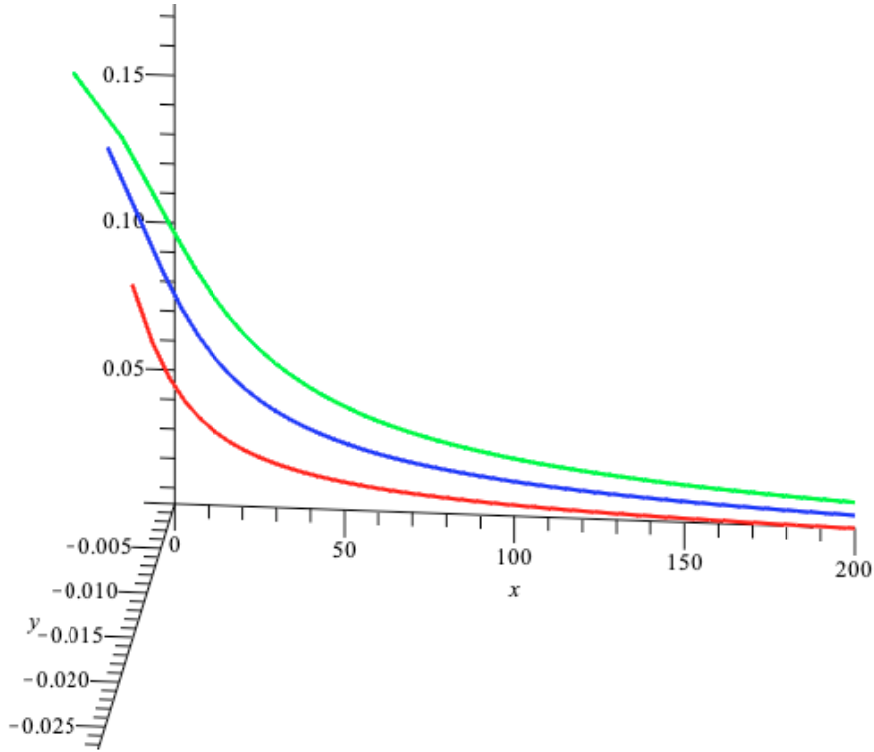


Рис. 1. График профиля струны для инвариантного решения при $I = 1/(t + 1)$, $H = 1$ для трех различных моментов времени

2. Рассмотрим четырехмерную алгебру Ли $L_e = \langle Y_e, X_1, X_2, X_3 \rangle$, которая также является абелевой. Неподобные подалгебры имеют похожую структуру, что и в первом случае:

$$\langle Y_e \rangle, \langle X_1 + \gamma_0 Y_e \rangle, \langle X_2 + \gamma_1 X_1 + \gamma_0 Y_e \rangle, \langle X_3 + \gamma_2 X_2 + \gamma_1 X_1 + \gamma_0 Y_e \rangle.$$

Инвариантное решение на подалгебре $\langle Y_e \rangle$ имеет вид

$$u^\alpha = u^\alpha(J), \quad J = \frac{x_1}{m_1} - \frac{x_2}{m_2},$$

с соответствующей фактор-системой

$$\begin{aligned} u^{1''} &= 0, \\ \left(\frac{1}{m_1^2} - \frac{T_2}{m_2^2} \right) u^{2''} &= -M e^{mJ} u^{3'}, \\ \left(\frac{1}{m_1^2} - \frac{T_2}{m_2^2} \right) u^{3''} &= M e^{mJ} u^{2'}. \end{aligned}$$

Взяв $M = a_1 a_2 / m_2$, получим общее решение

$$u^x = c_1 \left(\frac{t}{m_1} - \frac{x}{m_2} \right) + c_2$$

$$u^y = r_0 \text{Si} \left(r_1 e^{\frac{m}{m_1} t - \frac{m}{m_2} x} \right) + A_1, \quad (10)$$

$$u^z = r_0 \text{Ci} \left(r_1 e^{\frac{m}{m_1} t - \frac{m}{m_2} x} \right) + A_2, \quad (11)$$

где $r_1 = a_1 a_2 m_1^2 m_2 / m (T_2 m_1^2 - m_2^2)$, а функции Si, Ci обозначают интегральный синус и косинус (мы полагаем $r_0 = 0$, если $m_2^2 = T_2 m_1^2$).

Это инвариантное решение может быть использовано для описания колебаний струны в области, удаленной от ее концов (рис. 2). Заметим, что в плоскости yz , функции (10), (11) задают параметрическую форму спирали Нильсена.

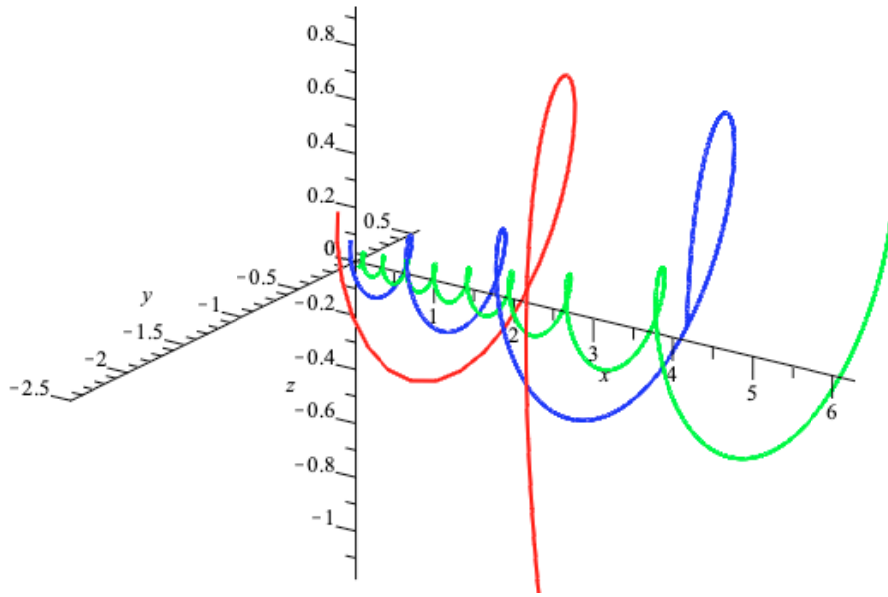


Рис. 2. График профиля струны для инвариантного решения при $I = e^t$, $H = e^{-\frac{x}{2}}$ в три различных момента времени $t = 2$ (красная линия), $t = 3$ (синяя линия), $t = 4$ (зеленая линия); $c_{1,2} = A_2 = 0$, $r_0 = m_2 = 2$, $a_{1,2} = m = m_1 = 1$, $T_2 = 6$ и $A_1 = -\pi$

3. Алгебра $L_c = \langle Z_{1,2,3,4}, X_{1,2,3} \rangle$ имеет структуру $L_c = \langle Z_{2,3,4}, X_3 \rangle \oplus \langle Z_1, X_{1,2} \rangle$, где $C(L_c) = \langle Z_1, X_{1,2} \rangle$ является центром алгебры. Переходя к новому базису:

$$E_1 = \frac{Z_4 - X_3}{4}, E_2 = \frac{Z_3}{4}, E_3 = Z_4 + X_3, E_4 = Z_2 - \frac{l}{2} X_3,$$

получим четырехмерную алгебру обозначенную $A_{3,8} \oplus A_1 = \langle E_1, E_2, E_3 \rangle \oplus \langle E_4 \rangle$ (см. [6]) с центром $\langle E_4 \rangle$. Эта алгебра имеет следующую оптимальную систему неподобных подалгебр

$$\langle E_1 \rangle, \langle E_4 \rangle, \langle E_2 + \gamma_1 E_4 \rangle, \langle E_1 + E_3 + \gamma_2 E_4 \rangle, \langle E_1 + \epsilon E_4 \rangle,$$

где $\gamma_1 \geq 0, \gamma_2 \in \mathbb{R}, \epsilon = \pm 1$. В каждый класс можно добавить элементы центра $C(L_c)$.

Рассмотрим первый класс $\langle E_1 + 4\alpha Z_1 + 4\beta X_1 \rangle$, $\alpha \neq 0$, который дает следующую форму инвариантного решения

$$\begin{aligned} u^1 &= e^{\frac{\beta}{\alpha}x_1} v^1(x_2), \\ u^2 &= \sin \frac{lx_2}{2} \left(\frac{1}{\sin lx_2} - \frac{x_1}{\alpha} - v^3(x_2) \right) v^2(x_2), \\ u^3 &= \cos \frac{lx_2}{2} \left(\frac{x_1}{\alpha} + v^3(x_2) \right) v^2(x_2), \end{aligned}$$

где $v^i(x_2)$ – новые неизвестные функции.

После подстановки этого вида инвариантного решения в систему (9) при $I = a_1, H = a_2$ получаем обыкновенные дифференциальные уравнения

$$v^{1''} - \frac{\beta^2}{\alpha^2 T_1} v^1 = 0, \quad v^{2''} + \frac{l^2}{4} v^2 = 0,$$

с общим решением ($d_{1,2}, c_{1,2} = \text{const}$)

$$\begin{aligned} v^1 &= d_1 e^{\frac{\beta}{\alpha\sqrt{T_1}}x_2} + d_2 e^{-\frac{\beta}{\alpha\sqrt{T_1}}x_2}, \\ v^2 &= c_1 \cos \frac{lx_2}{2} + c_2 \sin \frac{lx_2}{2}. \end{aligned}$$

Для функции v^3 получается уравнение

$$v^{3''} + 2 \frac{v^{2'}}{v^2} v^{3'} - \frac{c_2 l^2}{4 v^2 \cos^3 \frac{lx_2}{2}} = 0,$$

которое имеет общее решение ($k_{1,2} = \text{const}$)

$$v^3 = \frac{k_1}{c_2 \tan \frac{lx_2}{2} + c_1} + \frac{1}{2} \tan \frac{lx_2}{2} + k_2.$$

Окончательно, для исходной системы (9) получаем решение

$$\begin{aligned} u^x &= d_1 e^{\frac{\beta}{\alpha}(t+x/\sqrt{T_1})} + d_2 e^{\frac{\beta}{\alpha}(t-x/\sqrt{T_1})}, \\ u^y &= -\left(\frac{t}{\alpha} + \frac{1}{2} \tan \frac{lx}{2} + k_2\right) \left(\frac{c_1}{2} \sin lx + c_2 \sin^2 \frac{lx}{2}\right) + \\ &\quad \tan \frac{lx}{2} \left(\frac{c_2}{2} - k_1 \cos^2 \frac{lx}{2}\right) + \frac{c_1}{2}, \\ u^z &= \left(\frac{t}{\alpha} + \frac{1}{2} \tan \frac{lx}{2} + k_2\right) \left(c_1 \cos^2 \frac{lx}{2} + \frac{c_2}{2} \sin lx\right) + k_1 \cos^2 \frac{lx}{2}. \end{aligned}$$

Оно может быть использовано, например, для описания колебаний струны с фиксированными концами в $x = 0$ и $x = 2\pi n/l =: L$, $n \in \mathbb{N}$

$$u^{x,y,z}(t, 0) = u^{x,y,z}(t, L) = 0$$

с начальными условиями:

$$u^x(0, x) = 0, \quad u_t^x(0, x) = 0,$$

$$u^y(0, x) = -c_2 \left(\frac{1}{2} \tan \frac{lx}{2} + k_2 \right) \sin^2 \frac{lx}{2} + \frac{c_2}{2} \tan \frac{lx}{2},$$

$$u_t^y(0, x) = -\frac{c_2}{\alpha} \sin^2 \frac{lx}{2},$$

$$u^z(0, x) = \frac{c_2}{2} \left(\frac{1}{2} \tan \frac{lx}{2} + k_2 \right) \sin lx,$$

$$u_t^z(0, x) = \frac{c_2}{2\alpha} \sin lx.$$

Такое решение имеет форму ($c_1 = k_1 = 0$)

$$u^x(t, x) = 0,$$

$$u^y(t, x) = -c_2 \left(\frac{t}{\alpha} + \frac{1}{2} \tan \frac{lx}{2} + k_2 \right) \sin^2 \frac{lx}{2} + \frac{c_2}{2} \tan \frac{lx}{2},$$

$$u^z(t, x) = \frac{c_2}{2} \left(\frac{t}{\alpha} + \frac{1}{2} \tan \frac{lx}{2} + k_2 \right) \sin lx.$$

Три профиля струны показаны на рис. 3 для моментов времени $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ (все другие параметры взяты равными единице).

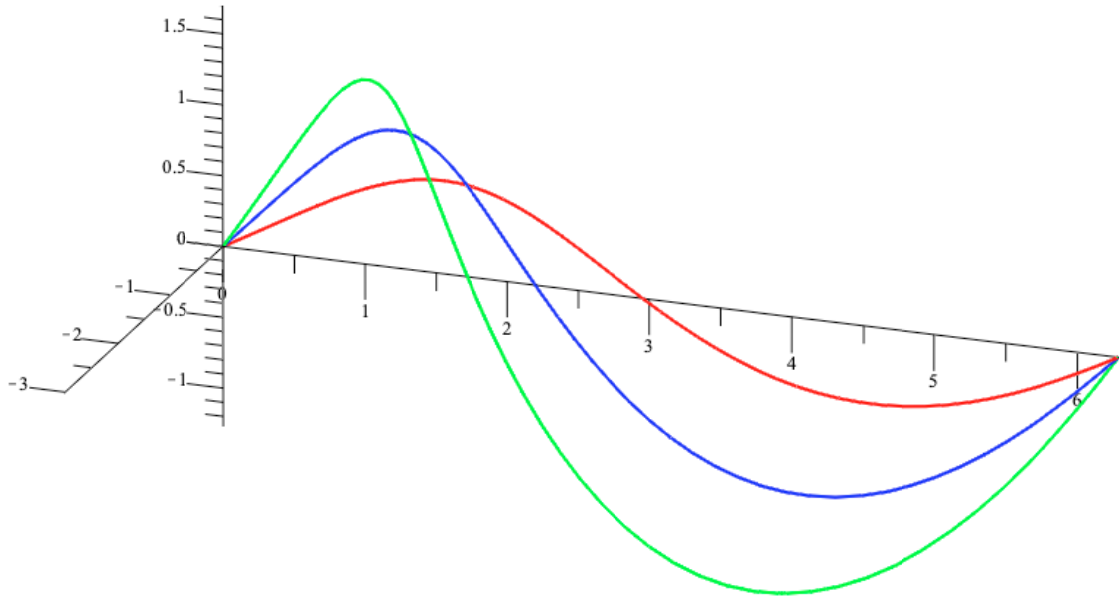


Рис. 3. Графики профиля струны для инвариантного решения с функциями $I = 1$, $H = 1$ при $t = 0$ (красная линия), $t = 1$ (синяя линия), $t = 2$ (зеленая линия)

3. Нелинейный случай

Полагая $H^{x,y,z}(x)/\rho =: H^{1,2,3}$ и принимая во внимание соотношения (5) с $\vec{u} \cdot \nabla H^1(x_2) = u^1(x_1, x_2)H_{x_2}^1(x_2)$, получим нелинейную ($u^1 u_2^3 I H_2^1 \neq 0$) систему:

$$\begin{aligned} u_{11}^1 &= T_1 u_{22}^1 - I H^2 u_2^3, \\ u_{11}^2 &= T_2 u_{22}^2 + I(H^1 + u^1 H_2^1)u_2^3 - I H^3, \\ u_{11}^3 &= T_2 u_{22}^3 + I H^2. \end{aligned} \quad (12)$$

3.1. Симметрии

Алгебра Ли N ядра точечных симметрий системы (12) имеет следующий базис:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_{u^3}, \quad X_2 = x_1 \partial_{u^3}, \\ X_+^h &= f^h(x_1, x_2) \partial_{u^2}, \quad X_+^p = [f^p(x_1, x_2) + u^3] \partial_{u^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $f^h(x_1, x_2)$ является общим решением однородного уравнения

$$f_{11}^h - T_2 f_{22}^h = 0,$$

т. е. $f^h = f(x_2 + x_1 \sqrt{T_2}) + g(x_2 - x_1 \sqrt{T_2})$, а $f^p(x_1, x_2)$ является частным решением неоднородного уравнения

$$f_{11}^p - T_2 f_{22}^p = -I H^2. \quad (14)$$

Смысл соответствующих точечных преобразований довольно прост. Решая уравнения Ли (7) для каждого оператора из (13) получаем преобразования:

$$\bar{u}^2 = u^2 + a_0 f^h + b(u^3 + f^p), \quad \bar{u}^3 = u^3 + a_2 x_1 + a_1,$$

где $a_{0,1,2}$, b являются групповыми параметрами. Эти преобразования не меняют систему (12) и отражают ее внутреннюю структуру. Например, ясно, что функция u^3 определяется с точностью до линейного слагаемого $a_2 x_1 + a_1$.

Имеются также три преобразования эквивалентности, действующие на функции I и $H^{1,2,3}$, а именно:

$$\begin{aligned} \phi_1: \quad \bar{x}_1 &= x_1 + a_1, \quad \phi_1: \bar{x}_2 = x_2 + a_2, \\ \psi: \quad \bar{I} &= cI, \bar{H}^1 = \bar{H}^1/c, \bar{H}^2 = \bar{H}^2/c, \bar{H}^3 = \bar{H}^3/c, c \neq 0, \end{aligned}$$

которые мы будем использовать для того, чтобы сократить число произвольных постоянных в функциях-параметрах.

Расширение ядра происходит в следующих случаях (рассматриваем только функции, для которых $IH_2^1 \neq 0$, чтобы сохранить нелинейность системы (12)):

1. Для функций $I = k^{01}/x_1$, $H^1 = k^{11}x_2 + k^{12}$, $H^2 = k^{21}$ допускается оператор

$$Y_1 = x_1 \partial_{x_1} + x_2 \partial_{x_2} - x_2 \partial_{u^1} + f^1(x_1, x_2) \partial_{u^2} + k^{01} k^{21} x_1 \ln x_1 \partial_{u^3},$$

где k^{01} , k^{11} и k^{21} – ненулевые константы, а функция f^1 – частное решение уравнения

$$f_{11}^1 - T_2 f_{22}^1 = -I(H^3 + x_2 H_2^3). \quad (15)$$

Применяя к H^1 преобразование ϕ_1 с $a_2 = -k^{12}/k^{11}$ получаем $k^{12} = 0$, и действуя преобразованием ψ с $c = 1/k^{21}$ получаем $H^2 = 1$.

Окончательно, для функций $I = k^{01}/x_1$, $H^1 = k^{11}x_2$, $H^2 = 1$ имеем оператор

$$Y_1 = x_1 \partial_{x_1} + x_2 \partial_{x_2} - x_2 \partial_{u^1} + f^1(x_1, x_2) \partial_{u^2} + k^{01} x_1 \ln x_1 \partial_{u^3}$$

с тем же уравнением (15) для функции f^1 .

Далее мы перечислим функции и операторы, упрощенные преобразованиями эквивалентности.

2. Для $I = 1$ и произвольных ненулевых функций $H^{1,2,3}$ ($H^1 \neq \text{const}$) допускается оператор

$$Y_2 = \partial_{x_1}.$$

3. Если I , H^3 — произвольные ненулевые функции, а $H^1 = k^{11}x_2$, $H^2 = 1$, тогда есть дополнительная симметрия

$$Y_3 = \partial_{x_2} - \partial_{u^1} + f^3(x_1, x_2) \partial_{u^2},$$

где f^3 является частным решением уравнения

$$f_{11}^3 - T_2 f_{22}^3 = -IH_2^3.$$

4. Если $H^{2,3}$ – произвольные ненулевые функции и

$$I = \frac{1}{a_1 \cos x_1 + a_2 \sin x_1}, \quad H^1 = b_2 \ln \tan \frac{x_2}{2\sqrt{T_1}} + b_3,$$

где $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, то допускается оператор

$$Y_4 = -\frac{2\sqrt{T_1}T_2}{b_2} (a_1 \cos x_1 + a_2 \sin x_1) \sin \frac{x_2}{\sqrt{T_1}} \partial_{u^1} + (x_2 u^3 + f^4(x_1, x_2)) \partial_{u^2},$$

а f^4 – некоторое решение уравнения

$$f_{11}^4 - T_2 f_{22}^4 = -x_2 I H^2.$$

Отметим, что существует два набора функций-параметров, при которых допускаются одновременно два дополнительных оператора. А именно, для произвольного вида функции H^3 :

- в случае, когда $I = k^{01}/x_1$, $H^1 = k^{11}x_2$ и $H^2 = 1$ имеем алгебру Ли $\langle Y_1, Y_3 \rangle$ с коммутатором $[Y_1, Y_3] = -Y_3$;
- при $I = 1$, $H^1 = k^{11}x_2$, $H^2 = k^{21}$ алгебру точечных симметрий образуют операторы Y_2 , Y_3 и N .

3.2. Инвариантные решения

Далее рассмотрим каждый случай, указанный в предыдущем пункте по отдельности, кроме случая 4, так как оператор Y_4 не содержит производных по независимым переменным и поэтому не дает вид инвариантного решения.

1. Введем новые независимые переменные $J := x_1/x_2$, $s := x_2$, тогда оператор Y_1 примет вид

$$Y_1 = s\partial_s - s\partial_{u^1} + f^1(sJ, s)\partial_{u^2} + k^{01}sJ \ln(sJ) \partial_{u^3}.$$

Ему соответствует вид инвариантного решения

$$\begin{aligned} u^1 &= u(J) - s, \quad u^2 = v(J) + \int \frac{f^1}{s} ds, \\ u^3 &= w(J) + k^{01}sJ(\ln sJ - 1). \end{aligned}$$

Соответствующая фактор-система дифференциальных уравнений выглядит так

$$(1 - T_1 J^2)u'' - 2T_1 J u' - k^{01}w' = 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} (1 - T_2 J^2)v'' - 2T_2 J v' + k^{01}k^{11}uw' &= g(J), \\ (1 - T_2 J^2)w'' - 2T_2 J w' &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} g(J) &:= sT_2 f_2^1 - T_2 sJ f_1^1 - T_2 f^1 - \\ &- (1 - T_2 J^2) \int f_{11}^1 s ds + 2T_2 J \int f_1^1 ds - k^{01} \frac{s}{J} H^3. \end{aligned}$$

Из (17) получаем ($\tau_{1,2} := \sqrt{T_{1,2}}$)

$$w = c_1 \ln \left| \frac{1 + \tau_2 J}{1 - \tau_2 J} \right| + c_2,$$

тогда (16) принимает вид

$$(1 - \tau_1^2 J^2)u'' - 2\tau_1^2 J u' = ((1 - \tau_1^2 J^2)u')' = k^{01}w'.$$

Понижая порядок указанного выше уравнения, получаем

$$u' = \frac{k^{01}w + c_3}{1 - \tau_1^2 J^2},$$

следовательно

$$u(J) = c_1 k^{01} \int \ln \left| \frac{1 + \tau_2 J}{1 - \tau_2 J} \right| \frac{dJ}{1 - \tau_1^2 J^2} + (k^{01} c_2 + c_3) \ln \left| \frac{1 + \tau_1 J}{1 - \tau_1 J} \right| + c_4.$$

Принимая во внимание, что (здесь $\text{Li}_2 x$ обозначает функцию дилогарифма, $ax + b > 0$)

$$\int \frac{\ln(ax + b)}{x + c} = \begin{cases} \ln(ax + b) \ln Z + \text{Li}_2(1 - Z), \\ \ln(-Z) \ln(b - ac) - \text{Li}_2 Z, \text{ при } a(x + c) > 0, ac - b < 0 \end{cases}$$

где $Z = a(x + c)/(ac - b)$, получаем, например, для $|J| < 1/\tau_1$

$$\begin{aligned} \int \frac{dJ}{1 - \tau_1^2 J^2} \ln \frac{1 + \tau_2 J}{1 - \tau_2 J} &= \frac{-1}{2\tau_1} [\ln(1 + \tau_2 J) \ln Z_+^- + \ln(1 - \tau_2 J) \ln Z_+^+ + \\ &+ \ln \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \ln(1 - \tau_1^2 J^2) + \text{Li}_2(1 - Z_+^-) + \text{Li}_2(1 - Z_+^+) + \\ &+ \text{Li}_2(-Z_-^-) + \text{Li}_2(-Z_-^+)], \end{aligned}$$

где

$$Z_{\pm}^{\pm} := \tau_2 \frac{1 \pm \tau_1 J}{\tau_1 \pm \tau_2}.$$

Окончательно, функция v выражается в квадратурах

$$v = \int \frac{\int (g - k^{01} k^{11} u w') dJ + c_5}{1 - T_2 J^2} dJ + c_6.$$

Для упрощения указанного выше выражения, положим $H^3 = 1 = H^2$, тогда уравнение (15) совпадает с (14) и $f^1 = f^p$. Рассматривая оператор

$$\tilde{Y}_1 := Y_1 - X_+^p = s \partial_s - s \partial_{u^1} - u^3 \partial_{u^2} + k^{01} s J \ln(sJ) \partial_{u^3}$$

можно упростить вид инвариантного решения для u^2

$$u^2 = v(J) - k^{01} s J (\ln s J - 2) - w(J) \ln s,$$

тогда уравнение на функцию v принимает вид

$$((1 - T_2 J^2) v')' = T_2 (w + 2J w') - k^{01} k^{11} u w'$$

и имеет следующее решение:

$$v = T_2 \int \frac{\int (w + 2Jw')dJ}{1 - T_2 J^2} dJ - k^{01} k^{11} \int \frac{\int uw'dJ}{1 - T_2 J^2} dJ.$$

2. Для оператора Y_2 переменная x_2 является инвариантом, поэтому подалгебра $\langle Y_2 \rangle$ определяет статические решения. А именно, полагая $u^1 = u(x_2)$, $u^2 = v(x_2)$, $u^3 = w(x_2)$, $I = 1$, $uv'H_2^1 \neq 0$ получим фактор-систему

$$\begin{aligned} T_1 u'' &= H^2 w', & T_2 w'' &= -H^2, \\ T_2 v'' &= H^3 - (H^1 + uH^{1'})w' = 0, \end{aligned}$$

и функции u , v , w могут быть выражены в квадратурах.

Например, если $H^i = a_i \sin x_2 + b_i \cos x_2$, где

$$a_1 = b_1 = -4\sqrt{2}T_2, \quad a_2 = b_2 = 2\sqrt{2}T_2, \quad a_3 = T_2, \quad b_3 = 0$$

и $T_1 = 2T_2$, получим периодическое ограниченное статическое решение

$$u^x = -\cos 2x, \quad u^y = -\frac{1}{2} \sin 4x - \sin x, \quad u^z = 2\sqrt{2}(\cos x + \sin x),$$

показанное на рис. 4 для $x \in [0, 4\pi]$.

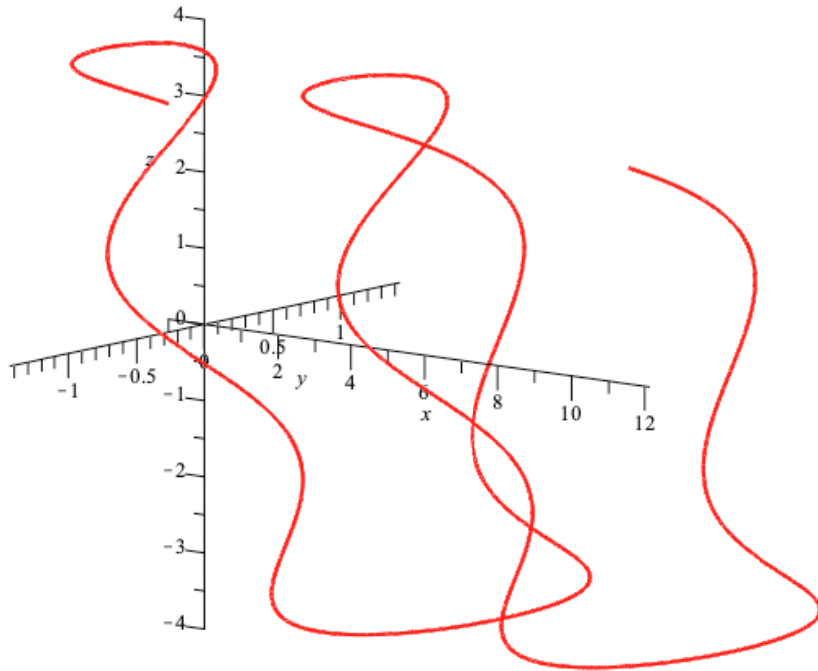


Рис. 4. График струны для статического решения

3. Рассмотрим абелеву алгебру $\langle Y_3, X_1, X_2 \rangle$. Ее оптимальная система неподобных подалгебр выглядит следующим образом:

$$\langle Y_3 \rangle, \quad \langle X_1 + \gamma_1 Y_3 \rangle, \quad \langle X_2 + \gamma_1 Y_3 + \gamma_2 X_1 \rangle.$$

Подалгебра $\langle Y_3 \rangle$ дает вид инвариантного решения $u^3 = u^3(x_1)$, которое не удовлетворяет условию нелинейности системы $u_2^3 \neq 0$.

Рассматривая вторую подалгебру $\langle X_1 + \gamma_1 Y_3 \rangle$, $\gamma_1 \neq 0$ получим

$$u^1 = u(x_1) - x_2, \quad u^2 = v(x_1) + \int f^3 dx_2, \quad u^3 = w(x_1) + \frac{x_2}{\gamma_1},$$

с неизвестными функциями u , v , w . Фактор-система принимает вид

$$\begin{aligned} u'' + \frac{1}{\gamma_1} I &= 0, \quad w'' - I = 0, \\ v'' + h(x_1) + \frac{k^{11}}{\gamma_1^2} I \iint I dx_1 dx_1 &= 0, \end{aligned}$$

где

$$h(x_1) := \int f_{11}^3 dx_2 - T_2 f_2^3 + I H^3.$$

Окончательно,

$$\begin{aligned} u^1 &= -x_2 - \frac{1}{\gamma_1} \iint I dx_1 dx_1, \\ u^2 &= \int f^3 dx_2 - \frac{k^{11}}{\gamma_1^2} \iint \left(I \iint I dx_1 dx_1 \right) dx_1 dx_1 - \iint h(x_1) dx_1 dx_1, \\ u^3 &= \frac{x_2}{\gamma_1} + \iint I dx_1 dx_1. \end{aligned}$$

Отметим, что в этом случае струна колеблется в плоскости, параллельной uz -плоскости, поскольку x -компонента точки P^1 не зависит от x .

4. Выводы

В представленной работе, с точки зрения классического группового анализа, была проанализирована система дифференциальных уравнений, описывающая колебания упругой струны с электрическим током в стационарном магнитном поле. Были рассмотрены два специальных случая системы: линейный и нелинейный.

В обоих случаях вычислены алгебры Ли точечных симметрий и описаны спецификации функций-параметров, при которых допускаются дополнительные симметрии.

Для каждой спецификации были построены инвариантные решения (по крайней мере, выраженные в квадратурах), для некоторых решений дана механическая интерпретация.

References

1. Kourmychev E. V. Aspectos físicos y matemáticos del movimiento ondulatorio. Universidad de Sonora, México, 1997.
2. CRC handbook of Lie group analysis of differential equations. Vol. 1. Symmetries, exact solutions and conservation laws / W. F. Ames, R. L. Anderson, Dorodnitsyn et al. // CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.
3. Meleshko S. V. Methods for constructing exact solutions of partial differential equations: mathematical and analytical techniques with applications to engineering. Springer, 2005.
4. Olver P. J. Application of Lie groups to differential equations. Springer-Verlag New York, 1993.
5. Ovsyannikov L. V. Group analysis of differential equations. Academic Press, New York, 1982.
6. Patera J. and Winternitz P. Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras. *J. Math. Phys.* **18**, (7) (1977).

© Курмичев Е., Пиньюэлас Кастро Л. М.,
Яхно А. Н., Яхно Л. В., 2019

МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ УСЛОВИЙ ПРОЧНОСТИ В РАСЧЕТАХ КОНСТРУКЦИЙ С НЕОДНОРОДНОЙ РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРОЙ

А. Д. Матвеев

Институт вычислительного моделирования СО РАН – обособленное
подразделение Федерального исследовательского центра КНЦ СО РАН
Российская Федерация, 660036, г. Красноярск, Академгородок, 50/44
E-mail: mtv241@mail.ru

Пластины, балки и оболочки с неоднородной регулярной структурой широко применяются в авиационной и ракетно-космической технике. На этапе эскизного проектирования первоначально важно знать, удовлетворяет ли коэффициент запаса конструкции заданным условиям прочности. Для определения коэффициента запаса необходимо решить по методу конечных элементов (МКЭ) задачу упругости для проектируемой конструкции с учетом ее неоднородной структуры, что требует больших ресурсов ЭВМ. Предложен метод эквивалентных условий прочности для расчета на статическую прочность упругих конструкций с неоднородной регулярной структурой. В основе предлагаемого метода лежит утверждение. Для всякого композитного тела V_0 существует такое изотропное однородное тело V^b и такое число r (коэффициент эквивалентности), что если коэффициент запаса n_b^0 тела V^b удовлетворяет эквивалентным условиям прочности $rn_1 \leq n_b^0 \leq rn_2$, то коэффициент запаса n_0 тела V_0 удовлетворяет заданным условиям прочности $n_1 \leq n_0 \leq n_2$, и наоборот, n_1, n_2 – заданы, коэффициенты n_b^0, n_0 отвечают точным решениям задач упругости, построенных для тел V^b и V_0 . Рассматриваемый метод сводится к расчету на прочность по МКЭ изотропных однородных тел, который наиболее простой в реализации и требует меньше памяти ЭВМ, чем аналогичный расчет композитных тел с учетом их неоднородной структуры. Изложена процедура определения коэффициентов эквивалентности r для ряда композитных пластин, балок и оболочек вращения. При построении упругих решений по МКЭ для изотропных однородных тел применяются высокоточные многосеточные конечные элементы, порождающие дискретные модели малой размерности и решения с малой погрешностью. Скорректированные эквивалентные условия прочности имеют вид $rn_1(1 + \varepsilon_1) \leq n_b \leq rn_2(1 - \varepsilon_2)$, где n_b – коэффициент запаса тела V^b и величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ отвечают приближенному решению, построенному

для тела V^b . Реализация МКЭ для многосеточных дискретных моделей требует меньше ресурсов ЭВМ, чем для базовых. Приведен пример расчета балки регулярной волокнистой структуры.

Ключевые слова: упругость, композиты, эквивалентные условия прочности, многосеточные конечные элементы, пластины, балки, оболочки.

METHOD OF EQUIVALENT STRENGTH CONDITIONS IN CALCULATIONS OF CONSTRUCTIONS WITH INHOMOGENEOUS REGULAR STRUCTURE

A. D. Matveev

Institute of Computational Modelling of Siberian Branch of RAS
50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation
E-mail: mtv241@mail.ru

Plates, beams and shells with non-uniform regular structure are widely used in aviation and rocket and space technology. At the preliminary design stage, it is initially important to know whether the design safety factor meets the specified strength conditions. To determine the margin factor, it is necessary to solve the elasticity problem for the designed structure by the finite element method (FEM), taking into account its inhomogeneous structure, which requires large computer resources. In this paper, we propose a method of equivalent strength conditions for calculating the static strength of elastic structures with a inhomogeneous regular structure. The proposed method is based on the statement. For any composite body V_0 , there exists such an isotropic homogeneous body V^b and such a number p (equivalence coefficient) that if the body V^b stock coefficient satisfies n_b^0 the equivalent strength conditions $pn_1 \leq n_b^0 \leq pn_2$, then the body V_0 stock coefficient satisfies n_0 the given strength conditions $n_1 \leq n_0 \leq n_2$, and Vice versa, n_1, n_2 – given, the coefficients n_b^0, n_0 , meet the exact solutions of elasticity problems constructed for bodies V_0, V^b . The method under consideration is reduced to the FEM strength calculation of isotropic homogeneous bodies, which is the easiest to implement and requires less computer memory than a similar calculation of composite bodies taking into account their inhomogeneous structure. The procedure for determining the equivalence coefficients for a number of composite plates, beams and shells of rotation is described. High-precision multigrid finite elements generating discrete models of small dimension and solutions with small error are used in the construction of elastic solutions according to FEM for isotropic homogeneous bodies. The adjusted equivalent strength conditions are of the

form $pn_1(1+\varepsilon_1) \leq n_b \leq pn_2(1-\varepsilon_2)$, where n_b is the body V^b reserve coefficient and the values $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ correspond to the approximate solution constructed for the body V^b . Implementation of FEM for multigrid discrete models requires less computer resources than for basic models. An example of calculating a beam with an inhomogeneous regular structure is given.

Keywords: elasticity, composites, equivalent strength conditions, multigrid finite elements, plates, beams, shells.

Введение

Расчет на прочность конструкции является одним из важнейших на этапе эскизного проектирования [1], которое является технико-экономическим обоснованием проекта конструкции. Как правило, расчет на прочность конструкций проводится по запасам прочности [1–3]. Согласно этому расчету для коэффициента запаса n_0 проектируемой конструкции V_0 заданные условия прочности имеют вид

$$n_1 \leq n_0 \leq n_2, \quad (1)$$

где n_1, n_2 – заданы, $n_1 > 1$.

На этапе эскизного проектирования конструктору в первую очередь важно знать, удовлетворяет или не удовлетворяет коэффициент запаса n_0 проектируемой конструкции V_0 заданным условиям прочности (1). Если коэффициент n_0 удовлетворяет заданным условиям прочности, то считают, что конструкция V_0 не разрушается при заданных условиях эксплуатации. Следует отметить, что в этом случае нет необходимости детально исследовать напряженно-деформированное состояние (НДС) конструкции V_0 . Расчет на прочность конструкции V_0 сводится к нахождению ее коэффициента запаса n_0 и проверке условий прочности (1) для коэффициента n_0 . Коэффициент запаса n_0 определяют по формуле $n_0 = \sigma_T / \sigma_0$ [1–3], где σ_T – предельное напряжение конструкции V_0 (предел текучести [3]), σ_0 – максимальное эквивалентное напряжение конструкции V_0 . Отметим, что коэффициент запаса n_0 отвечает точному решению задачи упругости, сформулированной для конструкции V_0 . Если максимальные эквивалентные напряжения конструкций определяются приближенно, то в этом случае используются скорректированные условия прочности [4]. При анализе НДС композитных конструкций широко используют метод конечных элементов (МКЭ) [5–8]. Базовые дискретные модели композитных конструкций, которые состоят из конечных элементов (КЭ) 1-го порядка и учитывают их структуры в рамках микроподхода [9], имеют очень высокую размерность, что порождает трудности при реализации МКЭ на ЭВМ.

Для таких моделей эффективно используется метод многосеточных конечных элементов (ММКЭ) [10–12], в котором используются многосеточные конечные элементы (МнКЭ). Следует отметить, МКЭ есть частный случай ММКЭ. Следует отметить, что если при решении краевых задач по МКЭ используются МнКЭ, то в этом случае по сути реализуется ММКЭ.

Для практики важно знать погрешность приближенного решения, которое используется в расчетах. Показано, что оценить погрешность приближенных решений можно тогда, когда они мало отличаются друг от друга и при этом образуют последовательность решений, которая быстро сходится к точному решению. При построении таких последовательностей применяется процедура измельчения исходного разбиения области тела на КЭ. Процедура измельчения разбиений, построенных для микронеоднородной (волокнуистой) структуры, сложная и труднореализуема. Так как волокна имеют малую толщину, то измельчение таких разбиений приводит к резкому увеличению размерностей дискретных моделей. Реализация МКЭ для таких моделей требует больших ресурсов ЭВМ. Кроме того, на закон измельчения накладываются определенные ограничения, связанные с тем, что на каждом шаге измельчения разбиений необходимо учитывать микронеоднородную структуру в рамках микроподхода. Как известно, процедура измельчения, применяемая для дискретных моделей однородных изотропных тел, наиболее простая в реализации и требует меньше памяти ЭВМ, чем для тел с микронеоднородной структурой (с учетом их структуры). В данной работе предложен метод эквивалентных условий прочности для статического расчета на прочность линейно упругой конструкции V_0 с микронеоднородной регулярной структурой, состоящей из пластичных материалов. Для простоты изложения считаем, что тело V_0 имеет волокнуистую структуру. Показано, что расчет на прочность композитного тела V_0 сводится к расчету на прочность (с помощью МКЭ) изотропного однородного тела V^b . Тела V_0 , V^b имеют одинаковые форму, размеры, закрепление и нагружение. Модули упругости тела V^b и волокна совпадают. В расчетах применяются скорректированные эквивалентные условия прочности вида

$$pn_1(1 + \varepsilon_1) \leq n_b \leq pn_2(1 - \varepsilon_2), \quad (2)$$

где $\varepsilon_1 = 1 / (1 - \delta_p) - 1$; $\varepsilon_2 = 1 - 1 / (1 + \delta_p)$; p – коэффициент эквивалентности; n_b – коэффициент запаса тела V^b ; $n_b = \sigma_T / \sigma^b$; σ_T – предел текучести волокна; σ^b – максимальное эквивалентное напряжение тела V^b (определяемое с помощью МКЭ); δ_p – погрешность для напряжения σ^b , $0 \leq \delta_p < 1$.

Показано, что если коэффициент запаса n_b изотропного однородного тела V^b удовлетворяет скорректированным эквивалентным условиям

прочности (2), то коэффициент запаса n_0 композитного тела V_0 (отвечающий точному решению задачи упругости) удовлетворяет заданным условиям прочности (1). Таким образом, реализация предлагаемого метода сводится к построению скорректированных эквивалентных условий прочности (2) и нахождению коэффициента запаса n_b тела V^b , т. е. к определению коэффициента эквивалентности p и к нахождению с помощью МКЭ максимального эквивалентного напряжения σ^b для тела V^b (с погрешностью δ_p). Коэффициент эквивалентности p находим по формуле $p = \sigma_0 / \sigma^b$, где σ_0 – максимальное эквивалентное напряжение тела V_0 . Для нахождения напряжений σ_0 для композитного тела V_0 и σ^b для изотропного однородного тела V^b определяем по МКЭ с применением МнКЭ последовательности решений, которые быстро сходятся к точным, что дает возможность оценить погрешность полученных приближенных решений.

Достоинства предлагаемого метода состоят в следующем. В расчетах используем изотропные однородные конструкции, которые имеют такие же формы и размеры, закрепления и нагружения, как композитные конструкции. При анализе НДС изотропных однородных конструкций по МКЭ применяются МнКЭ, которые позволяют строить последовательности решений быстросходящиеся к точным. МнКЭ для изотропных однородных конструкций порождают дискретные модели малой размерности и приближенные решения с малой погрешностью. Реализация МКЭ для таких дискретных моделей требует малых ресурсов ЭВМ.

1. Основные положения для конструкций

В работе рассматриваются трехмерные конструкции (тела), для которых выполняются следующие условия.

Положение 1. Рассматриваются в декартовых системах координат трехмерные линейно упругие изотропные однородные и композитные тела (конструкции), которые состоят из пластичных материалов, имеют гладкие границы, статические нагружения и одинаковые условия эксплуатации. Функции нагружений тел являются гладкими функциями. Тела имеют границы закрепления, которые не вырождаются в точки. Композитные тела состоят из разномодульных изотропных однородных тел, связи между которыми идеальны, т. е. на общих границах разномодульных однородных тел функции перемещений и напряжений являются непрерывными. Перемещения, деформации и напряжения разномодульных тел отвечают соотношениям Коши и закону Гука трехмерной линейной задачи теории упругости [13]. Эквивалентные напряжения для упругих тел определяются по 4-й теории прочности [1].

2. Эквивалентные условия прочности и эквивалентные по прочности конструкции, выраженные через коэффициенты запаса

Пусть две упругие конструкции V_1 и V_2 имеют одинаковые форму, геометрические размеры, закрепления и статические нагрузки, но отличаются модулями упругости. Пусть для коэффициентов запаса n_1 , n_2 соответственно конструкций V_1 , V_2 заданы условия прочности

$$n_a^1 \leq n_1 \leq n_b^1, \quad (3)$$

$$n_a^2 \leq n_2 \leq n_b^2, \quad (4)$$

где $n_a^1, n_b^1 > 1$; $n_a^2, n_b^2, n_a^1, n_b^1$ – заданы; коэффициент n_1 (n_2) отвечает точному решению задачи упругости, сформулированной для конструкций V_1 (V_2).

Для конструкций V_1 , V_2 введем следующие два определения.

Определение 1. Если из выполнения условий (4) для коэффициента n_2 следует выполнение условий (3) для коэффициента n_1 и наоборот, если из выполнения условий (3) для коэффициента n_1 следует выполнение условий (4) для коэффициента n_2 , тогда условия прочности (3), (4) будем называть эквивалентными условиями прочности соответственно для конструкций V_1 , V_2 .

Определение 2. Пусть конструкции V_1 , V_2 , для которых соответственно условия (3), (4) являются эквивалентными условиями прочности, не разрушаются при одинаковых условиях эксплуатации. Тогда конструкции V_1 , V_2 будем называть эквивалентными по прочности.

На практике эквивалентность по прочности конструкций V_1 , V_2 означает, что вместо работающей конструкции V_1 можно использовать конструкцию V_2 , и наоборот. Отметим, что из двух эквивалентных по прочности конструкций целесообразно использовать в работе такую конструкцию, которая более технологична в изготовлении, отвечает заданным техническим требованиям и требует меньше финансовых затрат на изготовление и эксплуатацию.

3. Теорема о существовании эквивалентных условий прочности

Рассмотрим теорему, в которой доказывается существование эквивалентных условий прочности для упругих композитных конструкций (тел).

Теорема 1. Пусть на трехмерное линейно упругое композитное тело V_0 (расположенное в декартовой системе координат $Oxyz$) действуют заданные статические поверхностные силы $\mathbf{q}$, т. е. силы, действующие

на незакрепленной части границы S_q тела V_0 , и объемные силы $\mathbf{p}$, где $\mathbf{q} = \{q_x, q_y, q_z\}^T$, $\mathbf{p} = \{p_x, p_y, p_z\}^T$; $q_x, q_y, q_z, p_x, p_y, p_z$ – гладкие функции координат x, y, z . На границе S_u тела V_0 жестко закреплена, т. е. на S_u : $u = v = w = 0$, $S_0 = S_u + S_q$, S_0 – гладкая граница тела V_0 . Тело V_0 состоит из компонент V_i , т. е. из пластичных разномодульных изотропных однородных тел V_i , где $i = 1, \dots, N$, N – общее число тел V_i тела V_0 . Пусть максимальное эквивалентное напряжение композитного тела V_0 возникает в теле V_α , $1 \leq \alpha \leq N$. Пусть для коэффициента запаса n_0 композитного тела V_0 (который отвечает точному решению задачи упругости для тела V_0) заданы условия прочности

$$n_1 \leq n_0 \leq n_2, \quad (5)$$

где n_1, n_2 – заданы, $n_1 > 1$.

Тогда существуют такое трехмерное упругое изотропное однородное тело V^b и такие числа n_1^p, n_2^p , что если коэффициент запаса n_b^0 тела V^b (отвечающий точному решению задачи упругости для тела V^b) удовлетворяет эквивалентным условиям прочности вида

$$n_1^p \leq n_b^0 \leq n_2^p, \quad (6)$$

то коэффициент запаса n_0 композитного тела V_0 удовлетворяет условиям прочности (5), и наоборот. Если коэффициента запаса n_0 композитного тела V_0 удовлетворяет условиям (5), то коэффициент запаса n_b^0 изотропного однородного тела V^b удовлетворяет условиям (6), причем, между коэффициентами запаса n_0, n_b^0 существует взаимно однозначная связь.

Доказательство. Пусть однородное изотропное тело V^b и композитное тело V_0 имеют одинаковые форму, размеры, закрепления и нагружения, но отличаются модулями упругости. Пусть модули упругости тела V^b равны модулям упругости тела V_α композитного тела V_0 , $1 \leq \alpha \leq N$. Коэффициенты запаса n_0, n_b^0 находим по формулам [1–3]:

$$n_0 = \sigma_T / \sigma_0, \quad (7)$$

$$n_b^0 = \sigma_T / \sigma_b^0, \quad (8)$$

где σ_T – предел текучести тела V_α [3]; σ_0, σ_b^0 – максимальные эквивалентные напряжения, возникающие соответственно в телах V_0, V^b и отвечающие точным решениям задач упругости.

Пусть коэффициент n_0 удовлетворяет условиям прочности (5). Тогда подставляя (7) в (5) получим неравенства

$$n_1 \leq \frac{\sigma_T}{\sigma_0} \leq n_2. \quad (9)$$

Существует такое число p (коэффициент эквивалентности), что

$$p = \sigma_0 / \sigma_b^0. \quad (10)$$

Учитывая (10) в (9), имеем

$$pn_1 \leq \frac{\sigma_T}{\sigma_b^0} \leq pn_2. \quad (11)$$

Используя (8) в (11), получаем

$$pn_1 \leq n_b^0 \leq pn_2. \quad (12)$$

Существуют такие числа n_1^p, n_2^p , что

$$n_1^p = pn_1, n_2^p = pn_2. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), получаем, что для коэффициента n_b^0 выполняются условия (6). Итак, существуют такие числа n_1^p, n_2^p , что коэффициент запаса n_b^0 изотропного однородного тела V^b удовлетворяет условиям (6).

Обратно, пусть коэффициент запаса n_b^0 тела V^b удовлетворяет условиям прочности (6). Подставляя (8) в (6) и учитывая (10), (13), получим

$$pn_1 \leq \frac{p\sigma_T}{\sigma_0} \leq pn_2.$$

Откуда с учетом (7) следует выполнение для коэффициента запаса n_0 композитного тела V_0 условий прочности (5). Итак, показано, что всякому коэффициенту $n_b \in (n_1^p, n_2^p)$ соответствует единственный коэффициент $n_0 \in (n_1, n_2)$, найденный по формуле (7), и наоборот, всякому коэффициенту $n_0 \in (n_1, n_2)$ соответствует единственный коэффициент $n_b^0 \in (n_1^p, n_2^p)$, отвечающий формуле (8). Рассмотрим предельные случаи. Пусть $n_b^0 = n_1^p$. Используя соотношения (8), (13), (10) в последнем равенстве, получаем $p\sigma_T / \sigma_0 = pn_1$. Откуда с учетом (7) следует $n_0 = n_1$. Аналогично можно показать, что если $n_b^0 = n_2^p$, то $n_0 = n_2$. Пусть $n_0 = n_1$. Используя (7), (10) в последнем равенстве, получаем $\sigma_T / \sigma_b^0 = pn_1$. Откуда с учетом (8), (13) вытекает $n_b^0 = n_1^p$. Аналогично можно показать, что если $n_0 = n_2$, то $n_b^0 = n_2^p$. Таким образом, между коэффициентами запаса n_0 и n_b^0 существует взаимно однозначная связь. Теорема 1 доказана.

Эквивалентные условия прочности (6) можно представить через коэффициент эквивалентности p в виде $pn_1 \leq n_b^0 \leq pn_2$, построение которых сводится к нахождению коэффициента p .

Отметим, что условия (5), (6) являются эквивалентными условиями прочности соответственно для тел (конструкций) V_0 , V^b (см. определение 1). Считают, что если n_0 удовлетворяет заданным условиям прочности (5), то конструкция V_0 не разрушается при эксплуатации. Пусть конструкция V^b не разрушается при эксплуатации. Тогда конструкции V_0 , V^b являются эквивалентными по прочности (см. определение 2).

Итак, доказано существование эквивалентных условий прочности для композитных тел (конструкций), имеющих любую структуру, форму, любые размеры, статические нагрузки и закрепления, которые отвечают выше сформулированному положению 1 и условиям теоремы 1. Следует отметить, что для всякой композитной конструкции V_0 всегда можно построить изотропную однородную конструкцию V^b , т. е. всегда для конструкции V^b можно задать по определенным правилам форму, размеры, нагрузку, закрепление и модули упругости. Однако в общем случае, эквивалентные условия прочности для изотропной однородной конструкции V^b можно построить лишь только для заданных усилий $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$, что непрактично. Это связано с тем, что напряжения σ_0 , σ_b^0 и p отвечают заданному нагружению $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ конструкций V^b , V_0 (см. формулы (10), (13)).

Замечание 1. Пусть найдено значение p и максимальное эквивалентное напряжение σ_b^0 конструкции V^b . Тогда для конструкции V_0 по формуле (10) определяем максимальное эквивалентное напряжение σ_0 , т. е. $\sigma_0 = p\sigma_b^0$, и затем по формуле (7) вычисляем коэффициент запаса прочности n_0 , т. е. $n_0 = \sigma_t / (p\sigma_b^0)$, что важно знать при проектировании конструкции V_0 .

4. Скорректированные условия прочности, учитывающие погрешность напряжений

В общем случае (например, для тел сложной формы) построить аналитические решения трехмерной задачи теории упругости очень трудно. Однако, с помощью МКЭ [5–8] и ММКЭ [10–12] можно построить приближенные решения задач теории упругости с заданной погрешностью для напряжений. Следует отметить, что при проектировании ряда конструкций (например, конструкций минимального веса) нарушение заданных условий прочности (5), т. е. эквивалентных условий прочности (6), недопустимо. Эквивалентные условия прочности (6) не учитывают погрешность приближенных решений, что порождает трудности при их выполнении.

Пусть для коэффициента запаса упругой конструкции V^b заданы условия прочности вида

$$n_1^p \leq n_b^0 \leq n_2^p, \quad (14)$$

где n_1^p , n_2^p – заданы; n_b^0 – коэффициент запаса прочности конструкции V^b , отвечающий точному решению трехмерной задачи упругости (сформулированной для данной конструкции).

В теореме 2 сформулированы скорректированные условия прочности, учитывающие погрешность приближенных решений. Для удобства и непрерывности изложения в теореме 2 используются обозначения, введенные в теореме 1.

Теорема 2. Пусть для упругой конструкции V^b заданы условия прочности (14) и определено максимальное эквивалентное напряжение σ_b , отвечающее приближенному решению задачи упругости. Пусть

$$|\delta| \leq \delta_p < C_p = \frac{\Delta n}{n_1^p + n_2^p}, \quad (15)$$

где $\Delta n = |n_2^p - n_1^p|$, n_1^p , n_2^p – заданы; δ – относительная погрешность для напряжения σ_b , т. е.

$$\delta = \frac{\sigma_b - \sigma_b^0}{\sigma_b^0}, \quad (16)$$

где σ_b^0 – максимальное эквивалентное напряжение конструкции V^b , отвечающее точному решению задачи упругости, напряжения σ_b^0 , σ_b определяются по 4-й теории прочности, δ_p – оценка для погрешности δ .

Пусть коэффициент запаса n_b конструкции, отвечающий приближенному решению, удовлетворяет скорректированным условиям прочности вида

$$\frac{n_1^p}{1 - \delta_p} \leq n_b \leq \frac{n_2^p}{1 + \delta_p}, \quad (17)$$

где $n_b = \sigma_T / \sigma_b$, σ_T – предел текучести.

Тогда коэффициент запаса n_b^0 конструкции, отвечающий точному решению, удовлетворяет заданным условиям прочности (14), где $n_b^0 = \sigma_T / \sigma_b^0$.

Доказательство. Из (16) следует $\sigma_b = (1 + \delta) \sigma_b^0$. Отсюда получаем

$$n_b^0 = (1 + \delta) n_b. \quad (18)$$

Отметим, что в (15) $C_p < 1$. Пусть δ_0 такое, что $\delta_0 = |\delta|$. Тогда в силу (15) имеем соотношения

$$0 \leq \delta_0 = |\delta| \leq \delta_p < 1. \quad (19)$$

Принимая в (18) последовательно $\delta = -\delta_0$, $\delta = \delta_0$, введем коэффициенты

$$n_1^r = (1 - \delta_0)n_b, \quad n_2^r = (1 + \delta_0)n_b, \quad (20)$$

Тогда в силу (18), (20) получаем

$$n_b^0 = n_1^r \quad \text{или} \quad n_b^0 = n_2^r. \quad (21)$$

Введем коэффициенты n_1^d, n_2^d по формулам

$$n_1^d = (1 - \delta_p)n_b, \quad n_2^d = (1 + \delta_p)n_b. \quad (22)$$

В силу, что $0 \leq \delta_g < 1, n_b > 0$, из (22) следует

$$n_2^d \geq n_1^d. \quad (23)$$

Пусть для коэффициента n_b выполняются условия прочности (17), т. е. пусть

$$n_1^p \leq (1 - \delta_p)n_b, \quad (1 + \delta_p)n_b \leq n_2^p.$$

Тогда для коэффициентов n_1^d, n_2^d с учетом (23) выполняются неравенства

$$n_1^p \leq n_1^d \leq n_2^d \leq n_2^p. \quad (24)$$

Из сравнения (20), (22) с учетом (19), следуют неравенства

$$n_1^d \leq n_1^r, \quad n_2^r \leq n_2^d.$$

Отсюда, учитывая, что согласно (19) $n_1^r \leq n_2^r$, получаем

$$n_1^d \leq n_1^r \leq n_2^r \leq n_2^d. \quad (25)$$

Тогда в силу (24), (25) выполняются неравенства

$$n_1^p \leq n_1^r \leq n_2^r \leq n_2^p. \quad (26)$$

Из выполнения (26) с учетом (21) следует выполнение заданных условий прочности (14) для коэффициента запаса n_b^0 . Ограничения на параметр δ_p находим из предположения существования условий прочности (17), т. е. пусть

$$\frac{n_1^p}{1 - \delta_p} \leq \frac{n_2^p}{1 + \delta_p}. \quad (27)$$

Откуда следует

$$\delta_p \leq C_p = \frac{\Delta n}{n_1^p + n_2^p}. \quad (28)$$

Отметим, что поскольку $n_2^p > n_1^p \geq 1$, то из (28) следует $0 < C_p < 1$. Если $\delta_p = C_p$, то диапазон для варьирования значений коэффициента n_b равен нулю, т. е. в этом случае $n_b = (n_1^p + n_2^p) / 2$, что трудно выполнить

на практике при заданных n_1^p, n_2^p . Итак, при $\delta_p < C_p$ возможно выполнение заданных условий прочности (14) для коэффициента n_b^0 с применением скорректированных условий прочности (17) и приближенного решения, которое порождает для напряжения σ_b такую погрешность δ , что $|\delta| \leq \delta_p$. Теорема 2 доказана.

5. Скорректированные эквивалентные условия прочности, учитывающие погрешность напряжений

На практике для решения задач теории упругости, сформулированных для трехмерных композитных конструкций, применяются численные методы, например, ММКЭ [10–12], которые порождают решения с малой погрешностью. В связи с этим возникает необходимость учитывать погрешность решений в эквивалентных условиях прочности. В работе [14] рассматриваются эквивалентные условия прочности без учета погрешности приближенных решений. Используя результаты работы [4], и на основе теорем 1, 2 сформулируем скорректированные эквивалентные условия прочности, которые учитывают погрешность решений. Скорректированные эквивалентные условия прочности отражает следующая теорема, в которой используются обозначения, введенные в теоремах 1, 2.

Теорема 3. Пусть для коэффициента запаса упругой изотропной однородной конструкции V^b определены эквивалентные условия прочности вида

$$n_1^p \leq n_b^0 \leq n_2^p, \quad (29)$$

где n_1^p, n_2^p – заданы (т. е. определен параметр p , см. теорему 1); n_b^0 – коэффициент запаса прочности конструкции V^b , отвечающий точному решению трехмерной задачи упругости (сформулированной для конструкции V^b). Пусть для конструкции V^b определено максимальное эквивалентное напряжение σ_b , отвечающее приближенному решению задачи упругости. Пусть

$$|\delta| \leq \delta_p < C_p = \frac{\Delta n}{n_1^p + n_2^p}, \quad (30)$$

где $\Delta n = |n_2^p - n_1^p|$, δ – относительная погрешность для напряжения σ_b , т. е. $\delta = (\sigma_b - \sigma_b^0) / \sigma_b^0$, где σ_b^0 – максимальное эквивалентное напряжение конструкции V^b , отвечающее точному решению задачи упругости, δ_p – оценка для погрешности δ .

Пусть коэффициент запаса n_b конструкции, отвечающий приближенному решению, удовлетворяет скорректированным эквивалентным условиям прочности вида

$$\frac{n_1^p}{1 - \delta_p} \leq n_b \leq \frac{n_2^p}{1 + \delta_p}. \quad (31)$$

где $n_b = \sigma_T / \sigma_b$, σ_T – предел текучести.

Тогда коэффициент запаса n_b^0 конструкции, отвечающий точному решению, удовлетворяет эквивалентным условиям прочности (29), где $n_b^0 = \sigma_T / \sigma_b^0$.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2. Отметим, что δ_p можно рассматривать как максимальную погрешность для максимального эквивалентного напряжения σ_b конструкции V^b . Соотношения (31) представим в виде

$$n_1^p (1 + \varepsilon_1) \leq n_b \leq n_2^p (1 - \varepsilon_2),$$

или, учитывая (13), имеем

$$pn_1(1 + \varepsilon_1) \leq n_b \leq pn_2(1 - \varepsilon_2), \quad (32)$$

где величины ε_1 , ε_2 определяются с помощью погрешности δ_p напряжения σ_b по формулам

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{1 - \delta_p} - 1, \quad \varepsilon_2 = 1 - \frac{1}{1 + \delta_p}, \quad 0 \leq \delta_p < 1, \quad (33)$$

где p – коэффициент эквивалентности.

6. Основные положения метода эквивалентных условий прочности

Кратко рассмотрим основные положения метода эквивалентных условий прочности. Для простоты изложения считаем, что закрепленная, статически нагруженная трехмерная упругая конструкция V_0 имеет регулярную волокнистую структуру. Пусть волокна являются изотропными однородными телами и имеют одинаковые модули упругости. Пусть изотропная однородная конструкция V^b и конструкция V_0 имеют одинаковые форму, размеры, заданные закрепления и нагружения, но отличаются модулями упругости. Модули упругости конструкции V^b равны модулям упругости волокна композитной конструкции V_0 . Коэффициент эквивалентности p определяется по формуле $p = \sigma_0 / \sigma_b$, где σ_0 , σ_b – максимальные эквивалентные напряжение соответственно тел V_0 , V^b . Напряжения σ_0 , σ_b определяются с помощью МКЭ, т. е. с некоторой погрешностью, которая учитывается в скорректированных эквивалентных условиях прочности (32).

Итак, предлагаемый метод сводится к построению скорректированных эквивалентных условий прочности (32) и определению коэффициента запаса n_b , т. е. к определению коэффициента эквивалентности p и к определению с помощью МКЭ максимального эквивалентного напряжения σ_b для изотропного однородного тела V^b с погрешностью δ_p . Отметим, что процедура нахождения напряжения σ_0 по МКЭ для тела V_0 с учетом его микронеоднородной (волокнистой) структуры требует больших ресурсов ЭВМ. В связи с этим для нахождения коэффициента p предлагается следующая процедура. Для композитного тела V_0 определяем последовательность композитных тел $\{V_n\}_{n=1}^N$ и последовательность изотропных однородных тел $\{V_n^b\}_{n=1}^N$, для которых выполняются следующие условия. Имеем $V_n \subset V_{n+1}$, $V_n^b \subset V_{n+1}^b$, $n = 1, \dots, N-1$. Тела V_N и V_0 имеют одинаковую форму, размеры, микронеоднородную структуру, одинаковое закрепление и нагружение, т. е. $V_N = V_0$. Изотропные однородные тела V^b , V_N^b имеют одинаковые форму, размеры, модули упругости, закрепление и нагружение, т. е. $V_N^b = V^b$. Область тела V_n состоит из конечного числа регулярных ячеек композитного тела V_0 , имеет такой же характер закрепления и нагружения, как тело V_0 , $n = 1, \dots, N$. Тела V_n , V_n^b имеют одинаковые форму, размеры, закрепление и нагружение, модули упругости тела V_n^b равны модулям упругости волокна, $n = 1, \dots, N$. Для двух тел V_n^b и V_n определяем коэффициент p_n по формуле $p_n = \sigma_n / \sigma_n^b$; где σ_n , σ_n^b – максимальные эквивалентные напряжения соответственно тел V_n и V_n^b , найденные с помощью МКЭ, $n = 1, 2, 3, \dots$. Отметим, что поскольку $V_n \subset V_0$, $V_n^b \subset V_N^b$, то размерности дискретных моделей тел V_n и V_n^b меньше размерностей дискретных моделей тел V_0 , V_N^b . Очевидно, что $p_n \rightarrow p$ при $n \rightarrow N$. Пусть последовательность $\{p_n\}_{n=1}^N$ быстро сходится к p и пусть $\delta_n = |p_n - p_{n-1}| / p_n$ малая величина. Тогда принимаем $p = p_n$. Для нахождения напряжения σ_b для изотропного однородного тела определяем по МКЭ с применением МнКЭ последовательность решений, которая быстро сходится к точному, что дает возможность оценить погрешность полученного решения.

7. Процедура определения коэффициента эквивалентности для ряда композитных пластин, балок и оболочек

Рассмотрим композитные прямоугольные пластины постоянной толщины (как обобщение – трехмерные тела формы прямоугольного параллелепипеда), круговые цилиндрические оболочки постоянной толщины

и прямолинейные балки, которые имеют постоянное сечение сложной формы. Рассмотрим в декартовой системе координат Oxy широко используемые на практике четыре конструкции волокнистой регулярной структуры. Пусть прямоугольная пластина $V_0^{(1)}$ размерами $a_0 \times b_0$ закреплена при $y=0$ (рис. 1). Прямоугольные области $V_n^{(1)}$, $V_n^{(1)b}$ для пластины $V_0^{(1)}$ имеют размеры $a_n \times b_n$, где $a_n = a_0 \times \beta_n$, $b_n = b_0 \times \beta_n$, $0 < \beta_n \leq 1$, $n=1, \dots, N$.

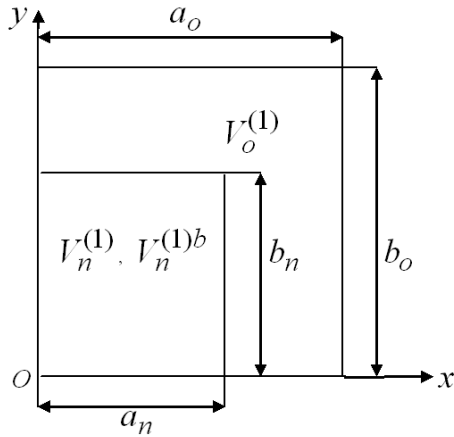


Рис. 1. Прямоугольная пластина $V_0^{(1)}$

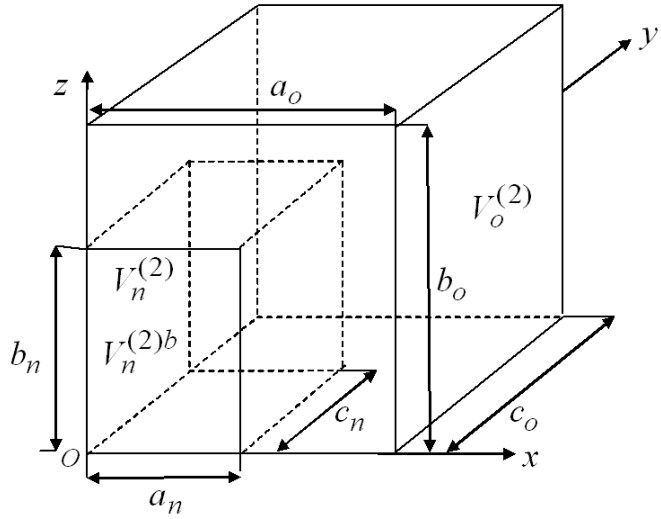


Рис. 2. Трехмерное тело $V_0^{(2)}$

При $y=0$ области $V_n^{(1)}$, $V_n^{(1)b}$ закреплены. Две смежные стороны областей $V_n^{(1)}$, $V_n^{(1)b}$ лежат на осях Ox , Oy , рис. 1. Пусть трехмерное тело $V_0^{(2)}$ формы прямоугольного параллелепипеда размерами $a_0 \times b_0 \times c_0$ закреплено при $z=0$ (рис. 2). Области $V_n^{(2)}$, $V_n^{(2)b}$ формы прямоугольного параллелепипеда для тела $V_0^{(2)}$ имеют размеры $a_n \times b_n \times c_n$, где $a_n = a_0 \times \beta_n$, $b_n = b_0 \times \beta_n$, $c_n = c_0 \times \beta_n$, $0 < \beta_n \leq 1$, $n=1, \dots, N$. При $z=0$ области $V_n^{(2)}$, $V_n^{(2)b}$ закреплены. Три смежные грани областей $V_n^{(2)}$, $V_n^{(2)b}$ лежат в плоскостях Oxy , Oxz и Oyz , рис. 2. Круговая цилиндрическая оболочка $V_0^{(3)}$ постоянной толщины и длиной L_0 закреплена при $y=0$ (рис. 3). Области $V_n^{(3)}$, $V_n^{(3)b}$ есть часть оболочки $V_0^{(3)}$ длины L_n , где $L_n = L_0 \beta_n$, $0 < \beta_n \leq 1$, $n=1, \dots, N$. При $y=0$ области $V_n^{(3)}$, $V_n^{(3)b}$ закреплены. рис. 3. Прямолинейная балка $V_0^{(4)}$ постоянного сечения типа двутавр (рис. 4). При $y=0$ балка закреплена. Области $V_n^{(4)}$, $V_n^{(4)b}$ есть часть балки $V_0^{(4)}$ длины L_n , где $L_n = L_0 \beta_n$, $1 < \beta_n \leq 1$, $n=1, \dots, N$. Тело $V_n^{(k)}$ состоит из конечного числа ре-

гулярных ячеек неоднородной структуры конструкции $V_0^{(k)}$, модули упругости изотропного однородного тела $V_n^{(k)b}$ равны модулям упругости волокна конструкции $V_0^{(k)}$, имеем $V_N^{(k)} = V_0^{(k)}$, $V_N^{(k)b} = V_0^{(k)b}$.

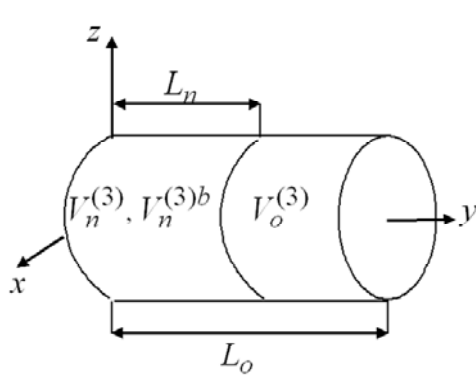


Рис. 3. Оболочка $V_0^{(3)}$

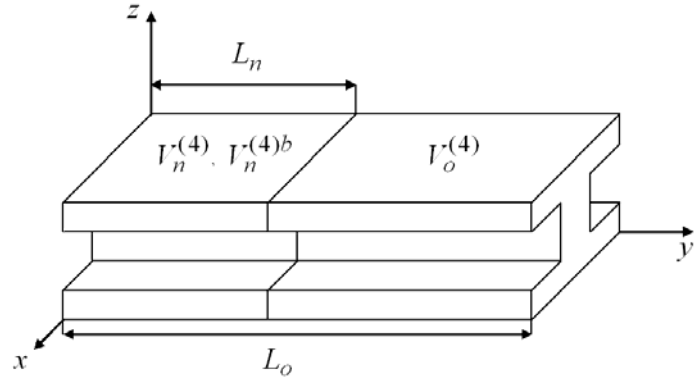


Рис. 4. Балка $V_0^{(4)}$

Композитное тело $V_0^{(k)}$ и изотропное однородное тело $V_N^{(k)b}$ имеют одинаковые форму, размеры, закрепление и нагружение, $n=1, \dots, N$, $k=1, \dots, 4$. Коэффициент $p_n^{(k)}$ для тела $V_n^{(k)}$ находим по формуле $p_n^{(k)} = \sigma_n^{(k)} / \sigma_n^{(k)b}$, где $\sigma_n^{(k)}$, $\sigma_n^{(k)b}$ – максимальные эквивалентные напряжения тел $V_n^{(k)}$, $V_n^{(k)b}$, $n=1, \dots, N$, $k=1, \dots, 4$. Пусть $\delta_n^{(k)} = |p_n^{(k)} - p_{n-1}^{(k)}| / p_n^{(k)}$ малая величина. Тогда принимаем $p^{(k)} = p_n^{(k)}$, где $p^{(k)}$ – коэффициент эквивалентности для конструкции $V_0^{(k)}$.

Замечание 1. Для тел с микронеоднородной структурой и больших размеров при нахождении коэффициента эквивалентности по МКЭ целесообразно применять МнКЭ [15], например, трехсеточные КЭ (3сКЭ), четырехсеточные КЭ (4сКЭ), пятисеточные КЭ (5сКЭ) и т. д.

8. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим модельную задачу о расчете на прочность балки V_0 с микронеоднородной волокнистой решетчатой регулярной структуры размерами $96h \times 1152h \times 96h$, h – задано, рис. 5. Балка V_0 состоит из пластичных материалов, имеет квадратное сечение размерами $H \times H$, где $H = 96h$. Регулярная ячейка микронеоднородной структуры балки V_0 имеет размеры $6h \times 6h \times 6h$, по ребрам которой расположены волокна сечением $h \times h$. Таким образом, балка армирована изотропными однородными ортогональными волокнами, внутри области – сечением $2h \times 2h$, на границе – $h \times 2h$ и $h \times h$, расстояние между волокнами равно $4h$. При $y=0$: $u=v=w=0$, т. е. в плоскости xOz , балка V_0 закреплена.

Пусть для коэффициента запаса n_0 балки V_0 заданы условия прочности вида

$$1,3 \leq n_0 \leq 3,2. \quad (34)$$

Для балки V_0 используем следующие исходные данные:

$$\begin{aligned} h = 0,417; \sigma_T = 5; E_v = 10, E_c = 1, \nu_c = \nu_v = 0,3, \\ L = 1152h = 480, H = 96h = 40. \end{aligned} \quad (35)$$

где E_c, E_v (ν_c, ν_v) – модули Юнга (коэффициенты Пуассона) соответственно связующего материала и волокон; σ_T – предел текучести волокна.

Считают [16], что если толщина волокон меньше 0,5 мм, то такие волокна образуют микронеоднородную структуру. Пусть $L = 480$ мм, $H = 40$ мм, тогда $h = 0,417$ мм, т. е. балка V_0 размерами 4 см × 48 см × 4 см имеет микронеоднородную регулярную волокнистую структуру.

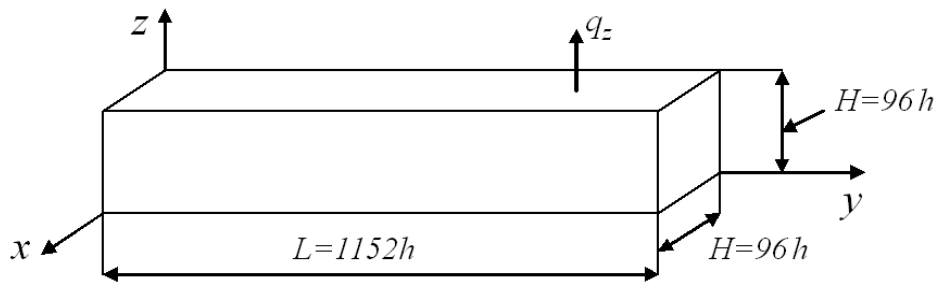


Рис. 5. Балка V_0

На поверхности $z = H$, $0,5L \leq y \leq L$ балки действует равномерная поверхностная нагрузка $q_z = 0,055$ (прямой изгиб балки). Базовое регулярное разбиение $\mathbf{R}_0$ балки V_0 состоит из КЭ V_e 1-го порядка формы куба со стороной h [6], в которых реализуется трехмерное НДС. Разбиение $\mathbf{R}_0$ учитывает микронеоднородную структуру балки, порождает равномерную ортогональную мелкую (базовую) сетку размерности $97 \times 1153 \times 97$ и дискретную модель с общим числом узловых неизвестных МКЭ $N_0 = 32517504$, ширина ленты системы уравнений (СУ) МКЭ равна $b_0 = 28524$. Реализация МКЭ для базовой модели $\mathbf{R}_0$ (более 32 млн узловых неизвестных) требует больших ресурсов ЭВМ. Построение последовательности решений связано с применением процедуры измельчения разбиений, которая для композитной структуры балки V_0 является сложной и труднореализуемой, так как каждый шаг измельчения приводит к резкому увеличению размерности дискретной задачи. Отметим, что шаг базового регулярного разбиения $\mathbf{R}_0$ композитной балки V_0 не может быть больше h , так как самое мелкое волокно имеет сечение $h \times h$.

Для расчета балки V_0 используем метод эквивалентных условий прочности с применением МнКЭ, которые порождают дискретные модели малой размерности и решения с малой погрешностью. В расчетах используем лагранжевый двухсеточный КЭ (2сКЭ) $V_\alpha^{(2)}$ формы куба со стороной $6h$ [10; 15]. Кратко рассмотрим в локальной декартовой системе координат $Oxyz$, рис. 6, процедуру построения 2сКЭ $V_\alpha^{(2)}$ размерами $6h \times 6h \times 6h$, который содержит одну регулярную ячейку микroneоднородной структуры балки V_0 .

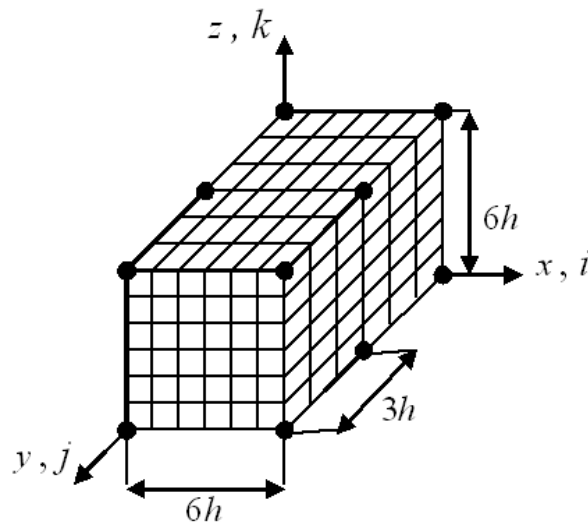


Рис. 6. Мелкая и крупная сетки 2сКЭ $V_\alpha^{(2)}$

В процедуре используем равномерную мелкую сетку h_α с шагом h размерности $7 \times 7 \times 7$ и крупную сетку H_α , вложенную в мелкую, $H_\alpha \subset h_\alpha$. На рис. 6 показана мелкая сетка h_α и крупная H_α , которая имеет 12 узлов, которые отмечены точками. Мелкая сетка h_α порождена базовым разбиением R_α 2сКЭ $V_\alpha^{(2)}$, которое состоит из КЭ V_i^α 1-го порядка формы куба со стороной h (в которых реализуется трехмерное НДС, $i=1, \dots, M$, M – общее число КЭ V_i^α , $M=216$) и учитывает его микroneоднородную структуру. На разбиении R_α с помощью метода конденсации [5] строим суперэлемент G . Полную потенциальную энергию Π_g суперэлемента G запишем в виде

$$\Pi_g(\mathbf{q}_g) = \frac{1}{2} \mathbf{q}_g^T [K_g] \mathbf{q}_g - \mathbf{q}_g^T \mathbf{P}_g, \quad (36)$$

где $[K_g]$ – матрица жесткости; $\mathbf{P}_g$, $\mathbf{q}_g$ – вектор узловых сил и перемещений суперэлемента G .

На границе суперэлемента G определена крупная сетка H_α , для узлов которой введена целочисленная система координат ijk , рис. 6. Базисная функция $N_{ijk} = N_{ijk}(x, y, z)$ для узла i, j, k крупной сетки H_α имеет вид [15]

$$N_{ijk} = L_i(x)L_j(y)L_k(z), \quad (37)$$

где $i, k = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$; $L_i(x) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq i}^2 \frac{x - x_\alpha}{x_i - x_\alpha}$; $L_j(y) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq j}^3 \frac{y - y_\alpha}{y_j - y_\alpha}$;

$L_k(z) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq k}^2 \frac{z - z_\alpha}{z_k - z_\alpha}$; (x_i, y_j, z_k) – координаты узла i, j, k сетки H_α в системе координат $Oxyz$.

Шаг крупной сетки H_α 2сКЭ $V_\alpha^{(2)}$ по осям Ox , Oz равен $6h$, по оси Oy – $3h$, т. е. по осям Ox , Oz лагранжевый 2сКЭ имеет первый порядок аппроксимаций, по оси Oy – второй порядок. Обозначим: $\mathbf{q}_\alpha$ – вектор узловых перемещений сетки H_α , т. е. узловых перемещений 2сКЭ $V_\alpha^{(2)}$. С помощью аппроксимаций функций перемещений вида (40), построенные на крупной сетке H_α , между векторами $\mathbf{q}_\alpha$, $\mathbf{q}_g$ установим связь

$$\mathbf{q}_g = [A_g^\alpha] \mathbf{q}_\alpha, \quad (38)$$

где $[A_g^\alpha]$ – прямоугольная матрица.

Подставляя (38) в (36), получим $\Pi_g = \Pi_g(\mathbf{q}_\alpha)$. Из условия минимизации потенциальной энергии $\Pi_g(\mathbf{q}_\alpha)$, т. е. из выполнения $\partial \Pi_g(\mathbf{q}_\alpha) / \partial \mathbf{q}_\alpha = 0$, следует соотношение $[K_\alpha] \mathbf{q}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha$, где

$$\mathbf{F}_\alpha = [A_g^\alpha]^T \mathbf{P}_g, [K_\alpha] = [A_g^\alpha]^T [K_g] [A_g^\alpha], \quad (39)$$

где $[K_\alpha]$ – матрица жесткости; $\mathbf{F}_\alpha$ – вектор узловых сил 2сКЭ $V_\alpha^{(2)}$.

Замечание 2. Решение, построенное для крупной сетки H_α 2сКЭ $V_\alpha^{(2)}$, с помощью формулы (42) проецируется на мелкую сетку h_α базового разбиения 2сКЭ, что дает возможность вычислять напряжения в любом КЭ V_i^α базового разбиения ДвКЭ $V_\alpha^{(2)}$.

Замечание 3. В силу (42) размерность вектора $\mathbf{q}_\alpha$ (т. е. размерность 2сКЭ $V_\alpha^{(2)}$) не зависит от общего числа M КЭ V_i^α , т. е. от размерности разбиения R_α . Поэтому для учета в 2сКЭ $V_\alpha^{(2)}$ сложной неоднородной структуры можно использовать сколь угодно мелкие базовые разбиения R_α , состоящие из КЭ V_i^α . В этом случае в 2сКЭ $V_\alpha^{(2)}$ сколь угодно точно описывается трехмерное напряженное состояние (без введения дополнительных упрощающих гипотез).

Для композитной балки V_0 определяем изотропное однородное тело V^b (балку V^b). Тела V_0 , V^b имеют одинаковые форму, размеры, закрепление и нагружение, модули упругости тела V^b равны модулям упругости волокна. Для однородного тела V^b строим последовательность базовых регулярных разбиений $\{R_n^0\}_{n=1}^N$. Разбиение R_n^0 имеет размерность $n_1^{(n)} \times n_2^{(n)} \times n_3^{(n)}$, где

$$n_1^{(n)} = 6n + 1, \quad n_2^{(n)} = 72n + 1, \quad n_3^{(n)} = 6n + 1, \quad n = 1, \dots, N. \quad (40)$$

Шаги базовой сетки по осям Ox , Oy , Oz равны $h_x^{(n)} = H / (6n)$, $h_y^{(n)} = L / (72n)$, $h_z^{(n)} = H / (6n)$, так как $L = 12H$, то $h_n = h_x^{(n)} = h_y^{(n)} = h_z^{(n)}$, $n = 1, \dots, N$. На основе базового разбиения R_n^0 для тела V^b строим двухсеточную дискретную модель R_n^b ($n = 1, \dots, N$), состоящую из 2сКЭ $V_\alpha^{(2)}$. При $N = 16$ получаем базовое разбиение R_0 . Для дискретной модели R_n^b находим решения w_n^b , σ_n^b , где w_n^b , σ_n^b – максимальные перемещение и эквивалентное напряжение модели R_n^b , $n = 1, \dots, 12$. Эквивалентные напряжения определяем по 4-й теории прочности. Результаты расчетов представлены в табл. 1, где обозначено: $\delta_{w,n}(\%)$, $\delta_{\sigma,n}(\%)$ – относительные погрешности перемещения w_n^b и напряжения σ_n^b для модели R_n^b , определяемые по формулам

$$\begin{aligned} \delta_{\sigma,n}(\%) &= 100\% \times |\sigma_n^b - \sigma_{n-1}^b| / \sigma_n^b, \\ \delta_{w,n}(\%) &= 100\% \times |w_n^b - w_{n-1}^b| / w_n^b, \\ n &= 2, \dots, 12. \end{aligned} \quad (41)$$

Анализ результатов расчетов (см. таблицу) показывает быструю сходимость приближенных решений (w_n^b, σ_n^b) к точному. Напряжения $\sigma_{11}^b = 0,695$ и $\sigma_{12}^b = 0,718$, отличаются на 3,348 %. Тестовые расчеты показывают, что в этом случае напряжение σ_{12}^b определено с погрешностью не более 10 %, т. е. принимаем $\delta_p = 0,1$. Тогда согласно (33) получаем $\varepsilon_1 = 0,11$, $\varepsilon_2 = 0,10$. Скорректированные эквивалентные условия прочности (32) для $\varepsilon_1 = 0,11$, $\varepsilon_2 = 0,1$ имеют вид

$$1,11pn_1 \leq n_b \leq 0,9pn_2, \quad (42)$$

где n_b – коэффициент запаса тела V^b , определяемый с помощью МКЭ.

Отметим, что двухсеточная дискретная модель R_{12}^b , состоящая из 2сКЭ $V_\alpha^{(2)}$, $\alpha = 1, \dots, 20736$, и построенная на основе базового разбиения R_{12}^0 , имеет $N_{12}^b = 146016$ узловых неизвестных МКЭ, ширина ленты СУ

МКЭ равна $b_{12} = 1059$. Реализация МКЭ для дискретной модели R_{12}^b требует в $k = \frac{N_0 \times b_0}{N_{12}^b \times b_{12}} = \frac{32517504 \times 28524}{146016 \times 1059} = 5998,34$ раз меньше объема памяти ЭВМ, чем для базовой модели R_0 балки V_0 , что показывает высокую эффективность применения 2сКЭ $V_\alpha^{(2)}$ в расчетах.

Результаты расчетов изотропной однородной балки V^b

R_n^b	w_n^b	$\delta_{w,n}(\%)$	σ_n^b	$\delta_{\sigma,n}(\%)$	R_n^b	w_n^b	$\delta_{w,n}(\%)$	σ_n^b	$\delta_{\sigma,n}(\%)$
R_1^b	143,666	—	0,307	—	R_7^b	161,839	0,107	0,589	5,739
R_2^b	156,886	9,202	0,403	31,304	R_8^b	161,952	0,070	0,618	5,000
R_3^b	159,799	1,857	0,435	7,921	R_9^b	162,032	0,050	0,646	4,500
R_4^b	160,872	0,672	0,481	10,668	R_{10}^b	162,089	0,036	0,671	3,930
R_5^b	161,383	0,317	0,521	8,393	R_{11}^b	162,133	0,027	0,695	3,648
R_6^b	161,665	0,175	0,557	6,880	R_{12}^b	162,165	0,020	0,718	3,348

Коэффициент эквивалентности p для композитной балки V_0 определяем с помощью процедуры, которая для балок кратко описана в п. 7. Строим последовательности композитных тел $\{V_n^{(0)}\}_{n=1}^N$ и изотропных однородных тел $\{V_n^{(0)b}\}_{n=1}^N$, $V_{n-1}^{(0)} \subset V_n^{(0)} \subset \dots \subset V_0$, $V_{n-1}^{(0)b} \subset V_n^{(0)b} \subset \dots \subset V^b$, $n = 1, \dots, N$, $V_N^{(0)} = V_0$, $V_N^{(0)b} = V^b$. Тела $V_n^{(0)}$, $V_n^{(0)b}$ имеют одинаковые форму, размеры, закрепление и нагружение, модули упругости тела $V_n^{(0)b}$ равны модулям упругости волокна.

Области $V_n^{(0)}$, $V_n^{(0)b}$ имеют характерные размеры $H \times L_n \times H$, т. е. отличаются от области балки V_0 лишь только одним характерным размером L_n , рис. 7. Тело $V_n^{(0)}$ состоит из конечного числа регулярных ячеек микро-неоднородной структуры балки V_0 . Тела $V_n^{(0)}$, $V_n^{(0)b}$ имеют такое же закрепление как балка V_0 , т. е. при $y = 0$ тела $V_n^{(0)}$, $V_n^{(0)b}$ жестко закреплены.

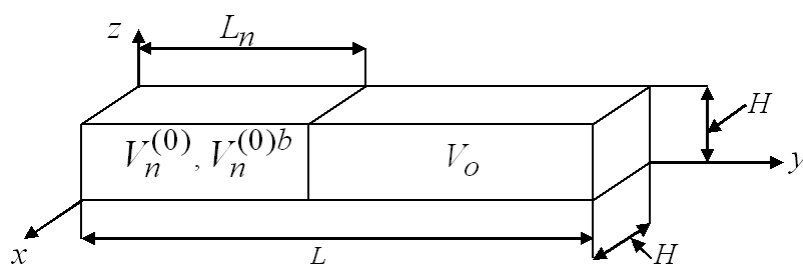


Рис. 7. Области $V_n^{(0)}$, $V_n^{(0)b}$

Для тел $V_n^{(0)}$, $V_n^{(0)b}$, $n=1, 2, 3$, используем три базовых регулярных разбиения соответственно размерностей: $97 \times 577 \times 97$, $97 \times 721 \times 97$ и $97 \times 865 \times 97$, на основе которых (с применением 2сКЭ $V_\alpha^{(2)}$) строим двухсеточные дискретные модели $R_n^{(0)}$, $R_n^{(0)b}$. Коэффициенты p_n находим по формуле $p_n = \sigma_n^{(0)} / \sigma_n^{(0)b}$, где $\sigma_n^{(0)}$, $\sigma_n^{(0)b}$ – максимальные эквивалентные напряжения моделей $R_n^{(0)}$, $R_n^{(0)b}$, $n=1, 2, 3$. В результате расчетов получаем: $p_1 = 3,030$, $p_2 = 3,075$, $p_3 = 3,104$. Относительные погрешности для найденных коэффициентов p_1 , p_2 , p_3 равны

$$\delta_2(\%) = 100\% \times |p_2 - p_1| / p_2 = |3,075 - 3,030| / 3,075 = 1,463\%,$$

$$\delta_3(\%) = 100\% \times |p_3 - p_2| / p_3 = |3,104 - 3,075| / 3,104 = 0,934\%.$$

Поскольку $p_1 < p_2 < p_3$ и δ_3 самая малая величина, то принимаем $p = p_3 = 3,104$. Подставляя в (42) $p = 3,104$, $n_1 = 1,3$, $n_2 = 3,2$, получаем

$$4,479 \leq n_b \leq 8,939. \quad (43)$$

Коэффициент запаса однородного тела V^b равен $n_b = \sigma_T / \sigma_{12}^b = 5 / 0,718 = 6,963$, который удовлетворяет скорректированным эквивалентным условиям прочности (43). Это означает, что коэффициент запаса n_0 композитной балки V_0 удовлетворяет заданным условиям прочности (34).

Проведем проверочные расчеты. На основе базового разбиения $\mathbf{R}_0$ балки V_0 с применением 2сКЭ $V_\alpha^{(2)}$ строим двухсеточные дискретные модели: композитную R_{16} и изотропную однородную R_{16}^b , отвечающие закону измельчения (40) при $n=16$. Считаем, что напряжения $\sigma_{16} = 2,493$, $\sigma_{16}^b = 0,799$ отвечают точным решениям, т. е. $\sigma_0 = \sigma_{16}$, $\sigma_b = \sigma_{16}^b$. Тогда коэффициент запаса для композитного тела V_0 равен $n_0 = \sigma_T / \sigma_0 = 5 / 2,493 = 2,005$, т. е. n_0 удовлетворяет заданным условиям прочности (34). Коэффициент эквивалентности p_0 (отвечающий точным решениям) для балки V_0 равен $p_0 = \sigma_0 / \sigma_b = 2,493 / 0,799 = 3,119$. Отметим, что коэффициенты $p = 3,104$, $p_0 = 3,119$ отличаются на 0,48 %, т. е. в самом деле, можно принять $p_0 = p$.

Рассмотрим эффективность предлагаемого метода. Размерность дискретной модели $\mathbf{R}_0^{(2)}$ равна 326400, ширина ленты СУ МКЭ равна 1756. Число узловых неизвестных МКЭ дискретной модели R_{12}^b (дискретных моделей $R_3^{(0)}$, $R_3^{(0)b}$) равно 146016, ширина ленты СУ МКЭ – 1059. Реализация метода эквивалентных условий прочности требует в

$k_2 = \frac{326400 \times 1756}{146016 \times 1059} = 3,706$ раз меньше ресурсов ЭВМ, чем расчет балки V_0 на прочность по известной процедуре.

Заключение

Показано применение метода эквивалентных условий прочности для расчета на статическую прочность конструкций с микронеоднородной волокнистой регулярной структурой при заданных условиях прочности. Реализация метода сводится к расчету на прочность изотропных однородных тел с применением эквивалентных условий прочности, построенных на основе заданных. При расчете однородных тел по МКЭ используются МКЭ, которые порождают дискретные модели малой размерности и решения с малой погрешностью. Реализация предлагаемого метода требует малых временных затрат и ресурсов ЭВМ.

Библиографические ссылки

1. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев : Наук. думка, 1975. 704 с.
2. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б. Расчет на прочность деталей машин. М. : Машиностроение, 1993. 640 с.
3. Москвичев В. В. Основы конструкционной прочности технических систем и инженерных сооружений. Новосибирск : Наука, 2002. 106 с.
4. Матвеев А. Д. Расчет упругих конструкций с применением скорректированных условий прочности // Известия АлтГУ. 2017. № 4. Математика и механика. С. 116–119. DOI 10.14258/izvasu(2017)4-21.
5. Норри Д., Ж. де Фриз. Введение в метод конечных элементов. М. : Мир, 1981. 304 с.
6. Голованов А. И., Тюленева О. И., Шигабутдинов А. Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М. : Физматлит, 2006. 392 с.
7. Образцов И. Ф., Савельев Л. М., Хазанов Х. С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М. : Высш. шк., 1985. 392 с.
8. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М. : Мир, 1975. 542 с.
9. Фудзии Т., Дзак М. Механика разрушения композиционных материалов. М. : Мир, 1982.
10. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах трехмерных однородных и композитных тел. // Учен. зап. Казан. ун-та. Серия: Физ.-мат. науки. 2016. Т. 158, кн. 4. С. 530–543.
11. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах композитных пластин и балок // Вестник КрасГАУ. 2016. № 12. С. 93–100.

12. Matveev A. D. Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2016. Vol. 158, № 1. Art. 012067, P. 1–9.

13. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности. М. : Высш. шк., 1982. 264 с.

14. Матвеев А. Д. Расчет на прочность композитных конструкций с применением эквивалентных условий прочности // Вестник КрасГАУ. 2014. № 11. С. 68–79.

15. Матвеев А. Д. Построение сложных многосеточных конечных элементов с неоднородной и микрон неоднородной структурой // Известия АлтГУ. 2014. № 1/1. Серия: Математика и механика. С. 80–83. DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-18.

16. Голушко С. К., Немировский Ю. В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. М. : Физматлит. 2008. 432 с.

References

1. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveev V. V. Spravochnik po soprotivleniyu materialov. Kiev, Nauk. dumka, 1975, 704 p.

2. Birger I. A., Shorr B. F., Iosilevich G. B. Raschet na prochnost' detalej mashin. Moscow, Mashinostroenie, 1993, 640 p.

3. Moskvichev V. V. Osnovy konstrukcionnoj prochnosti tekhnicheskikh sistem i inzhenernykh so-oruženij. Novosibirsk, Nauka, 2002, 106 p.

4. Matveev A. D. Raschet uprugih konstrukcij s primeneniem skorrektirovannykh uslovij prochnosti // Izvestiya AltGU. 2017, № 4, Matematika i mekhanika, Pp. 116–119. DOI 10.14258/izvasu(2017)4-21.

5. Norri D., de Friz Zh. Vvedenie v metod konechnykh elementov [Introduction to the finite element method]. Moscow, Mir, 1981, 304 p.

6. Golovanov A. I., Tiuleneva O. I., Shigabutdinov A. F. Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksii [Finite element method in statics and dynamics of thin-walled constructions]. Moscow, Fizmatlit, 2006, 392 p.

7. Obratsov I. F., Savel'ev L. M., Khazanov H. S. Metod konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noi mekhaniki letatel'nykh apparatov [Finite element method in problems of aircraft structural mechanics]. Moscow, Vysshaya shkola, 1985, 392 p.

8. Zenkevich O. Metod konechnykh elementov v tekhnike [Finite element method in engineering]. Moscow, Mir, 1975, 544 p.

9. Fudzii T., Dzako M. Mekhanika razrusheniya kompozicionnykh materialov. Moscow, Mir, 1982.

10. Matveev A. D. Metod mnogosetochnykh konechnykh elementov v raschetakh trekhmer-nykh odnorodnykh i kompozitnykh tel [The method of

multigrid finite elements in the calculations of three-dimensional homogeneous and composite bodies]. *Uchen. zap. Kazan. un-ta. Seriya: Fiz.-matem. Nauki*. 2016. T. 158, kn. 4, Pp. 530–543.

11. Matveev A. D. Metod mnogosetochnykh konechnykh elementov v raschetakh kompozitnykh plastin i balok [Multigrid method for finite elements in the analysis of composite plates and beams]. *Vestnik KrasGAU*, 2016, No. 12, Pp. 93–100.

12. Matveev A. D. Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2016, Vol. 158, No. 1, Art. 012067, Pp. 1–9.

13. Samul' V. I. Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti [Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity]. Moscow, *Vysshaia shkola*, 1982. 264 p.

14. Matveev A. D. Raschet na prochnost' kompozitnykh konstrukcij s primeneniem ekvivalentnykh uslovij prochnosti // *Vestnik KrasGAU*. 2014. No. 11, S. 68–79.

15. Matveev A. D. Postroenie slozhnykh mnogosetochnykh konechnykh elementov s neodnorodnoj i mikroneodnorodnoj strukturoj // *Izvestiya AltGU*. 2014, № 1/1, Seriya: Matematika i mekhanika. Pp. 80–83. DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-18.

16. Golushko S. K., Nemirovskii Iu. V. Priamye i obratnye zadachi mekhaniki uprugikh kompozitnykh plastin i obolochek vrashcheniia [Direct and inverse problems of mechanics of elastic composite plates and shells of rotation]. Moscow, *Fizmatlit*, 2008. 432 p.

© Матвеев А. Д., 2019

КЛАССЫ ШУНКОВА

В. И. Сенашов

Сибирский государственный университет науки и технологии
имени академика М. Ф. Решетнева

Российская Федерация, 660037, г. Красноярск,
просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31

Институт вычислительного моделирования СО РАН – обособленное
подразделение Федерального исследовательского центра КНЦ СО РАН
Российская Федерация, 660036, г. Красноярск, Академгородок, 50/44

Сибирский федеральный университет
Российская Федерация, 660041, Красноярск, просп. Свободный, 79
E-mail: sen1112home@mail.ru

Работа посвящена изучению классов групп, введенных В. П. Шунковым. Условие конечности в таких группах накладывается как на подгруппы, порожденные некоторыми двумя элементами в группе, так и на системы некоторых локально конечных подгрупп, на силовские подгруппы и централизаторы элементов. Приводятся результаты, касающиеся этих классов групп; примеры групп из изучаемых классов и разделяющих эти классы. Результаты статьи найдут применение при изучении бесконечных групп с условиями конечности.

Ключевые слова: группа, инволюция, условие конечности, группа Шункова.

SHUNKOV CLASSES

V. I. Senashov

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarsky Rabochy Av., Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

Institute of Computational Modelling of Siberian Branch of RAS
50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation

Siberian Federal University
79, Svobodny Av., Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation
E-mail: sen1112home@mail.ru

The work is devoted to the study of classes of groups introduced by V.P. Shunkov. The finiteness condition in such groups is imposed both on the subgroups generated by some two elements in the group, and on the systems of

some locally finite subgroups, on Sylow subgroups and centralizers of elements. The paper presents results concerning these classes of groups. Examples of groups from studied classes and separating these classes are given. The results of the article will find application in the study of infinite groups with finiteness conditions.

Keywords: group, involution, finiteness condition, group of Shunkov.

За время работы в Красноярске Владимир Петрович Шунков ввел большое количество классов групп и условий конечности. Целью данной работы мы поставили приведение определений этих классов с примерами и свойствами. Также будут приведены примеры, разделяющие эти классы групп.

Владимир Петрович Шунков начал вводить новые классы групп пятьдесят лет назад.

Класс бипримитивно конечных групп

В работе 1970 года [1] В. П. Шунков использует термин *бипримитивно конечные группы относительно числа p* для класса групп, в котором для периодической группы G и некоторого простого числа p , удовлетворяющим условию: если H подгруппа из G , N – инвариантная экстремальная подгруппа в H , то в фактор-группе H/N любые два элемента порядка p порождают конечную подгруппу. Если G бипримитивно конечна относительно любого $p \in \pi(G)$, то группа G в 1970 г. называлась *бипримитивно конечной* [1].

Сам В. П. Шунков для класса бипримитивно конечных групп доказал первый результат о том, что свойство быть экстремальной в таких p -группах переносится с централизатора некоторого элемента простого порядка на всю группу (В. П. Шунков [1]).

Экстремальной во время написания статьи В. П. Шункова называлось конечное расширение абелевой группы с условием минимальности для подгрупп (в дальнейшем эти группы получили название черниковских или групп Черникова).

Для бипримитивно конечных p -групп (а при $p = 2$ для произвольных 2-групп) доказано, что если они обладают конечной максимальной элементарной абелевой подгруппой, то являются экстремальными.

В. П. Шунков также установил существование бесконечных абелевых подгрупп в бесконечных бипримитивно конечных группах (В. П. Шунков [2]).

А. И. Созутов и В. П. Шунков в работе [3] установили локальную конечность бипримитивно конечных групп, у которых все собственные бесконечные подгруппы абелевы:

М. В. Носков обобщил предыдущую теорему А. И. Созутова – В. П. Шункова: бипримитивно конечная группа G с собственными бесконечными подгруппами нильпотентности класса ≤ 2 локально конечна (М. В. Носков [4]).

Класс групп Шункова

Условиями конечности в теории групп являются свойства, присущие всем конечным группам, притом существует хотя бы одна бесконечная группа, которая этим свойством не обладает [5]. Примерами свойств такого рода являются локальная конечность, локальная нормальность, конечность всех классов сопряженных элементов, конечность всех убывающих цепей подгрупп (условие минимальности для подгрупп) и многие другие свойства. Систематическое изучение групп с теми или иными условиями конечности началось в конце 30-х годов XX в. и в значительной степени было связано с исследованием специальных групп и близких к ним локально разрешимых групп с условием минимальности для подгрупп С. Н. Черниковым (см. [6; 7]) в 1939, 1940 гг.

В дальнейшем В. П. Шунков ввел понятие *сопряженно q -бипримитивно конечной* группы. Группа G называется *сопряженно q -бипримитивно конечной*, если для любой ее конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любая пара сопряженных элементов порядка q порождает конечную подгруппу. В частности, любая периодическая группа сопряженно 2-бипримитивно конечна.

В. П. Шунковым были также введены следующие условия конечности для бесконечных групп: группа называется *слабо q -бипримитивно конечной*, если ее два любых элемента простого порядка порождают конечную подгруппу; группа называется *слабо бипримитивно конечной*, если ее два любых элемента простого порядка порождают конечную подгруппу; группа называется *слабо q -сопряженно бипримитивно конечной*, если ее два любых элемента простого порядка q , сопряженных между собой, порождают конечную подгруппу; группа называется *слабо сопряженно бипримитивно конечной*, если ее два любых элемента простого порядка, сопряженных между собой, порождают конечную подгруппу.

Понятие сопряженно бипримитивно конечной группы введено Владимиром Петровичем Шунковым в 1975 г. в тезисах доклада на Всесоюзном алгебраическом симпозиуме. Ссылка на этот факт имеется в работе А. Н. Остыловского [8]. В самом начале XXI в. В. Д. Мазуров предложил назвать сопряженно бипримитивно конечные группы группами Шункова. И постепенно термин заменялся на новый. И теперь уже трудно встретить старый термин, а термин «группы Шункова» стал таким же естественным, как «группы Черникова».

Определение. Группа называется *группой Шункова*, если для любой ее конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу.

В настоящее время группы Шункова встречаются в работах А. А. Дуж, Л. Гамуди, В. О. Гомера, М. Н. Ивко, А. Н. Измайлова, А. А. Кузнецова, Д. В. Лыткиной, В. Д. Мазурова, Ал. Н. Остыловского, А. Н. Остыловского, И. И. Павлюка, Д. Н. Панюшкина, А. М. Попова, Е. А. Прониной, А. В. Рожкова, А. Г. Рубашкина, И. В. Сабодах, Е. И. Седовой, В. И. Сенашова, В. А. Середы, А. И. Созутова, Н. Г. Сучковой, Л. Р. Туватуллиной, А. В. Тимофеевко, Г. А. Трояковой, К. А. Филиппова, А. А. Черепа, Н. С. Черникова, А. А. Шафиро, А. К. Шлепкина, В. П. Шункова.

Чтобы множество сопряженно бипримитивно конечных групп рассматривать как класс групп, необходима замкнутость его относительно взятия подгрупп и фактор-групп. В этом направлении справедливы следующие результаты: Класс групп Шункова замкнут относительно взятия подгрупп. Класс групп Шункова замкнут относительно взятия фактор-групп по конечным группам. Фактор-группа p -бипримитивно конечной группы G по черниковской подгруппе p -бипримитивно конечна (см. с. 75 в [9]). Фактор-группа G/R сопряженно бипримитивно конечной группы G по черниковской подгруппе R сопряженно бипримитивно конечна. Этот результат доказывается точно так же, как и предложение 7 из [10].

Класс M_p -групп

Определение. Пусть G – группа, B – её бесконечная нормальная полная абелева p -подгруппа с условием минимальности, a – элемент порядка p и выполняются следующие условия:

- а) локально-конечные p -подгруппы из $C_G(a)B / B$ конечны,
- б) если некоторая полная абелева p -подгруппа C группы G содержится в множестве $\bigcup_{g \in G} \langle a, a^g \rangle$, то $C \subseteq B$.

Группу G из определения называется M_p -группой, а подгруппы B , $\langle a \rangle$ соответственно – *ядром* и *ручкой* M_p -группы G .

В M_p -группе G ручка $\langle a \rangle$ может быть одного из следующих типов:

- 1) в $C_G(a)$ локально-конечные p -подгруппы конечны;
- 2) в $C_G(a)$ локально-конечные p' -подгруппы конечны;
- 3) в $C_G(a)$ локально-конечные подгруппы конечны.

В соответствии с указанными разграничениями относительно ручек в M_p -группе G называется ручка типа 1) p -конечной, типа 2) – p' -конечной и типа 3) – конечной.

Приведем примеры M_p -групп (с конечными ручками): Всякая черниковская группа, обладающая бесконечной p -подгруппой и почти регулярным элементом порядка p , является M_p -группой. Всякое голоморфное расширение бесконечной черниковской p -группы с помощью группы внешних автоморфизмов является M_p -группой.

Ядро M_p -группы не обязано совпадать с максимальной полной абелевой p -подгруппой группы. В самом деле, пусть $G = H \times T$, где $H = P\lambda\langle c \rangle$, P – бесконечная полная абелева p -группа, $|c| = p$, $C_H(c)$ – конечен, T – свободное произведение квазициклической p -группы S и циклической группы $\langle b \rangle$ порядка p . Очевидно, G является M_p -группой с ядром P и конечной ручкой $\langle bc \rangle$, причем B вкладывается в максимальную полную абелеву p -подгруппу $B \times S \neq B$ [11].

Во всех известных примерах M_p -групп с регулярной ручкой, не являющихся периодическими почти нильпотентными группами, выполняется условие: любая регулярная ручка вместе с некоторой с ней сопряженной порождает бесконечную подгруппу.

В связи с этим естественно возникает вопрос: существует ли M_p -группа с регулярной ручкой, которая не удовлетворяет этому условию и не является периодической почти нильпотентной группой?

Ответ на этот вопрос оказался отрицательным в классе групп без инволюций, так что в классе групп без инволюций периодические почти нильпотентные M_p -группы с регулярной ручкой и только они не удовлетворяют указанному условию. Что касается M_p -групп с регулярной ручкой, содержащих инволюции и с $p \neq 2$, то для них указанный выше вопрос остается открытым даже в классе локально-конечных групп.

Приведем примеры M_p -групп с регулярной ручкой [12]: бесконечная группа диэдра является M_2 -группой с регулярной ручкой; группа Новикова–Адяна [13] является M_p -группой с регулярной ручкой по любому простому числу p из множества простых делителей порядков элементов группы; свободное произведение групп, обладающее нетривиальными конечными множителями, является M_p -группой с регулярной ручкой; периодическое произведение групп без инволюций является M_p -группой с регулярной ручкой.

Приведем два результата для M_p -групп.

Теорема (В. П. Шунков). *M_p -группа G без инволюций с регулярной ручкой $\langle a \rangle$ тогда и только тогда является периодической почти нильпотентной группой, когда в ней выполняется условие: подгруппы $\langle a, a^g \rangle$, $g \in G$, конечны [12].*

Теорема (В. П. Шунков). *M_2 -группа G с регулярной ручкой $\langle a \rangle$ тогда и только тогда является периодической почти абелевой группой с конечными силовскими подгруппами, когда все подгруппы $\langle a, a^g \rangle$, $g \in G$, конечны [12].*

Условие на конечность двупорожденных подгрупп в этих теоремах тоже введено В. П. Шунковым и называется (a, a) -условием конечности.

Класс T -групп

Определение. Пусть G – группа с инволюциями. Каждой инволюции i из G поставим в соответствие множество подгрупп W_i , определяемое следующим образом. Если силовские 2-подгруппы из G – группы диэдра 8-го порядка и i содержится в такой четверной подгруппе Клейна R_i , что $C_G(i) < N_G(R_i)$, то полагаем $V_i = N_G(R_i)$ и такую подгруппу V_i включаем в множество W_i . Группа G с инволюциями называется T -группой, если она удовлетворяет условиям:

- 1) любые две инволюции из G порождают конечную подгруппу;
- 2) нормализатор любой нетривиальной локально конечной подгруппы из G , содержащий инволюции, обладает локально конечной периодической частью;
- далее, для любой инволюции i и для любой подгруппы V_i из W_i
- 3) множество $G \setminus V_i$ обладает инволюцией;
- 4) для всякого элемента c из $G \setminus V_i$, строго вещественного относительно i , т. е. $c^i = c^{-1}$, существует в $C_G(i)$ элемент s_c , что подгруппа $\langle c, c^{s_c} \rangle$ бесконечна.

Этот класс групп введен В. П. Шунковым.

Приведем один результат для класса T -групп.

Теорема (В. И. Сенашов). Пусть G – группа с инволюциями, удовлетворяющая условиям:

- 1) любые две инволюции из G порождают конечную подгруппу;
- 2) нормализатор любой конечной нетривиальной подгруппы, содержащий инволюции, обладает обобщенно черниковской периодической частью.

Тогда либо G обладает обобщенно черниковской периодической частью, либо G – T -группа [14].

Класс T_0 -групп

Напомним определение класса T_0 -групп.

Определение. Пусть G – группа с инволюциями, i – некоторая ее инволюция, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) все подгруппы вида $\langle i, i^g \rangle$, $g \in G$, конечны;
- 2) силовские 2-подгруппы из G – циклические или обобщенные группы кватернионов;
- 3) централизатор $C_G(i)$ бесконечен и обладает конечной периодической частью;
- 4) нормализатор любой нетривиальной $\langle i \rangle$ -инвариантной локально конечной подгруппы из G либо содержится в $C_G(i)$, либо обладает перио-

дической частью, являющейся группой Фробениуса с абелевым ядром и конечным инвариантным множителем с инволюциями;

5) $C_G(i) \neq G$ и для всякого c элемента из $G \setminus C_G(i)$, строго вещественного относительно i , т. е. $c^i = c^{-1}$, существует в $C_G(i)$ такой элемент s_c , что подгруппа $\langle c, c^{s_c} \rangle$ бесконечна.

Группа G с инволюцией i , удовлетворяющая относительно инволюции i условиям 1)–5), называется T_0 -группой.

Приведем пример T_0 -групп, основанный на известных конструкциях С. И. Адяна и А. Ю. Ольшанского. Здесь имеется ввиду группа без кручения $A(m, n)$, являющаяся центральным расширением циклической группы с помощью группы $B(m, n)$, $m \geq 2$, n – нечетное число и $n \geq 665$ [13] и группа без кручения $O(p)$, являющаяся центральным расширением циклической группы с помощью p -группы типа $G(\infty)$ [15].

Пример (В. П. Шунков). Пусть $A = A(m, n)$, $m > 1$, $n > 664$ – нечетное число $\{Ad\}$. Группа $A(m, n)$ обладает нетривиальным центром $Z(A) = \langle d \rangle$, причем $A / \langle d \rangle \cong B(m, n) \setminus \{Ad\}$.

Рассмотрим группу $B = A \rtimes \langle x \rangle$, где x – инволюция. Возьмем из $A \times A^x$ элемент $u = d \cdot d^{-x}$. Очевидно, что $u \in Z(A \times A^x)$ и $u^x = u^{-1}$. Как показано в [16], группа $G = B / \langle u \rangle$, и ее инволюция $i = x \cdot \langle u \rangle$ удовлетворяют условиям 1)–5) из определения T_0 -группы, при этом $G = V\lambda\langle i \rangle$, $C_G(i)$ – бесконечная группа с периодической частью $\langle i \rangle$, все подгруппы $\langle i, i^g \rangle$ в G конечны и любая максимальная конечная подгруппа из G , содержащая инволюцию i , является группой диэдра порядка $2n$ и G является T_0 -группой [16].

Приведем две теоремы для T_0 -групп.

Теорема (В. П. Шунков). Пусть G – группа, a – ее элемент простого порядка p , удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) подгруппы вида $\langle a, a^g \rangle$, $g \in G$, конечны и почти все разрешимы;
- 2) если $p = 2$, то в централизаторе $C_G(a)$ множество элементов конечных порядков конечно;
- 3) нормализатор любой нетривиальной $\langle a \rangle$ -инвариантной конечной подгруппы обладает почти нильпотентной периодической частью;
- 4) при $p \neq 2$ и для $q \in \pi(G)$, $q \neq p$, любая $\langle a \rangle$ -инвариантная элементарная абелева q -подгруппа из G конечна.

Тогда либо G обладает почти нильпотентной периодической частью, либо G – T_0 -группа и $p = 2$ [17].

Теорема (В. П. Шунков). Пусть G – группа с инволюциями, i – ее не-которая инволюция, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) подгруппы вида $\langle i, i^g \rangle$, $g \in G$, конечны;

2) в централизаторе $C_G(i)$ множество элементов конечных порядков конечно;

3) в группе G нормализатор любой нетривиальной $\langle i \rangle$ -инвариантной конечной подгруппы обладает периодической частью;

Тогда либо G обладает почти нильпотентной периодической частью, либо G – T_0 -группа [18].

Класс Φ_0 -групп

Напомним определение класса Φ_0 -групп.

Определение. Пусть G – группа, i – ее инволюция, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) все подгруппы вида $\langle i, i^g \rangle$, $g \in G$, конечны;
- 2) $C_G(i)$ бесконечен и обладает конечной периодической частью;
- 3) $C_G(i) \neq G$ и $C_G(i)$ не содержится в других подгруппах из G , обладающих периодической частью;
- 4) если K – конечная подгруппа из G , не лежащая в $C_G(i)$, и $V = K \cap C_G(i) \neq 1$, то K – группа Фробениуса с дополнением V .

Группа G , удовлетворяющая условиям 1) – 4) называется Φ_0 -группой.

В. И. Сенашовым получено полное решение [19] вопроса В. П. Шункова, сформулированного в 1993 году в Сибирском математическом журнале [16]:

Будет ли всякая Φ_0 -группа также и T_0 -группой?

Там же особо подчеркивается, что наиболее трудным является установление для Φ_0 -группы выполнимости условий 4 и 5 из определения T_0 -группы.

Удалось показать, что все условия кроме четвертого из определения T_0 -группы для Φ_0 -группы выполняются.

Приведем пример Φ_0 -группы (В. И. Сенашов, [19]), не являющейся T_0 -группой:

Возьмем изоморфные копии T_0 -группы $G = V\lambda\langle i \rangle$, построенной выше при рассмотрении T_0 -группы:

$$G_1 = V_1\lambda\langle i_1 \rangle, G_2 = V_2\lambda\langle i_2 \rangle, \dots, G_n = V_n\lambda\langle i_n \rangle, \dots$$

В декартовом произведении групп G_n , $n = 1, 2, \dots$, рассмотрим подгруппу $U = W\lambda\langle j \rangle$, где W – прямое произведение подгрупп V_n , $n = 1, 2, \dots$, а $j = i_1 \cdot i_2 \cdot \dots \cdot i_n \cdot \dots$ – инволюция. Группа U является Φ_0 -группой, но не является T_0 -группой.

Класс Ф-групп

Определение. Группа G , удовлетворяющая условиям 1), 3), 4) из определения Φ_0 -группы и условию

2) $C_G(i)$ бесконечен и обладает слойно конечной периодической частью; называется *Ф-группой*.

Приведем три результата для класса Ф-групп.

Теорема (М. Н. Ивко, В. И. Сенашов). Ф-группа G удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) все инволюции в G сопряжены;
- 2) силовские 2-подгруппы сопряжены и являются локально циклическими или конечными обобщенными группами кватернионов;
- 3) существует бесконечно много элементов конечных порядков из G , строго вещественных относительно инволюции i и для каждого элемента c из этого множества найдется элемент s_c из централизатора i такой, что группа $\langle c, c^{s_c} \rangle$ бесконечна [20].

Теорема (М. Н. Ивко, В. И. Сенашов). Пусть G – группа, a – ее инволюция, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) все подгруппы вида $\langle a, a^g \rangle$, $g \in G$, конечны;
- 2) нормализатор любой нетривиальной $\langle a \rangle$ -инвариантной конечной подгруппы обладает слойно конечной периодической частью.

Тогда, либо множество всех элементов конечных порядков порождает слойно конечную группу, либо G – Ф-группа [20].

Теорема (М. Н. Ивко, В. И. Сенашов). Пусть G – группа с инволюциями, i – некоторая ее инволюция, удовлетворяющие условиям:

- 1) G порождается инволюциями, сопряженными с i ;
- 2) почти все группы $\langle i, i^g \rangle$ конечны для $g \in G$;
- 3) нормализатор каждой $\langle i \rangle$ -инвариантной конечной подгруппы обладает слойно конечной периодической частью.

Тогда группа G либо конечна, либо является Ф-группой [20].

Вывод

Классы групп, введенные Владимиром Петровичем Шунковым получили признание у специалистов по теории групп. В работе приведены примеры этих классов групп и теоремы, касающиеся этих классов. Результаты статьи найдут применение при изучении бесконечных групп с условиями конечности.

Библиографические ссылки

1. Шунков В. П. Об одном классе p -групп // Алгебра и логика, 1970. Т. 9, № 4. С. 484–486.
2. Шунков В. П. Об абелевых подгруппах бипримитивно конечных групп // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 5. С. 603–614.
3. Созутов А. И., Шунков В. П. Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы // Матем. сб. 1976. Т. 100, № 4. С. 495–506.
4. Носков М. В. О локальной конечности одного класса бипримитивно конечных групп // Исследования по теории групп. Красноярск : Ин-т физики СО РАН СССР, 1975. С. 24–31.
5. Черников С. Н. Условия конечности в общей теории групп // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, № 5. С. 45–96.
6. Черников С. Н. Бесконечные специальные группы // Мат. сб. 1939. № 6. С. 199–214.
7. Черников С. Н. О группах с силовским множеством // Мат. сб. 1940. № 8. С. 377–394.
8. Остыловский А. Н. Локальная конечность некоторых групп с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика. 1977. Т. 16. № 1. С. 63–73.
9. Сенашов В. И., Шунков В. П. Группы с условиями конечности. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. 336 с.
10. Остыловский А. Н., Шунков В. П. О q -бипримитивно конечных группах с условием минимальности для q -подгрупп // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 1. С. 61–78.
11. Шунков В. П. M_p -группы // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, № 4. С. 445–475.
12. Шунков В. П. Шунков В. П. M_p -группы с ядром произвольного ранга // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 1. С. 84–105.
13. Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М. : Наука, 1975. 335 с.
14. Сенашов В. И. Характеризация обобщенно черниковских групп в группах с инволюциями // Мат. заметки. 1997. Т. 62, № 4. С. 577–588.
15. Олышанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М. : Наука, 1989. 448 с.
16. Шунков В. П. О расположении инволюций в группе // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 2. С. 208–219.
17. Шунков В. П. T_0 -группа и ее место в теории групп // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51, № 4. С. 572–576.
18. Шунков В. П. T_0 -группы // Математические труды. 1998. Т. 1, № 1. С. 139–202.
19. Сенашов В. И. Об одном вопросе В. П. Шункова // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1154–1156.

20. Ивко М. Н., Сенашов В. И. On a new class of infinite groups // Укр. мат. журн. 1995. Т. 46, № 6. С. 760–770.

References

1. Shunkov V. P. [On a class of p -groups]. *Algebra and Logic*. 1970, Vol. 9, No. 4, P. 484–486.
2. Shunkov V. P. [On abelian subgroups of biprimatively finite groups]. *Algebra and Logic*. 1973, Vol. 12, No. 5, P. 603–614.
3. Sozutov A. I., Shunkov V. P. [On a generalization of the Frobenius theorem to infinite groups]. *Math. Sbornik*. 1976, Vol. 100, No. 4, P. 495–506.
4. Noskov M. V. [On the local finiteness of a class of biprimatively finite groups]. In *Proc. "Studies in the theory of groups"*. Krasnoyarsk, Institute of Physics of SB AS USSR, 1975, P. 24–31.
5. Chernikov S. N. [Conditions for finiteness in the general theory of groups]. *Uspekhi Mat. Sciences*. 1959, Vol. 14, No. 5, P. 45–96.
6. Chernikov S. N. [Infinite special groups]. *Math. Sbornik*. 1939, No. 6, P. 199–214.
7. Chernikov S. N. [On groups with a Sylow set]. *Math. Sbornik*. 1940, No. 8, P. 377–394.
8. Ostylovsky A. N. [Local finiteness of some groups with the minimality condition for abelian subgroups]. *Algebra and Logic*. 1977, Vol. 16, No. 1, P. 63–73.
9. Senashov V. I., Shunkov V. P. *Gruppy s usloviyami konechnosti* [Groups with finiteness conditions]. Novosibirsk, Publishing House of the SB RAS, 2001, 336 p.
10. Ostylovsky A. N., Shunkov V. P. *On q -biprimatively finite groups with the minimality condition for q -subgroups* // *Algebra and Logic*. 1975, Vol. 14, No. 1, P. 61–78.
11. Shunkov V. P. [M_p -groups]. *Algebra and Logic*. 1984, Vol. 23, No. 4, P. 445–475.
12. Shunkov V. P. Shunkov V. P. [M_p -groups with a kernel of arbitrary rank]. *Algebra and logic*. 1987, Vol. 26, No. 1, P. 84–105.
13. Adyan S. I. *Problema Bernsayda i tozhdestva v gruppakh* [Bernside Problem and Identities in Groups]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 336 p.
14. Senashov V. I. [A characterization of generalized Chernikov groups in groups with involutions]. *Mat. notes*. 1997, Vol. 62, No. 4, P. 577–588.
15. Olshansky A. Yu. *Geometriya opredelyayushchikh sootnosheniy v gruppakh* [Geometry of defining relations in groups]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 448 p.
16. Shunkov V. P. [On the location of involutions in a group]. *Sib. mat. Journal*. 1993, Vol. 34, No. 2, P. 208–219.

17. Shunkov V. P. [T_0 -group and its place in group theory]. *Ukrain. mat. journal*. 1999, Vol. 51, No. 4, P. 572–576.
18. Shunkov V. P. [T_0 -groups]. *Mathematical works*. 1998, Vol. 1, No. 1, P. 139–202.
19. Senashov V. I. [On one question of V. P. Shunkov]. *Sib. mat. journal*. 1998, Vol. 39, No. 5, P. 1154–1156.
20. Ivko M. N., Senashov V. I. [On a new class of infinite groups]. *Ukr. mat. journal*. 1995, Vol. 46, No. 6, P. 760–770.

© Сенашов В. И., 2019

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

С. И. Сенашов, Е. В. Филюшина

Сибирский государственный университет науки и технологий
имени академика М. Ф. Решетнева

Российская Федерация, 660037, г. Красноярск,
просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31

E-mail: sen@sibsau.ru

Рассмотрены две системы уравнений пластичности в динамическом случае. В первой системе полностью учитываются силы инерции, а во втором силами инерции пренебрегают. Для этих систем уравнений приведены группы непрерывных преобразований, а также вид инвариантных решений, которые можно построить, используя эти преобразования. Решения, приведенные в работе, можно использовать для анализа некоторых технологических процессов.

Ключевые слова: динамические уравнения пластичности, непрерывные преобразования, точные решения.

GROUP ANALYSIS OF DYNAMIC PLASTICITY EQUATIONS

S. I. Senashov, E. V. Filushina

Siberian State University of Science and Technology

31, Krasnoyarsky Rabochy Av., Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

E-mail: sen@sibsau.ru

The article considers two systems of plasticity equations in the dynamic case. In the first system, the forces of inertia are fully taken into account, and in the second, the forces of inertia are neglected. For these systems of equations, groups of continuous transformations are given, as well as the kind of invariant solutions that can be constructed using these transformations. The solutions given in the paper can be used for the analysis of some technological processes.

Keywords: dynamic plasticity equations, continuous transformations, exact solutions.

Введение. В работе рассматриваются системы уравнений пластичности с учетом сил инерции. Рассмотрена система уравнений, где учтены все

силы инерции, а также система, где пренебрегают конвективными членами. Для каждого из этих случаев построена группа симметрий, допускаемая системами, приведен вид возможных инвариантных решений, а также их возможная интерпретация.

Постановка задачи. Если в уравнениях теории пластичности учитывать силы инерции, то уравнения движения принимают вид

$$\frac{dv_l}{dt} = \sigma_{ij,j} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (0.1)$$

где выражение $\frac{dv_l}{dt} = \partial_t v + v_j v_{l,j}$ называется субстациональной или полной производной.

Присоединяя к уравнениям (0.1) условие пластичности Мизеса, условие несжимаемости, закон пластического течения – получим полную систему уравнений теории течения Мизеса:

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dt} &= \sigma_{ij,j} \quad (i, j = 1, 2, 3), \\ 3\rho &= \sigma_{ii}, \quad S_{ij} = -\rho\delta_{ij} + \sigma_{ij}, \\ S_{ij}S_{ij} &= 2k_s^2, \quad S_{ij} = \lambda e_{ij}, \\ v_{i,j} &= 0, \quad 2e_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i}. \end{aligned} \quad (0.2)$$

Здесь λ – неотрицательная функция; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; S_{ij} – компоненты девиатора тензора напряжений; ρ – гидростатическое давление; v_1, v_2, v_3 – компоненты вектора скорости; $k_s = \text{const}$, предел текучести при чистом сдвиге. По повторяющимся индексам предполагается суммирование, индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующему аргументу.

Если предположить, что конвективные члены в выражении для полного ускорения малы, то получим упрощенный вариант теории пластического течения Мизеса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \sigma_{ij,j} \quad (i, j = 1, 2, 3), \\ 3\rho &= \sigma_{ii}, \quad S_{ij} = -\rho\delta_{ij} + \sigma_{ij}, \\ S_{ij}S_{ij} &= 2k_s^2, \quad S_{ij} = \lambda e_{ij}, \\ v_{i,j} &= 0, \quad 2e_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i}. \end{aligned} \quad (0.3)$$

Исключая из уравнений (0.2) или (0.3) величины $\lambda, \sigma_{ij}, S_{ij}$ получаем систему четырех уравнений, которая служит для определения четырех функций ρ, v_1, v_2, v_3

$$\frac{dv_i}{dt} = \rho_{,i} + \frac{\sqrt{2}k_s}{2A} v_{ijj} - \frac{\sqrt{2}k_s}{A^3} e_{ij} e_{nm} v_{nim}, \quad (0.4)$$

$$e_{ij} e_{ij} = A^2, \quad v_{ij} = 0.$$

Для систем уравнений (0.2), (0.3) приведем группы точечных симметрий, допускаемые уравнениями. Построим оптимальную систему одномерных подалгебр, а также приведем вид инвариантных решений, которые можно построить на этих подалгебрах и их возможную механическую интерпретацию.

1. Групповой анализ уравнения среды Мизеса. Если в уравнениях (0.4) $\frac{dv_i}{dt} = \partial_t v + v_j v_{ij}$, то группа, допускаемая этими уравнениями, порождается следующим оператором [1]:

$$X_0 = \partial_t, \quad M = t\partial_t + x_i \partial_{x_i}, \quad S = \varphi(t) \partial_\rho, \quad (1.1)$$

$$L_i = f_i(t) \partial_{x_i} + f_i'(t) \partial_{v_i} - f_i''(t) \partial_\rho \quad (\text{по } i \text{ не суммировать})$$

$$Z = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v, \quad X_i = \partial_{x_i},$$

$$N = t\partial_t + v_i \partial_{v_i}, \quad T_1 = x_2 \partial_{x_3} - x_3 \partial_{x_2},$$

Еще два оператора Z_2, Z_3 получаются из Z_1 круговой перестановкой индексов. f_i, φ – произвольные функции из класса C^∞ .

Если в уравнениях (0.4) положить $\frac{dv_i}{dt} \approx \partial_t v$, то группа, допускаемая этими уравнениями, порождается следующими операторами [1]:

$$X_0 = \partial_t, \quad M = t\partial_t + x_i \partial_{x_i}, \quad S = \varphi(t) \partial_\rho, \quad (1.2)$$

$$L_i = g_i(t) \partial_{v_i} - x g_i'(t) \partial_\rho \quad (\text{по } i \text{ не суммировать})$$

$$Z_1 = x_2 \partial_{x_3} - x_3 \partial_{x_2} + v_2 \partial_{v_3} - v_3 \partial_{v_2}, \quad X_i = \partial_{x_i},$$

$$N = t\partial_t + v_i \partial_{v_i}, \quad T_1 = x_2 \partial_{x_3} - x_3 \partial_{x_2},$$

операторы Z_2, Z_3, T_2, T_3 получаются из Z_1, T_1 круговой перестановкой индексов g_i, φ произвольные функции из класса C^∞ .

Из (1.1), (1.2) следует, что уравнения (0.4) допускают бесконечно параметрическую группу непрерывных преобразований. Это с одной стороны расширяет класс инвариантно-групповых решений, а с другой – осложняет построение таких решений, поскольку бесконечные группы еще плохо изучены. Поэтому в дальнейшем ограничимся изучением некоторых конечномерных подалгебр для алгебр Ли (1.1) и (1.2).

Положим в (1.1) $\varphi(t)=1, f_i=1$ и $f_i=t$ ($i, j=1, 2, 3$) тогда соответствующая конечномерная алгебра Ли L_{12} имеет следующий базис

$$X_0 = \partial_t, \quad X_i = \partial_{x_i}, \quad M = t\partial_t + x_i\partial_{x_i}, \quad S = \partial_\rho, \quad (1.3)$$

$$Y_i = t\partial_{x_i} + \partial_{v_i} \text{ (по } i \text{ не суммировать)}$$

$$Z_1 = x_2\partial_{x_3} - x_3\partial_{x_2} + v_2\partial_{v_3} - v_3\partial_{v_2}.$$

Еще два оператора Z_2, Z_3 получаются из Z_1 круговой перестановкой индексов.

Оптимальная система одномерных подалгебр имеет вид (с учетом внешнего автоморфизма $E: t \rightarrow -t, x_i \rightarrow -x_i$)

$$X_0 + Y_1 + \beta Z_1, \quad X_0 + Z_1, \quad X_0, \quad X_1 + Y_1 + \alpha Y_2, \quad X_1, \quad (1.4)$$

$$X_1 + Y_2, \quad X_1 + Y_1 + \beta Z_1, \quad X_1 + Z_1, \quad Y_1 + \alpha M + \beta Z_1, \quad M + \alpha Z_1, \quad Z_1,$$

где α, β – произвольные постоянные, различным значениям α, β соответствуют неподобные подалгебры. Подалгебра S порождает центр в алгебре (1.3), это учтено при построении системы (1.4).

Пусть $\varphi(t)=1, g_i=1$ в (1.2), тогда соответствующая конечномерная подалгебра порождается следующими операторами

$$X_0 = \partial_t, \quad M = t\partial_t + x_i\partial_{x_i}, \quad S = \partial_\rho, \quad (1.5)$$

$$Y_i = \partial_{v_i}, \quad X_i = \partial_{x_i},$$

$$Z_1 = x_2\partial_{x_3} - x_3\partial_{x_2} + v_2\partial_{v_3} - v_3\partial_{v_2},$$

$$N = t\partial_t + v_i\partial_{v_i}, \quad T_1 = x_2\partial_{x_3} - x_3\partial_{x_2},$$

Операторы Z_2, Z_3, T_2, T_3 получаются из Z_1, T_1 круговой перестановкой индексов.

Оптимальная система одномерных подалгебр для (1.5) имеет вид (с учетом внешних автоморфизмов $E_1: t \rightarrow -t, x_i \rightarrow -x_i, E_2: \rho \rightarrow -\rho, v_i \rightarrow -v_i$):

$$X_0 + \alpha X_1 + \beta Y_1 + \beta Z_1 + \delta T_1, \quad X_0 + \alpha Z_1 + \beta(M - N), \quad (1.6)$$

$$X_1 + \alpha Y_1 + \beta T_1 + \gamma Z_1, \quad X_1 + \alpha N + \beta Z_1, \quad M + N + \alpha T_1 + \beta Z_1,$$

$$X_1 + \alpha X_2 + \beta T_1, \quad Y_1 + \beta Z_1 + \alpha T_1, \quad T_1 + \alpha Z_1, \quad Y_1 + \alpha M + \beta Z_1,$$

$$M_1 + \alpha Z_1 + \beta N, \quad Z_1, \quad N + \alpha Z_1,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – произвольные постоянные, различным значениям этих постоянных соответствуют неподобные подалгебры. S порождает центр в алгебре Ли (1.6), это учтено при построении системы (1.6).

Приведем вид инвариантных решений системы уравнений (0.2), которые можно построить на подгруппах (1.4). Они имеют следующий вид:

$Z_1 + \alpha S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$u = u(r, z, t), \quad v = v(r, z, t), \quad \omega = \omega(r, z, t), \quad \rho = \rho(r, z, t) + \alpha \theta.$$

$M + \alpha Z_1 + \beta S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$u = u(\xi, \zeta, \eta), \quad v = v(\xi, \zeta, \eta), \quad \omega = \omega(\xi, \zeta, \eta), \quad \rho = \rho(\xi, \zeta, \eta) + \beta \ln r, \\ \xi = r/t, \quad \eta = r^\alpha \exp \theta, \quad \zeta = z/t.$$

$Y_1 + \alpha M + \beta Z_1 + \gamma S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$(\alpha \beta \neq 0) \beta \omega = -\theta + \omega(\xi, \zeta, \eta), \quad v = v(\xi, \zeta, \eta), \quad u = u(\xi, \zeta, \eta), \\ \beta \rho = \rho(\xi, \zeta, \eta) - \gamma \theta \xi = r/t, \quad \eta = r^\beta \exp \alpha \beta, \quad \zeta = z - t/\alpha - \ln t, \\ (\alpha = 0) \beta \omega = -\theta + \omega(\xi, t, \eta), \quad v = v(\xi, t, \eta), \quad u = u(\xi, t, \eta), \\ \beta \rho = \rho(\xi, t, \eta) - \gamma \theta, \quad \xi = r/t, \quad \eta = t \theta \beta - z, \\ (\beta = 0) t u = x + u(\xi, \zeta, \eta), \quad v = v(\xi, \zeta, \eta), \quad \omega = \omega(\xi, \zeta, \eta), \\ \alpha \rho = \rho(\xi, \zeta, \eta) - \ln t, \quad \xi = y/t, \quad \eta = z/t, \quad \zeta = x - t/\alpha - \ln t, \\ (\alpha = \beta = 0) t u = x + u(y, z, t), \quad v = v(y, z, t), \quad \omega = \omega(y, z, t), \\ t \rho = \rho(y, z, t) + \gamma x.$$

$X_1 + Z_1 + \alpha S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$u = u(r, \xi, t), \quad v = v(r, \xi, t), \quad \omega = \omega(r, \xi, t), \quad \rho = \rho(r, \xi, t) + \alpha z, \quad \xi = z + \theta.$$

$X_1 + \alpha S$. решение на этой подалгебре следует искать в виде:

$$u = u(y, z, t), \quad v = v(y, z, t), \quad \omega = \omega(y, z, t), \quad \rho = \rho(y, z, t) + \alpha x,$$

$X_1 + Y_1 + \beta Z_1 + \gamma S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$(\beta \neq 0) u = u(r, \xi, t), \quad v = v(r, \xi, t), \quad \omega = \omega(r, \xi, t) + z, \\ \rho = \rho(r, \xi, t) + \gamma z, \quad \xi = \beta z + \theta(1 + t),$$

$$(\beta = 0)(1 + t)u = u(z, y, t), \quad v = v(z, y, t), \quad \omega = \omega(z, y, t), \quad \rho = \gamma x + \rho(z, y, t).$$

$X_1 + Y_1 + \alpha Y_2 + \beta S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$u(1 + t) = x + u(\xi, z, t), \quad t v = y + v(\xi, z, t), \quad \omega = \omega(\xi, z, t), \\ (1 + t) \rho = \rho(y, z, t) + \beta x, \quad \xi = (1 + t)y - \alpha x.$$

$X_1 + Y_2 + \beta S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде
 $u = u(\xi, z, t), v = v(\xi, z, t) + x, \omega = \omega(\xi, z, t), \rho = \rho(\xi, z, t) + \beta x, \xi = tx - y.$

$X_0 + \alpha S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$u = u(y, z, x), v = v(y, z, x), \omega = \omega(y, z, x), \rho = \rho(y, z, x) + \alpha t.$$

$X_0 + \alpha Y_1 + \beta Z_1 + \gamma S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$(|\alpha| + |\beta| \neq 0) u = u(r, \xi, \eta) + \alpha t, v = v(r, \xi, \eta), \omega = \omega(r, \xi, \eta) + \alpha t,$$

$$\rho = \rho(r, \xi, z) + \gamma t, \xi = \beta t - \theta, \eta = \alpha t \theta - \beta z,$$

где r, z, θ – цилиндрическая система координат,

$$(|\alpha| + |\beta| = 0) u = u(x, y, z), v = v(x, y, z), \omega = \omega(x, y, z), \rho = \rho(x, y, z) + \gamma t.$$

Инвариантные решения, построенные для системы уравнений (0.3) на подалгебрах оптимальной системы (1.6) выглядят следующим образом:

$T_1 + \alpha Z_1 + \beta S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$(\alpha \neq 0) u = u(r, z, t), \alpha v = v(r, z, t) + r\theta, \omega = \omega(r, z, t), \alpha \rho = \rho(r, z, t) - \beta \theta.$$

$N + \alpha Z_1 + \beta S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$u = tu(r, z, \xi), v = tv(r, z, \xi), \omega = t\omega(r, z, \xi), \alpha \rho = \rho(r, z, t) - \beta \theta, \xi = \alpha t + \theta.$$

$X_1 + \beta T_1 + \alpha X_2 + \gamma S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$u = u(\xi, z, t), v = v(\xi, z, t) - \beta xz, \omega = \omega(\xi, z, t) + \beta y^2 / (2\alpha),$$

$$\rho = \rho(\xi, z, t) + \gamma x, \xi = \alpha x - y.$$

$X_1 + \alpha N + \beta Z_1 + \gamma S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$u = tu(r, \eta, \xi), v = tv(r, \eta, \xi), \omega = t\omega(r, \eta, \xi), \rho = \rho(r, \xi, \eta) + \gamma z,$$

$$\xi = \beta z + \theta, \eta = \ln t - \alpha z.$$

$Y_1 + \alpha T_1 + \beta Z_1 + \gamma S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде
 $(\beta \neq 0)$:

$$u = u(r, z, t), \beta v = v(r, z, t) + \alpha \theta r, \omega = \omega(r, z, t), \beta \rho = \rho(r, z, t) - \gamma \theta.$$

$Y_1 + \alpha M + \beta Z_1 + \gamma S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде
 $(|\alpha| + |\beta| \neq 0)$:

$$u = u(\zeta, \eta, \xi), v = v(\zeta, \eta, \xi), \beta \omega = \omega(\zeta, \eta, \xi) - \theta, \beta \rho = \rho(\zeta, \eta, \xi) - \gamma \theta,$$

$$(\alpha \omega = \ln t + \omega(\xi, \eta, \zeta), \alpha \rho = \ln t + \rho(\xi, \eta, \zeta)), (\alpha \neq 0) \xi = r/t, \eta = z/t,$$

$$\zeta = \beta \ln t + \alpha \theta, \quad (\alpha = 0) \xi = r, \quad \eta = z, \quad \zeta = t.$$

$M + \alpha N + \beta Z_1 + \gamma S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$u = r^\alpha u(\zeta, \eta, \xi), \quad v = r^\alpha v(\zeta, \eta, \xi), \quad \omega = r^\alpha \omega(\zeta, \eta, \xi),$$

$$\rho = \rho(\zeta, \eta, \xi) + \gamma \ln r, \quad \xi = r/t, \quad \eta = z/t, \quad \zeta = \beta \ln r + \theta.$$

$X_1 + \alpha(M - N) + \beta Z_1 + \gamma S (\alpha \neq 0)$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$ru = u(\zeta, \eta, \xi), \quad rv = v(\zeta, \eta, \xi), \quad r\omega = \omega(\zeta, \eta, \xi),$$

$$\rho = \rho(\zeta, \eta, \xi) + \gamma t, \quad \xi = t + \beta \theta, \quad \eta = z/r, \quad \zeta = \ln r + \alpha t,$$

$$(\alpha = 0) \quad u = u(r, z, \xi), \quad v = v(r, z, \xi), \quad \omega = \omega(r, z, \xi),$$

$$\rho = \rho(r, z, t) + \gamma t, \quad \xi = t + \beta \theta.$$

$X_1 + \alpha Y_1 + \beta T_1 + \gamma Z_1 + \delta S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$u = u(r, \xi, t), \quad v = v(r, \xi, t) + \beta zr, \quad \omega = \omega(r, \xi, t) + \alpha z,$$

$$\rho = \rho(r, z, t) + \delta t, \quad \xi = \gamma z + \theta.$$

$M + N + \alpha T_1 + \beta Z_1 + \gamma S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$u = ru(\zeta, \eta, \xi), \quad v = \alpha r \ln r + v(\zeta, \eta, \xi), \quad \omega = r\omega(\zeta, \eta, \xi),$$

$$\rho = \rho(\zeta, \xi, \eta) + \gamma \ln r, \quad \xi = r^2/t, \quad \eta = z^2/t, \quad \zeta = \beta \ln r + \theta.$$

$X_0 + \alpha X_1 + \beta Y_1 + \gamma T_1 + \delta Z_1 + \varepsilon S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$u = u(r, \eta, \xi), \quad v = -\gamma r t + v(r, \eta, \xi), \quad \omega = \omega(r, \eta, \xi) + \beta t,$$

$$\rho = \rho(r, \xi, \eta) + \varepsilon t, \quad \xi = \alpha t - z, \quad \eta = \delta t - \theta.$$

2. Групповой анализ уравнений пластичности в случае плоской деформации. Уравнения теории пластичности в этом случае имеют вид

$$\partial_t u + uu_x + vu_y + \rho_x = \partial_x S_{11} + \partial_y S_{12}, \quad (2.1)$$

$$\partial_t v + uv_x + vv_y + \rho_y = \partial_x S_{12} + \partial_y S_{22},$$

$$S_{11} = \lambda u_x, \quad S_{22} = \lambda v_y, \quad 2S_{12} = \lambda(u_y + v_x),$$

$$S_{11}^2 + S_{22}^2 + 2S_{12}^2 = 2k_s^2, \quad u_x + v_y = 0.$$

Группа, допускаемая системой (2.1), порождается операторами:

$$X_0 = \partial_t, \quad M = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y, \quad S = \varphi(t)\partial_\rho, \quad (2.2)$$

$$L_i = f_i(t)\partial_{x_i} + f'_i(t)\partial_{v_i} - f''_i(t)\partial_\rho \quad (\text{по } i \text{ не суммировать})$$

$$Z = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v,$$

где φ, f_i – произвольные функции из класса C^∞ .

Если ограничиться конечной подалгеброй с базисом

$$X_0, \quad M, \quad S = \partial_\rho, \quad Z, \quad Y_1 = t\partial_x + \partial_u, \quad (2.3)$$

$$Y_2 = t\partial_y + \partial_v, \quad X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y,$$

то оптимальная система одномерных подалгебр для алгебры Ли (2.3) имеет вид

$$X_0 + \alpha Y_1, X_1 + \alpha Y_2, \quad X_0 + \alpha Z, \quad M + \alpha Y_1, \quad M + \alpha Z, \quad Z. \quad (2.4)$$

где α – произвольная постоянная, различным значениям α соответствуют неподобные подалгебры. Подалгебра S порождает центр в алгебре (2.4).

Инвариантные решения, построенные на одномерных подалгебрах (2.4) имеют вид

$Z + \alpha S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$u = u(r, t), \quad v = v(r, t), \quad \rho = \rho(r, z, t) + \alpha \theta.$$

$M + \alpha Z_1 + \beta S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$u = u(\xi, \eta), \quad v = v(\xi, \eta), \quad \rho = \rho(\xi, z, \eta) + \beta \ln r, \quad \xi = r/t, \quad \eta = r^\alpha \exp \theta.$$

$\alpha Y_1 + M + \beta S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$u = \alpha \ln t + u(\xi, \eta), \quad v = v(\xi, \eta), \quad \rho = \rho(\xi, \eta) + \beta \ln t, \quad \xi = x/t - \alpha \ln t, \quad \eta = y/t.$$

$X_1 + \alpha Y_2 + \beta S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$u = u(t, \eta), \quad v = v(\eta, t) + \alpha x, \quad \rho = \rho(y, z, t) + \beta x, \quad \eta = \alpha tx - y.$$

$X_0 + \alpha Z + \beta S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$u = u(r, \xi), \quad v = v(r, \xi), \quad \rho = \rho(r, \xi) + \beta t.$$

$X_0 + \alpha Y_1 + \beta S$. Решение на этой подалгебре следует искать в виде

$$u = u(y, \xi) + \alpha t, \quad v = v(y, \xi), \quad \rho = \rho(y, \xi) + \beta t, \quad \xi = \alpha t - x.$$

Рассмотрим инвариантное решение на подгруппе M . Это решение следует искать в виде

$$u = u(\xi, \eta), \quad v = v(\xi, \eta), \quad (2.5)$$

$$\rho = \rho(\xi, \eta), \quad \xi = x/t, \quad \eta = y/t.$$

После подстановки (2.5) в систему уравнений (2.1) получаем

$$\begin{aligned}(u - \xi)u_\xi + (v - \eta)u_\eta + \rho_\xi &= \partial_\xi S_{11} + \partial_\eta S_{12}, \\ (u - \xi)v_\xi + (v - \eta)v_\eta + \rho_\eta &= \partial_\xi S_{12} + \partial_\eta S_{22}, \\ S_{11} &= \lambda u_\xi, \quad S_{22} = \lambda v_\eta, \quad 2S_{12} = \lambda(u_\eta + v_\xi), \\ S_{11}^2 + S_{22}^2 + 2S_{12}^2 &= 2k_s^2, \quad u_\xi + v_\eta = 0.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Ищем решение системы (2.6) в виде

$$u = -\xi + 2f(\eta), \quad v = \eta, \quad \rho = \rho(\xi, \eta),\tag{2.7}$$

тогда из (2.6), (2.7) получаем

$$\rho = k_s \left(1 + f_\eta^2\right)^{-1/2} + \xi^2 + c(t),\tag{2.8}$$

$$2f(\eta) = \left(k_s f_\eta \left(1 + f_\eta^2\right)^{-1/2} \right)_\eta,\tag{2.9}$$

где $c(t)$ – произвольная функция от t .

Из соотношений (2.1), (2.7) получаем следующие выражения для компонент девиатора тензора напряжения

$$S_{11} = k_s \left(1 + f_\eta^2\right)^{-1/2}, \quad S_{11} = -S_{22},\tag{2.10}$$

$$S_{12} = k_s f_\eta \left(1 + f_\eta^2\right)^{-1/2}.$$

Интегрируя уравнение (2.9) имеем

$$f = \pm \left(1 - (mf^2 + c)^2\right)^{1/2} / (mf + c), \quad m = 1/k_s,\tag{2.11}$$

где c – произвольная постоянная.

С учетом (2.11) соотношения (2.10) перепишутся следующим образом

$$S_{11} = k_s (c + mf^2), \quad S_{11} = -S_{22},\tag{2.12}$$

$$S_{12} = k_s (c + mf^2)^{1/2}.$$

Решая уравнение (2.11) получаем

$$\eta(f) - \eta(0) = \pm 1 / \left(\sqrt{2m} \right) \left(\begin{aligned} &2 \left[E(\pi/2, k) - E(\varphi, k) \right] - \\ &- \left[F(\pi/2, k) - F(\varphi, k) \right] \end{aligned} \right),\tag{2.13}$$

где $\varphi = \arccos \sqrt{m}f / \sqrt{1-c}$, $k = \sqrt{1-c} / \sqrt{2}$; $E(\varphi, k), F(\varphi, k)$ эллиптические интегралы первого и второго рода.

Для того чтобы было удобнее интерпретировать решение (2.5) преобразуем переменные следующим образом

$$x' = -ax, \quad y' = -ay, \quad t' = H - at.$$

Тогда решение (2.5) запишется следующим образом

$$u = ax/(H - at) + f(ay/(H - at)), \quad (2.14)$$

$$v = -ay/(H - at).$$

Решение (2.14) можно использовать для описания пластического течения слоя, расположенного вдоль оси Ox , с первоначальной толщиной $2H$, который сжимается в направлении y жесткими и шероховатыми плитами, сближающимися с постоянной скоростью a . Тогда $2h = H - at$ толщина слоя в момент времени t .

Замечание. Решение вида (2.14) найдено в [2], при условии, что $(1/(k_s a))^{1/2}$ малый параметр.

Рассмотрим в плоском случае систему уравнений (0.3). Она имеет вид

$$\partial_t u + \rho_x = \partial_x S_{11} + \partial_y S_{12}, \quad (2.15)$$

$$\partial_t v + \rho_y = \partial_x S_{12} + \partial_y S_{22},$$

$$S_{11} = \lambda u_x, \quad S_{22} = \lambda v_y, \quad 2S_{12} = \lambda(u_y + v_x),$$

$$S_{11}^2 + S_{22}^2 + 2S_{12}^2 = 2k_s^2, \quad u_x + v_y = 0.$$

Группа, допускаемая системой (2.15), порождается операторами:

$$X_0 = \partial_t, \quad M = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y, \quad S = \varphi(t)\partial_\rho, \quad (2.16)$$

$$L_i = g_i(t)\partial_{v_i} - xg_i'(t)\partial_\rho \quad (\text{по } i \text{ не суммировать})$$

$$Z = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v, \quad N = t\partial_t + u\partial_u + v\partial_v,$$

$$T = y\partial_u - x\partial_v, \quad X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y$$

где φ, g_i – произвольные функции из класса C^∞ ; S порождает центр алгебры Ли (2.16).

Построим инвариантное решение на подгруппе N , его будем искать в виде

$$u = ta(x + 2f(y)), \quad v = -tay, \quad \rho = \rho(x, y), \quad (2.17)$$

где a – произвольная постоянная; f – искомая функция от t .

Подставляя (2.17) в уравнение (2.15) получаем

$$ax + p_x + 2af(\eta) = \left(k_s f_y (1 + f_y^2)^{-1/2} \right)_y, \quad (2.18)$$

$$-ay + p_y = \left(k_s f_y (1 + f_y^2)^{-1/2} \right)_y, \quad (2.19)$$

Из уравнений (2.18), (2.19) следует

$$p = k_s (1 + f_\eta^2)^{-1/2} + a(y^2 - x^2)/2 + c(t), \quad (2.20)$$

где $c(t)$ – произвольная функция от t .

Для определения функции f получаем следующее уравнение

$$2af = \left(k_s f_y (1 + f_y^2)^{-1/2} \right)_y, \quad (2.21)$$

Интегрируя которое получаем

$$f = \pm \left(1 - (mf^2 + c)^2 \right)^{1/2} / (mf + c), \quad m = a/k_s, \quad (2.22)$$

где c – произвольная постоянная.

С учетом (2.22) получаем следующие выражения для компонента тензора напряжений

$$\sigma_{11} = 2k_s (c + mf^2) + a(y^2 - x^2)/2 + c(t), \quad (2.23)$$

$$\sigma_{22} = a(y^2 - x^2)/2 + c(t),$$

$$S_{12} = k_s \left(1 - (c + mf^2)^2 \right)^{1/2}.$$

Известно, что уравнение (2.21) имеет единственное решение для следующей краевой задачи

$$f(-h) = f(h) = 0, \quad f(y) > 0, \quad |y| < h, \quad (2.24)$$

если m удовлетворяет неравенству

$$\gamma^2/h^2 < m < \pi^2/(2h^2), \quad \eta = \sqrt{\pi}/8 = \Gamma(3/4)/\Gamma(5/4) \approx 0,2995,$$

где $\Gamma(t)$ – гамма функция.

Это решение расположено симметрично относительно оси f , максимальное значение f , равное f^* , удовлетворяет неравенству

$$2hm(\pi - \gamma)f^* < \pi^2.$$

Решение задачи (2.21), (2.24) выписывается с помощью эллиптических интегралов

$$y(f) - y(0) = \pm 1/(\sqrt{2}m) \left(\begin{array}{l} 2[E(\pi/2, k) - E(\varphi, k)] - \\ -[F(\pi/2, k) - F(\varphi, k)] \end{array} \right), \quad (2.25)$$

где $y(0) = h$, $\varphi = \arccos \sqrt{mf} / \sqrt{1-c}$, $k = \sqrt{1-c} / \sqrt{2}$; $E(\varphi, k)$, $F(\varphi, k)$ – эллиптические интегралы первого и второго рода.

Построенное решение можно использовать следующим образом. Пластическая полоса сжимается жесткими и шероховатыми плитами с силой трения k_s , толщина полосы $2h$. При этом считается, что плиты длиннее полосы и перекрывают ее концы. Из (2.17) и (2.23) следует, что вдоль оси Oy равны нулю u , τ_{12} . Вдоль контактных прямых $y = \pm h_0$ получаем соотношения $S_{12} = k_s$, $v = \mp aht$. Следовательно, построенное решение описывает сжатие пластического слоя жесткими и шероховатыми плитами, которые сближаются с постоянным ускорением a_0 при $a = u_0/h$. Пластический слой выдавливается в стороны и течет, от середины к краям; на поверхности контакта при этом возникают большие касательные напряжения. Как и в случае решения Прандтля, они достигают предела текучести.

Условиям на свободном конце удовлетворим, как в случае решения Прандтля, в смысле Сен-Венана

$$\int_{-h}^h \sigma_{11} dy = 0.$$

Предельное напряжение сжатия вычисляется по формуле

$$2p = \int_0^l \sigma_{22}|_{y=h} dy,$$

где $2l$ – длина пластического слоя.

Если в формуле (2.22) положить $c = -1$, то решение уравнения (2.21) выписывается в элементарных функциях

$$y + c = (m)^{-1/2} \left[(2)^{-1/2} \ln \left| \left(\sqrt{2} + (2 - mf^2)^{1/2} \right) / (\sqrt{mf}) \right| - (2 - mf^2)^{1/2} \right]. \quad (2.26)$$

Здесь c произвольная постоянная.

Решение (2.26) можно использовать для описания пластических течений двух типов:

А) Пластическое течение материала сжимаемого двумя жесткими плитами. Одна из плит движется с постоянным ускорением и является шероховатой, а вторая плита – гладкая неподвижно расположена вдоль оси Oy .

В) Пластическое полупространство сжимается одной плитой. Эта плита является жесткой и шероховатой и движется с постоянным ускорением. При этом значение S_{12} стремится к нулю при y стремящемся к бесконечности.

3. Пространственные решения. Рассмотрим уравнения, описывающие медленные нестационарные пластические течения

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_l}{\partial t} &= \sigma_{ij',j} \quad (i, j = 1, 2, 3), \\ 3\rho &= \sigma_{ii}, \quad S_{ij} = -\rho\delta_{ij} + \sigma_{ij}, \\ S_{ij}S_{ij} &= 2k_s^2, \quad S_{ij} = \lambda e_{ij}, \\ v_{i',j} &= 0, \quad 2e_{ij} = v_{i',j} + v_{j',i}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Построим инвариантное решение системы (3.1) на подгруппе

$$N = t\partial_t + u\partial_u + v\partial_v + \omega\partial_\omega.$$

Решение в этом случае следует искать в виде:

$$\begin{aligned}u &= atx, \quad v = aty, \quad \omega = -2atz + \sqrt{6}f(x, y)t, \\ \rho &= cz + \rho(x, y),\end{aligned}\tag{3.2}$$

Тогда компоненты девиатора тензора напряжений равны

$$\begin{aligned}S_{11} &= S_{22} = \kappa\lambda, \quad S_{12} = 0, \quad S_{33} = -2\kappa\lambda, \\ S_{13} &= \kappa\lambda f_x, \quad S_{23} = \kappa\lambda f_y, \quad \kappa = \text{sign}a, \quad \lambda = k_s / \left(\sqrt{6}|a| \right) \left(1 + (\nabla f)^2 \right)^{-1/2}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

При этом функция f определяется из уравнения

$$2\sqrt{6}af = k_s \kappa \text{div} \left(\nabla f \left(1 + (\nabla f)^2 \right)^{-1/2} \right) + c,\tag{3.4}$$

где c – произвольная постоянная, а ρ определяется из соотношений

$$ax = \rho_x + \partial_x S_{11}, \quad ay = \rho_y + \partial_y S_{22}.\tag{3.5}$$

Из уравнений (3.5) с учетом (3.2) получаем

$$\rho = -\kappa\lambda + 1/2a(x^2 + y^2) + cz.\tag{3.6}$$

Следовательно, для определения поля скоростей (3.2) необходимо решить уравнение (3.4) с соответствующими граничными условиями.

2. Запишем уравнение (3.4) в виде

$$bf + c_0 = \text{div} \left(\nabla f \left(1 + (\nabla f)^2 \right)^{-1/2} \right),\tag{3.7}$$

где $b = 2\sqrt{6}|a|/k_s, c_0 = c/(2\sqrt{6}|a|)$.

Используем решение (3.2) для описания пластических течений в цилиндрическом канале, образующие которого параллельны оси z , а направ-

ляющая задана уравнением $F(x, y) = 0$. При этом предполагается, что на стенках канала задано равномерно распределенное касательное напряжение

$$\tau_k = k_s \cos \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi/2,$$

Тогда соответствующее граничное условие принимает вид

$$\partial f / \partial n \left(1 + (\nabla f)^2 \right)^{-1/2} = k_s \cos \alpha, \quad (3.8)$$

где n – внутренняя нормаль к кривой $F(x, y) = 0$. Заметим, что задача (3.7)–(3.8) возникает при изучении поверхностей равновесия в гидромеханике невесомости [6]. При этом l характерный размер канала, тогда величина $bl/2$ называется числом Бонда и определяет соотношение между гравитационными и капиллярными силами.

3. Трудно в общем случае ожидать, что удастся решить задачу (3.7)–(3.8) в аналитическом случае. Ее удастся решить приближенными аналитическими и численными методами [3]. В частности, при $b \gg 1$ решение задачи (3.7)–(3.8) можно искать в виде асимптотического разложения.

$$f(x, y) \approx \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \omega_l(x, y) + \varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l v_l(h/\varepsilon, \varphi), \quad \varepsilon = 1/\sqrt{6},$$

где φ – параметр, отсчитываемый вдоль направляющей $F = 0$; а h – расстояние от точки до направляющей, отсчитываемое по нормали к $F = 0$. При этом функции ω_l получаются из условия формального удовлетворения уравнению (3.7), а функции v_l , типа погранслоя, компенсируют невязку в граничном условии (3.8).

Замечание. Согласно [3] для решения задачи (3.7)–(3.8) можно использовать и вариационные методы, в частности, метод локальных вариаций.

4. Осесимметричная задача. Если рассмотреть течение в круглом цилиндре радиуса r_0 , то для исследования таких задач можно воспользоваться методом, описанным в п. 3 при $b \gg 1$. Второй случай который легко поддается изучению – это $\nabla f \ll 1$. Если это условие выполнено, то уравнение (3.7) после линеаризации принимает вид

$$rf'' + f' - rbf = rc. \quad (4.1)$$

Решение этого уравнения, ограниченное при $r = 0$ имеет вид

$$f = c_0 I_0(r\sqrt{6}) - c/b, \quad (4.2)$$

где I_0 – функция Бесселя мнимого аргумента. Произвольная постоянная c_0 определяется из граничного условия (3.8), которое после линеаризации запишется следующим образом

$$f_r|_{r=r_0} = k_s \cos \alpha$$

Постоянная c определится из условия сохранения объема.

В рассмотренном случае поле скоростей имеет вид

$$u_r = atr, u_\theta = 0, u_z = -2atz + 2\sqrt{6}af.$$

Компоненты тензора скоростей деформации и тензора напряжений равны

$$e_r = at, e_\theta = at, e_{r\theta} = e_{z\theta} = 0,$$

$$2e_{rz} = \sqrt{6}f'at, e_z = -2at,$$

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -\rho + k_s/\sqrt{3}, \sigma_z = -\rho - 2k_s/\sqrt{3},$$

$$\tau_{rz} = f'k_s/\sqrt{2}, \tau_{r\theta} = \tau_{z\theta} = 0, \rho = 1/2ar^2 + cz + c(t).$$

Заметим, что условие $\nabla f \ll 1$, реализуется в частности, при $|\alpha - \pi/2| \ll 1$, т. е. при малом трении на стенках канала.

Замечание. Решение (4.2) можно использовать для описания пластического течения в сжимаемой цилиндрической втулке.

Наиболее просто поддается анализу плоская задача. В этом случае уравнение (4.1) решается квадратурой и построенное решение можно использовать для описания пластического течения между жесткими плитами, которые сближаются с постоянным ускорением. В плоском случае уравнение (4.1) можно записать в виде

$$\left(f'(1 + f'^2)^{-1/2} \right)' - bf = c_0. \quad (4.3)$$

Уравнение (4.3) совпадает с уравнением (2.9), поэтому функция f имеет такой же вид, как и в формуле (2.25). Следовательно, в этом случае поле скоростей имеет вид

$$u = atx, v = aty, \omega = -2atz + \sqrt{6}f(x)t,$$

тогда компоненты тензора напряжений равны

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 1/2a(x^2 + y^2) + cz, \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0,$$

$$\sigma_{33} = \sqrt{2}/\sqrt{3}k_s/a \left| b/2f^2 + c_0f + c_1 \right| + \sigma_{11},$$

$$\sigma_{13} = k_s/(\sqrt{6}a) \left(1 - \left(b/2f^2 + c_0f + c_1 \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Это решение можно использовать для описания пластического течения бруса в форме параллелепипеда с поперечными размерами $2h$ на $2h$ и

длинной $2l$, сжатого четырьмя жесткими плитами, сближающимися с постоянным ускорением. Плиты, параллельные плоскости oxz , сближаются вдоль оси Oy – гладкие; плиты параллельные плоскости Oyz , сближаются вдоль оси Ox – шероховатые. Если положить $a = \omega/h$, то ω ускорение, с которым плиты сближаются вдоль осей Ox и Oy . Постоянные c_0 и c_1 определяются из условия несжимаемости материала и условия на свободном конце $z = 0$. Это условие, как и решение Прандтля, выполняется в смысле Сен-Венана.

5. Антиплоские течения. Предположим, что среда находится в условиях антиплоского пластического течения, поэтому решение уравнений (0.1) следует искать в виде [4]

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \omega = \omega(x, y, t), \quad \rho = 0. \quad (5.1)$$

Подставляя соотношения (5.1) в уравнения (0.1) получаем уравнение, описывающее антиплоское пластическое течение:

$$\omega_t = \left(\omega_x / (\omega_x^2 + \omega_y^2)^{1/2} \right)_x + \left(\omega_y / (\omega_x^2 + \omega_y^2)^{1/2} \right)_y. \quad (5.2)$$

Для отыскания точных решений уравнения (5.2) найдем группу непрерывных преобразований, им допускаемую. Вычисляя ее согласно методике [1], получаем, что группа порождается операторами

$$\begin{aligned} X_1 &= y\partial_x - x\partial_y, \quad X_2 = t\partial_t + \omega\partial_\omega, \\ X_3 &= t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y, \quad X_4 = \partial_t, \\ X_5 &= \partial_\omega, \quad X_6 = \partial_x, \quad X_7 = \partial_y. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Для нахождения существенно различных инвариантных решений уравнения (5.2) перечислим все необходимые одномерные подалгебры для алгебры Ли с базисом (5.3):

- а) $X_1 + \alpha X_2 + \beta X_3$;
- б) $X_1 + \alpha X_3 + \beta X_5$;
- в) $X_1 + \alpha X_4 + \beta X_5$;
- г) $X_4 + \alpha X_5 + \beta X_6$;
- д) $X_5 + \alpha X_6$;
- е) $X_3 + \alpha X_5$;
- ж) $X_2 + \alpha X_3$;
- з) $X_2 + \alpha X_6$;
- и) X_6 ;
- к) X_5 .

α, β – произвольные постоянные.

Рассмотрим стационарное решение, инвариантное относительно подалгебры X_4 . Оно удовлетворяет уравнению

$$\omega_t = \left(\omega_x / (\omega_x^2 + \omega_y^2)^{1/2} \right)_x + \left(\omega_y / (\omega_x^2 + \omega_y^2)^{1/2} \right)_y = 0, \quad (5.4)$$

решение которого может быть использовано для описания пластического течения длинного цилиндрического тела с произвольной формой поперечного сечения под действием нагрузок, направленных по образующим цилиндра и постоянных вдоль образующих.

Внешние нагрузки, приложенные на торцах стержня, статистически эквивалентны крутящему моменту

$$G_3 = \iint (xS_{23} - yS_{13}) dx dy.$$

Здесь ось z совпадает с осью цилиндра, оси x, y лежат в плоскости поперечного сечения, ограниченного контуром Γ . Пусть вектор нормали к боковой поверхности имеет вид $(n_1, n_2, 0)$. Так как внешние нагрузки направлены вдоль образующей, то

$$n_1 S_{13} + n_2 S_{23} \big|_{\Gamma} = 0. \quad (5.5)$$

Следовательно, необходимо решить задачу (5.4) (5.5). После дифференцирования и приведения подобных (5.4) сводится к уравнению

$$\omega_y^2 \omega_{xx} - 2\omega_x \omega_y \omega_{xy} + \omega_x^2 \omega_{yy} = 0, \quad (5.6)$$

которое, как показано в [5], допускает бесконечномерную группу преобразований Ли-Беклунда. Поэтому (5.6) может быть линеаризовано. Например, это можно сделать с помощью преобразования Лежандра. Но возможен и другой способ изучения этого уравнения.

Введем новые искомые функции $u = \omega_x$, $v = \omega_y$, тогда (5.5), (5.6) удобно записать так

$$v^2 u_x - 2uvu_y + u^2 v_y = 0, \quad u_y - v_x = 0; \quad (5.7)$$

$$n_1 u + n_2 v \big|_{\Gamma} = 0. \quad (5.8)$$

Если считать u, v компонентами вектора скорости, то (5.7) описывает установившееся плоскопараллельное изоэнтропическое течение газа [6]. Граничное условие (5.8) означает, что газ течет в длинной трубе с непроницаемыми стенками.

Следовательно, задача об антиплоском установившемся пластическом течении (5.2), (5.5) сводится к задаче (5.7), (5.8) для уравнений газовой динамики. Необходимо отметить, что задача (5.7), (5.8) хорошо разработана. Для ее решения использованы мощные аналитические и численные методы [6].

Замечание. Кроме граничных условий (5.8) возможны и другие. Рассмотрим цилиндрическое тело, нагруженное на боковой поверхности усилиями, равномерно распределенными и направленными вдоль образующих. Тогда на боковой поверхности [7] получим следующее условие:

$$n_1 u + n_2 v|_r = f(x, y). \quad (5.9)$$

Остановимся на некоторых нестационарных инвариантных решениях, которые, с нашей точки зрения, представляют определенный интерес.

Решение на подалгебре X_2 следует искать в виде

$$\omega = tf(x, y),$$

тогда уравнение (5.2) запишется следующим образом

$$f = \left(f_x / (f_x^2 + f_y^2)^{1/2} \right)_x + \left(f_y / (f_x^2 + f_y^2)^{1/2} \right)_y.$$

Если f искать в виде $f = \varphi(\theta)/r$ (r, φ – полярные координаты), то для определения функции φ получим уравнение

$$\varphi''\varphi^2 - \varphi^3 - 2\varphi\varphi'^2 = \varphi(\varphi^2 + \varphi'^2)^{3/2},$$

которое можно использовать для описания пластического течения цилиндра (поперечное сечение его задано уравнением $r = \psi(\theta)$). В качестве граничного условия можно взять (5.9).

Пусть теперь $\omega = ax + f(bt - y)$, тогда (5.2) сведется к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$bf' = \left(f'(a^2 + f'^2)^{-1/2} \right)_\xi, \quad \xi = bt - y.$$

Решим это уравнение, полагая равными нулю произвольные постоянные, которые появляются при интегрировании. В результате получаем

$$\pm \left((1 - b^2 f^2)^{1/2} \right) - \ln \left| \left(1 + (1 - b^2 f^2)^{1/2} / (bf) \right) \right| = |ab|\xi.$$

Это решение можно использовать для описания пластической волны в слое $|x| < h$, если на его границе задано касательное напряжение S_{23} .

В заключение этого пункта приведем вид других инвариантных решений уравнения (5.2), которые можно построить на подалгебрах «а»–«н»:

а) $\omega = t^{\alpha/(2\alpha+\beta)} f(r \exp(-\beta\theta)), t \exp(-(2\alpha+\beta)\theta)$ при $2\alpha + \beta \neq 0$;

$\omega = f(\beta\theta - \ln r, t)/r^{1/2}$, при $2\alpha + \beta = 0$;

б) $\omega = \beta\theta + f(t \exp(-\alpha\theta), r \exp(-\alpha\theta))$;

- в) $\omega = \beta\theta + f(\alpha t - \theta, r)$;
 г) $\omega = \alpha t + f(\beta t - x, y)$;
 д) $\omega = \alpha x + f(t, y)$;
 е) $\omega = \alpha \ln t + f(x/t, y/t)$;
 ж) $\omega = t^{1/(2+\alpha)} f(\theta, r^{2+\alpha} t^{-\alpha})$ при $2 + \alpha \neq 0$;
 $\omega = r^{1/2} f(t, \theta)$ при $2 + \alpha = 0$;
 з) $\omega = t^{1/2} f(y, (\alpha/2) \ln t - x)$;
 и) $\omega = f(t, y)$.

Здесь α, β – произвольные постоянные.

Заключение. Использование симметрий не ограничивается рассмотренными примерами. Укажем кратко еще один способ использования группы непрерывных преобразований. Для этого вычислим группу точечных симметрий допускаемых уравнениями (0.2). Сделаем это по известной методике Ли-Овсянникова, которая уже применяется к уравнениям пластичности в [1]. Рассмотрим группы точечных симметрий порождается операторами L_i из алгебры Ли (1.1). Замечательным свойством этих точечных симметрий является то, что они решение системы (0.2) снова переводят в точные решения этой же системы. Пусть t, x_i, v_i, p – исходные координаты, тогда они преобразуются в новые координаты t', x'_i, v'_i, p' с помощью преобразований, соответствующих операторам (5)

$$t' = t(a_0 + \exp a_1), \quad x' = (\exp a_1 + a_{i+2} f_i(t)), \quad v' = v_i + a_{i+2} \dot{f}_i(t), \\ p' = p + \sum_{i=1}^3 \ddot{f}_i(t) a_{i+2}.$$

Здесь a_i групповые параметры, которые непрерывно меняются в некоторой окрестности нуля. Эти преобразования можно использовать для построения новых решений системы (0.2) [8]. Другие примеры использования симметрий, допускаемых уравнениями пластичности можно найти в статьях и монографиях [9–16].

Библиографические ссылки

1. Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск : Наука, 1985. 141 с.
2. Быковцев Г. И. О сжатии пластического слоя жесткими шероховатыми плитами с учетом сил инерции // Изв. АН СССР ОТН, мех. и маш., 1960. № 6. С. 140–142.
3. Бабский В. Г., Колпачевский Н. Д., Мышкис А. Д. Гидродинамика невесомости. М. : Наука, 1976.

4. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М. : Наука, 1979. 744 с.
5. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М. : Наука, 1979. 280 с.
6. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М. : Наука, 1973. 847 с.
7. Сенашов С. И. Антиплоское пластическое течение // Журнал ПМТФ. 1986. № 1. С. 139–142.
8. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Новые решения динамических уравнений идеальной пластичности // Сибирский журнал индустриальной математики. Т. 22, № 4 (80). С. 89–91.
9. Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. 193 с.
10. Сенашов С. И., Гомонова О. В., Яхно А. Н. Математические вопросы двумерных уравнений идеальной пластичности ; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2012. 139 с.
11. Senashov S. I., Yakchno A. N. Deformation of characteristic curves of the plane ideal plasticity equations by point symmetries // Nonlinear analysis. 2009. No. 71. Pp. 1274–1284.
12. Senashov S. I., Savostyanova I. L., Filyushina E. V. About torsion of parallelepiped around three axis // Сибирский журнал науки и технологий. Т. 18, № 3. С. 545–551.
13. Senashov S. I., Yakchno A. N. Some symmetry group aspects of a perfect plane plasticity system // J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013) 355202.
14. Senashov S. I., Yakchno A. N. Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity SIGMA 8 (2012), 071, 16 p. URL: <http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2012.071>. *Special Issue “Geometrical Methods in Mathematical Physics”*
15. Сенашов С. И., Яхно А. Н., Яхно Л. В. Построение новых решений и их характеристик для двумерной идеальной пластичности с помощью симметрий // Вестник ЧГПУ. 2010. № 2 (8). С. 473–491.
16. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Новые трехмерные пластические течения, соответствующие однородному напряженному состоянию // Сибирский журнал индустриальной математики. 2019. Т. XXII, № 3 (71). С. 114–117.

References

1. Annin B. D., Bytev V. O., Senashov S. I. *Gruppovye svoystva uravneniy uprugosti i plastichnosti* [Group properties of the equations of elasticity and plasticity]. Novosibirsk, Nauka, 1985, 141 p.
2. Bykovtsev G. I. [On the compression of a plastic layer by rigid rough plates taking into account inertial forces]. *Izv. AN SSSR OTN, mekh. i mash.*, 1960, Vol. 6, Pp. 140–142. (In Russ.)

3. Babskiy V. G., Kolpachevskiy N. D., Myshkis A. D. *Gidrodinamika nevesomosti* [Hydrodynamics of weightlessness]. Moscow, Nauka, 1976.
4. Rabotnov Yu. N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of a deformable solid]. Moscow, Nauka, 1979, 744 p.
5. Ibragimov N. Kh. *Gruppy preobrazovaniy v matematicheskoy fizike* [Transformation groups in mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1979, 280 p.
6. Loytsyanskiy L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow, Nauka, 1973, 847 p.
7. Senashov S. I. [Antiplane plastic flow]. *Zhurnal PMTF*, 1986, No. 1, Pp. 139–142. (In Russ.)
8. Senashov S. I., Savost'yanova I. L. [New solutions of dynamic equations of ideal plasticity]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*. Vol. 22, No. 4 (80), P. 89–91. (In Russ.)
9. Kiryakov P. P., Senashov S. I., Yakhno A. N. *Prilozhenie simmetriy i zakonov sokhraneniya k resheniyu differentsial'nykh uravneniy* [Application of symmetries and conservation laws to the solution of differential equations]. Novosibirsk, Izd-vo SORAN, 2001, 193 p.
10. Senashov S. I., Gomonova O. V., Yakhno A. N. *Matematicheskie voprosy dvumernykh uravneniy ideal'noy plastichnosti* [Mathematical problems of two-dimensional equations of ideal plasticity]. Sib. gos. aerokosmich. un-t, Krasnoyarsk, 2012, 139 p.
11. Senashov S. I., Yakchno A. N. Deformation of characteristic curves of the plane ideal plasticity equations by point symmetries. *Nonlinear analysis*. 2009, No. 71, Pp. 1274–1284.
12. Senashov S. I., Savostyanova I. L., Filyushina E. V. About torsion of parallelepiped around three axis. *Sibirskiy zhurnal nauki i tekhnologii*, Vol. 18, No. 3, Pp. 545–551.
13. Senashov S. I., Yakchno A. N. Some symmetry group aspects of a perfect plane plasticity system. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2013, No. 46, P. 355202.
14. Senashov S. I., Yakchno A. N. Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity *SIGMA* 8. 2012, No. 071, 16 p. URL: <http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2012.071> Special Issue “Geometrical Methods in Mathematical Physics”.
15. Senashov S. I., Yakhno A. N., Yakhno L. V. [Building new solutions and their characteristics for two-dimensional ideal plasticity using symmetries] *Vestnik ChGPU*. 2010, No. 2 (8), Pp. 473–491. (In Russ.)
16. Senashov S. I., Savost'yanova I. L. [New three-dimensional plastic flows corresponding to a uniform stress state]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*. 2019, Vol XXII, No. 3 (71), Pp. 114–117. (In Russ.)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СУММИРОВАНИЯ КОНЕЧНЫХ СУММ

Т. А. Ширяева¹, А. К. Шлепкин^{2*}, А. А. Шлепкин³

^{1,2}Красноярский государственный аграрный университет
Российская Федерация, 660049, г. Красноярск, просп. Мира, 90

³Сибирский федеральный университет

³Российская Федерация, 660041, Красноярск, просп. Свободный, 79

*E-mail: ak_kgau@mail.ru

Конечные суммы находят применение в различных областях математики. Арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия – примеры конечных. Формулы суммирования указанных прогрессий широко используется при различных исследованиях. Напомним, что определенный интеграл есть предел конечных сумм. Литература посвященная методам суммирования конечных сумм обширна. В работе предложен метод суммирования степеней первых n членов натурального ряда. На основании этого метода получены формулы суммирования. Хотя полученные формулы могут быть выведены другими (известными) способами, сам метод заслуживает внимания, поскольку основан на некоторых геометрических соображениях. Приведем полученную формулу суммирования 7-х степеней первых n -членов натурального ряда:

$$S_n^{(7)} = \frac{n^2(6n^6 + 24n^5 + 28n^4 - 14n^2 + 4)}{48}.$$

Ключевые слова: суммирование конечных сумм.

ABOUT FINAL AMOUNTS

T. A. Shiryaeva¹, A. K. Shlepkina^{2*}, A. A. Shlepkina³

^{1,2}Krasnoyarsk State Agrarian University
90, Mira Av., Krasnoyarsk, 660049, Russian Federation

³Siberian Federal University

79, Svobodny Av., Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation

*E-mail: ak_kgau@mail.ru

Finite sums find application in various fields of mathematics. Arithmetic progression, geometric progression – examples of finite. The formula for summing these progressions is widely used in various studies. Recall that a

definite integral is the limit of finite sums. The literature devoted to methods of summation of finite sums is extensive. The paper proposes a method for summing the powers of the first n terms of a natural series. On the basis of this method, summation formulas are obtained. Although the resulting formulas can be derived in other (known) ways the method itself is noteworthy because it is based on some geometric considerations. We present the resulting formula for summing the 7th powers of the first n -terms of the natural series:

$$S_n^{(7)} = \frac{n^2(6n^6 + 24n^5 + 28n^4 - 14n^2 + 4)}{48}.$$

Keywords: summation of final sums.

1. Введение

Конечные суммы находят применение в различных областях математики. Арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия – примеры конечных. Формулы суммирования указанных прогрессий широко используется при различных исследованиях. Напомнить, что определенный интеграл есть предел конечных сумм. Литература посвященная методам суммирования конечных сумм обширна. В работе предложен метод суммирования степеней первых n членов натурального ряда. На основании этого метода получены формулы суммирования. Хотя полученные формулы могут быть выведены другими (известными) способами сам метод заслуживает внимания, поскольку основан на некоторых геометрических соображениях.

2. Вывод формулы суммирования первых степеней

$$S_n^{(1)} = 1 + 2 + 3 + \dots + n.$$

Сумма элементов приведенного ниже треугольника, это в точности $S_n^{(1)}$:

$$\begin{array}{c} 1^0 \\ 2^0 2^0 \\ 3^0 3^0 3^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ n^0 n^0 n^0 \dots n^0 \end{array}$$

Просуммируем элементы приведенного треугольника по столбцам

$$\begin{aligned} S_n^{(1)} &= n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + (n - (n-1)) = \\ &= nn - (1 + 2 + 3 + \dots + n) + n = nn - S_n^{(1)} + n. \end{aligned}$$

Следовательно, $2S_n^{(1)} = n^2 + n$ и

$$S_n^{(1)} = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_n^{(1)} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

3. Вывод формулы суммирования вторых степеней

$$S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2.$$

Сумма элементов приведенного ниже треугольника, это в точности $S_n^{(2)}$:

$$\begin{array}{c} 1^1 \\ 2^1 2^1 \\ 3^1 3^1 3^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ n^1 n^1 n^1 \dots n^1 \end{array}$$

Просуммируем элементы приведенного треугольника по столбцам:

$$\begin{aligned} & \frac{(1+n)n}{2} + \frac{(2+n)(n-1)}{2} + \frac{(3+n)(n-2)}{2} + \dots + \\ & + \frac{(n+n)(n-(n-1))}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

$$S_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$S_n^{(2)} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

4. Вывод формулы суммирования третьих степеней

$$S_n^{(3)} = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3.$$

Сумма элементов приведенного ниже треугольника, это в точности $S_n^{(3)}$:

$$\begin{array}{c} 1^2 \\ 2^2 2^2 \\ 3^2 3^2 3^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ n^2 n^2 n^2 \dots n^2 \end{array}$$

Просуммируем элементы приведенного треугольника по столбцам.

$$\begin{aligned} S_n^{(3)} &= S_n^{(2)} + (S_n^{(2)} - S_1^{(2)}) + (S_n^{(2)} - S_2^{(2)}) + \dots + (S_n^{(2)} - S_{n-1}^{(2)}) = \\ &= n \cdot S_n^{(2)} - (S_1^{(2)} + S_2^{(2)} + \dots + S_{n-1}^{(2)}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n \cdot S_n^{(2)} - \sum_{k=1}^{n-1} S_k^{(2)} = n \cdot S_n^{(2)} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \\
&= \begin{cases} (k^2 + k)(2k+1) \\ 2k^3 + k^2 + 2k^2 + k \end{cases} = n \cdot S_n^{(2)} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6} = \\
&= n \cdot S_n^{(2)} - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-1} k^3 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n-1} k = \\
&= n \cdot S_n^{(2)} - \left[\left(\frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-1} k^3 + \frac{1}{3} n^3 \right) - \frac{1}{3} n^3 \right] - \frac{1}{2} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{1}{6} \frac{(n-1)n}{2}, \\
S_n^{(3)} &= n \cdot S_n^{(2)} + \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{3} S_n^{(3)} - \frac{(n-1)n(2n+1-1)}{12}, \\
\frac{4}{3} S_n^{(3)} &= \frac{n \cdot n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^3}{3} - \frac{(n-1)2n^2}{12} = \\
&= \frac{n^2[2(n+1)(2n+1) + 2(n+1)]}{12} = \frac{2n^2(n+1)[2n+1+1]}{12} = \\
&= \frac{2n^2(n+1)2(n+1)}{12} = \frac{n^2(n+1)^2}{3}, \\
\frac{4}{3} S_n^{(3)} &= \frac{n^2(n+1)^2}{3}. \\
S_n^{(3)} &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \\
S_n^{(3)} &= \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2.
\end{aligned}$$

5. Вывод формулы суммирования 4-х степеней

$$S_n^{(4)} = 1^4 + 2^4 + \dots + n^4.$$

Представим $S_n^{(4)}$ в виде суммы элементов следующего треугольника:

$$\begin{array}{c}
1^3 \\
2^3 2^3 \\
3^3 3^3 3^3 \\
\vdots \\
\vdots \\
n^3 n^3 n^3 \dots n^3
\end{array}$$

Просуммируем элементы треугольника по столбцам:

$$\begin{aligned}
 S_n^{(4)} &= S_n^{(3)} + (S_n^{(3)} - S_1^{(3)}) + (S_n^{(3)} - S_2^{(3)}) + \dots + (S_n^{(3)} - S_{n-1}^{(3)}) = \\
 &= n \cdot S_n^{(3)} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2(k+1)^2}{4} = n \cdot S_n^{(3)} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^4 + 2k^3 + k^2}{4} = \\
 &= n \cdot S_n^{(3)} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} k^4 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k^3 - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = n \cdot S_n^{(3)} - \frac{1}{4} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}, \\
 \frac{5}{4} S_n^{(4)} &= n \cdot S_n^{(3)} + \frac{n^4}{4} - \frac{3(n+1)^2 \cdot n^2 + (n-1)n(2n-1)}{24}, \\
 \frac{5}{4} S_n^{(4)} &= \frac{n \left[24 \frac{(n+1)^2 \cdot n^2 + 6n^3 - (3n^3 - 6n^2 + 3n + 2n^2 - n - 2n + 1)}{4} \right]}{24}, \\
 \frac{5}{4} S_n^{(4)} &= \frac{n[6n^4 + 12n^3 + 6n^2 + 6n^3 - 3n^3 + 4n^2 - 1]}{24}, \\
 \frac{5}{4} S_n^{(4)} &= \frac{n[6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1]}{24}. \\
 S_n^{(4)} &= \frac{n(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1)}{30}. \\
 S_n^{(4)} &= \frac{1}{5} n^5 + \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{30} n.
 \end{aligned}$$

6. Вывод формулы 5-х степеней

$$S_n^{(5)} = 1^5 + 2^5 + \dots + n^5$$

Сумма элементов приведенного ниже треугольника, это в точности $S_n^{(5)}$:

$$\begin{array}{c}
 1^4 \\
 2^4 2^4 \\
 3^4 3^4 3^4 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 n^4 n^4 n^4 \dots n^4
 \end{array}$$

Просуммируем элементы приведенного треугольника по столбцам:

$$\begin{aligned}
 S_n^{(5)} &= S_n^{(4)} + (S_n^{(4)} - S_1^{(4)}) + (S_n^{(4)} - S_2^{(4)}) + \dots + (S_n^{(4)} - S_{n-1}^{(4)}) = \\
 &= n \cdot S_n^{(4)} - (S_1^{(4)} + S_2^{(4)} + \dots + S_{n-1}^{(4)}) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n \cdot S_n^{(4)} - \sum_{k=1}^{n-1} S_k^{(4)} = nS_n^{(4)} - \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(6k^4 + 15k^3 + 10k^2 - 1)}{30} \right], \\
\frac{6}{5} S_n^{(5)} &= \frac{(2n-1)}{2} n S_n^{(4)} - \frac{1}{3} S_n^{(3)} + \frac{1}{30} S_n^{(1)} + \left[\frac{1}{5} n^5 + \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{30} n \right] = \\
&= \frac{(2n-1)}{2} \cdot \frac{n(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1)}{30} - \frac{1}{3} \frac{n^2(n+1)^2}{n} + \frac{1}{30} \frac{n(n+1)}{2} + \\
&\quad + \frac{(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)}{30} - \frac{n}{60} \times \\
&\quad \times [(2n-1)(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1) - 5n(n+1)^2 + \\
&\quad + (n+1)12n^4 + 30n^3 + 20n^2 - 2] = \frac{n}{60} [12n^5 + 36n^4 + 30n^3 - 6n] = \\
&= \frac{6n^2}{60} [2n^4 + 6n^3 + 5n^2 - 1] = 6S_n^{(5)}. \\
S_n^{(5)} &= \frac{n^2(2n^4 + 6n^3 + 5n^2 - 1)}{12}. \\
S_n^{(5)} &= \frac{1}{6} n^6 + \frac{1}{2} n^5 + \frac{5}{12} n^4 - \frac{1}{12} n^2.
\end{aligned}$$

7. Вывод формулы суммирования 6-той степени

$$S_n^{(6)} = 1^6 + 2^6 + \dots + n^6.$$

Сумма элементов приведенного ниже треугольника, это в точности $S_n^{(6)}$:

$$\begin{array}{c}
1^5 \\
2^5 2^5 \\
3^5 3^5 3^5 \\
\vdots \\
n^5 n^5 n^5 \dots n^5
\end{array}$$

Просуммируем элементы приведенного треугольника по столбцам.

$$\begin{aligned}
S_n^{(6)} &= S_n^{(5)} + (S_n^{(5)} - S_1^{(5)}) + (S_n^{(5)} - S_2^{(5)}) + \dots + (S_n^{(5)} - S_{n-1}^{(5)}) = \\
&= n \cdot S_n^{(5)} - (S_1^{(5)} + S_2^{(5)} + \dots + S_{n-1}^{(5)}) = \\
&= n \cdot S_n^{(5)} - \sum_{k=1}^{n-1} S_k^{(5)} = n \cdot S_n^{(5)} - \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2(2k^4 + 6k^3 + 5k^2 - 1)}{12} \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n \cdot S_n^{(5)} - \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k^6 + 6k^5 + 5k^4 - k^2}{12} \right] = \\
&= n \cdot S_n^{(5)} - \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n-1} k^6 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k^5 - \frac{5}{12} \sum_{k=1}^{n-1} k^4 + \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \\
&= n \cdot S_n^{(5)} - \frac{1}{6} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (k^6 + n^6 - n^6) \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (k^5 + n^5 - n^5) \right) - \\
&\quad - \frac{5}{12} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (k^4 + n^4 - n^4) \right) + \frac{1}{12} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + n^2 - n^2) \right) = \\
&= n \cdot S_n^{(5)} - \frac{1}{6} S_n^{(6)} + \frac{1}{6} n^6 - \frac{1}{2} S_n^{(5)} + \frac{1}{2} n^5 - \\
&\quad - \frac{5}{12} S_n^{(4)} + \frac{5}{12} n^4 + \frac{1}{12} S_n^{(2)} - \frac{1}{12} n^2 = S_n^{(6)}, \\
\frac{7}{6} S_n^{(6)} &= n \cdot S_n^{(5)} - \frac{1}{2} S_n^{(5)} - \frac{5}{12} S_n^{(4)} - \frac{1}{12} S_n^{(2)} + \\
&\quad + \left[\frac{1}{6} n^6 + \frac{1}{2} n^5 + \frac{5}{12} n^4 - \frac{1}{12} n^2 \right], \\
\frac{7}{6} S_n^{(6)} &= \frac{(2n-1)}{2} S_n^{(5)} - \frac{5}{12} S_n^{(4)} - \frac{1}{12} S_n^{(2)} + \\
&\quad + \left[\frac{1}{6} n^6 + \frac{1}{2} n^5 + \frac{5}{12} n^4 - \frac{1}{12} n^2 \right], \\
\frac{7}{6} S_n^{(6)} &= \frac{(2n-1)}{2} \cdot \frac{n^2(2n^4 + 6n^3 + 5n^2 - 1)}{12} - \frac{5}{12} \times \\
&\quad \times \frac{n(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1)}{30} + \frac{1}{12} \times \\
&\quad \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2)}{12}, \\
\frac{7}{6} S_n^{(6)} &= \frac{60n^7 + 210n^6 + 210n^5 - 70n^3 + 10n}{360}. \\
S_n^{(6)} &= \frac{n(6n^6 + 21n^5 + 21n^4 - 7n^2 + 1)}{42}. \\
S_n^{(6)} &= \frac{1}{7} n^7 + \frac{1}{2} n^6 + \frac{1}{2} n^5 - \frac{1}{6} n^3 + \frac{1}{42} n.
\end{aligned}$$

8. Вывод формулы суммирования 7-й степени

$$S_n^{(7)} = 1^7 + 2^7 + \dots + n^7.$$

Сумма элементов приведенного ниже треугольника, это в точности $S_n^{(7)}$:

$$\begin{array}{c} 1^6 \\ 2^6 2^6 \\ 3^6 3^6 3^6 \\ \cdot \\ \cdot \\ n^6 n^6 n^6 \dots n^6 \end{array}$$

Просуммируем элементы приведенного треугольника по столбцам.

$$\begin{aligned} S_n^{(7)} &= S_n^{(6)} + (S_n^{(6)} - S_1^{(6)}) + (S_n^{(6)} - S_2^{(6)}) + \dots + (S_n^{(6)} - S_{n-1}^{(6)}) = \\ &= n \cdot S_n^{(6)} - (S_1^{(6)} + S_2^{(6)} + \dots + S_{n-1}^{(6)}) = \\ &= n \cdot S_n^{(6)} - \sum_{k=1}^{n-1} S_n^{(6)} = n \cdot S_n^{(6)} - \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{6n^7 + 21n^6 + 21n^5 - 7n^3 + n}{42} \right] = \\ &= n \cdot S_n^{(6)} - \frac{1}{7} \sum_{k=1}^{n-1} k^7 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k^6 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k^5 + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n-1} k^3 - \frac{1}{42} \sum_{k=1}^{n-1} k = \\ &= n \cdot S_n^{(6)} - \frac{1}{7} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (k^7 + n^7 - n^7) \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (k^6 + n^6 - n^6) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (k^5 + n^5 - n^5) \right) + \frac{1}{6} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (k^3 + n^3 - n^3) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{42} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (k + n - n) \right) = n \cdot S_n^{(6)} - \frac{1}{7} S_n^{(7)} + \frac{1}{7} n^7 - \frac{1}{2} S_n^{(6)} + \frac{1}{2} n^6 - \\ &\quad - \frac{1}{2} S_n^{(5)} + \frac{1}{2} n^5 + \frac{1}{6} S_n^{(3)} - \frac{1}{6} n^3 - \frac{1}{42} S_n^{(1)} + \frac{1}{42} n^1 = S_n^{(7)}, \\ \frac{8}{7} S_n^{(7)} &= n \cdot S_n^{(6)} - \frac{1}{2} S_n^{(6)} - \frac{1}{2} S_n^{(5)} + \frac{1}{6} S_n^{(3)} - \frac{1}{42} S_n^{(1)} + \\ &\quad + \left[\frac{1}{7} n^7 + \frac{1}{2} n^6 + \frac{1}{2} n^5 - \frac{1}{6} n^3 + \frac{1}{42} n \right], \\ \frac{8}{7} S_n^{(7)} &= \frac{(2n-1)}{2} S_n^{(6)} - \frac{1}{2} S_n^{(5)} - \frac{1}{6} S_n^{(3)} - \frac{1}{42} S_n^{(1)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n \right], \\
\frac{8}{7}S_n^{(7)} &= \frac{(2n-1)}{2} \cdot \frac{(6n^7 + 21n^6 + 21n^5 - 7n^3 + n)}{42} - \frac{1}{2} \times \\
& \times \frac{(2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2)}{12} + \frac{1}{6} \cdot \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} - \\
& - \frac{1}{42} \cdot \frac{n^2 + n}{2} + \frac{(6n^7 + 21n^6 + 21n^5 - 7n^3 + n)}{42}, \\
\frac{8}{7}S_n^{(7)} &= \frac{24n^8 + 96n^7 + 112n^6 - 56n^4 + 16n^2}{168}. \\
S_n^{(7)} &= \frac{n^2(6n^6 + 24n^5 + 28n^4 - 14n^2 + 4)}{48}. \\
S_n^{(7)} &= \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2.
\end{aligned}$$

Заключение

Формулы суммирования, приведенные выше могут быть использованы для получения формул суммирования более высоких степеней, поскольку в справочниках не всегда приводится необходимая формула. Интересной представляется следующая задача: на основе приведенного метода дать метод суммирования основанный на представлении указанных сумм в виде многочлена от n .

Библиографические ссылки

1. Бернштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. М. : Наука, 1983. 48 с.
2. Макушевич А. И. Воротные последовательности. М. : Наука, 1986.
3. Абрамович В. Суммы одинаковых степеней натуральных чисел // Квант. 1973. № 5. С. 22–25.
4. Суконник Я. Суммы одинаковых степеней натуральных чисел // Квант. 1975. № 1. С. 36–39.
5. Бундукидзе А., Сулаквелидзе А. Вычисление сумм // Квант. 1970. № 9. С. 37–40.

References

1. Bernstein I. N., Semendyaev K. A. Handbook of mathematics. Moscow, Nauka, 1983, 48 p.

2. Markushevich A. I. Recurrent sequences. Moscow, Nauka, 1986.
3. Abramovich V. Sums of identical powers of natural numbers // J. "Quantum", 1973, No. 5, Pp. 22–25.
4. Sukonnik Ya. Sums of identical powers of natural numbers // J. "Quantum", 1975, No. 1, Pp. 36–39.
5. Bendukidze A., Sulakvelidze A. Calculation of sums // J. "Quantum", 1970, No. 9, Pp. 37–40.

© Ширяева Т. А., Шлепкин А. К., Шлепкин А. А., 2019

СПЕКТРАЛЬНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ ДЕНДРОКЛИМАТИЧЕСКИХ РЯДОВ НА БАЗЕ НУЛЕВОЙ ГИПОТЕЗЫ

В. В. Шишов¹, И. Н. Коюпченко²

Сибирский федеральный университет
Российская Федерация, 660041, Красноярск, просп. Свободный, 79
E-mail: ¹vlad.shishov@gmail.com; ²kinkras@gmail.com

Целью данной работы является описание метода спектрального разложения дендроклиматических данных на базе нулевой гипотезы. Проверяется гипотеза о том, что для выявления значимых циклов в дендроклиматических рядах достаточно тестировать полученный спектр на базе нулевой гипотезы, сформулированной для белого шума.

Ключевые слова: древесно-кольцевые хронологии, хронология, спектральное разложение, белый шум, климатическая реконструкция, MTM и MTM&SSA подходы, сингулярный спектральный анализ, коэффициент Кендалла.

SPECTRAL TESTING OF DENDROCLIMATIC SERIES BASED ON THE NULL HYPOTHESIS

V. V. Shishov¹, I. N. Koyupchenko²

Siberian Federal University
79, Svobodny Av., Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation
E-mail: ¹vlad.shishov@gmail.com; ²kinkras@gmail.com

The goal of the paper is to describe a method of spectral decomposition of dendroclimatic data based on the null hypothesis. The paper tests the hypothesis that in order to identify significant cycles in dendroclimatic series it is sufficient to test the obtained spectrum on the basis of the null hypothesis formulated for white noise.

Keywords: tree-ring chronologies, chronology, spectral decomposition, white noise, climate reconstruction, MTM and MTM&SSA approaches, singular spectral analysis, Kendall coefficient.

Известно, что древесно-кольцевые хронологии (дендрохронологические временные ряды) являются важным источником косвенной информации высокого разрешения об изменениях окружающей среды и климата

в прошлом и настоящем [1–3; 5; 6; 21–23]. Очень часто сигналы, присутствующие в подобных временных рядах, ассоциируются либо с прямыми внешними периодическими воздействиями (например, годовой освещенностью), либо с разнообразными внутренними нестабильными осцилляциями биологических систем, вызванными, например, возрастными изменениями последних [8]. В большинстве случаев, сигнал является результатом суперпозицией разнообразных внутренних и внешних воздействий [4; 14].

Что касается периодических воздействий, то в данном случае сигналы моделируются при помощи синусоидальных временных зависимостей и без труда выявляются как четкие локальные максимумы для спектральной функции с когерентным фазовым спектром [13]. В случае, когда амплитуда и фаза для выявленных сигналов являются не устойчивыми, предыдущий подход является не достаточным. Необходимо сделать ряд дополнительных предположений о возможных причинах частотной, фазовой и амплитудной неустойчивости. После этого, сигналы определяются при помощи спектральной функции как локальные максимумы с большей, чем у вероятного «шума», амплитудой [8].

В дендроклиматологии и чистой климатологии считается, что нестабильность в различных системах может быть связана с «низкочастотным» шумом, возникающим в результате взаимодействия белого шума с медленно меняющимися компонентами самой изучаемой системы [4; 14]. Такой шум по определению называется «красным» [8]. Красный шум обычно описывается при помощи авторегрессионного процесса 1-го порядка AR(1): $R_n = \rho R_{n-1} + \omega_n$, ($n = 0, \dots, N$), где ρ – автокорреляционный коэффициент 1-го порядка; ω – гауссовский шум с математическим ожиданием R_0 и дисперсией σ^2 [8].

Для оценки влияния таких случайных процессов на спектр изучаемых временных рядов применяется процедуры, которые позволяют найти характеристики этих случайных компонент и, таким образом, определить их вклад в оценочный спектр [8; 13]. При этом для оценки значимости максимумов спектральной функции тестируется нулевая гипотеза, состоящая в том, что начальная информация является красным шумом.

Новый подход в спектральном анализе тестировался на синтетических временных рядах [19; 20] и сверхдлительных хронологиях, полученных по Швеции и Финляндии на основе стандартизации региональными кривыми (Regional Curve Standartization – RCS) [18].

Для проверки выдвинутой гипотезы использован подход, описанный в работе [8], с небольшими модификациями. В нашем случае, изучаемый временной ряд длиной в 1440 лет являлся линейной комбинацией следующих компонент: линейного тренда, 3-х чистых синусоид с периодом в 300, 108 и 36 лет с относительной амплитудой 1, высокочастотной составляющей с периодом в 5 лет и относительной амплитудой 0,75, 3 синусоидаль-

ных осцилляции с периодом в 11–12 лет с амплитудой 1, а также AR(1) процесс с дисперсией $\sigma^2 = 2$ (рис. 1). (Вклад шума в дисперсию изучаемого синтетического процесса был увеличен вдвое по сравнению с работой Ман’а).

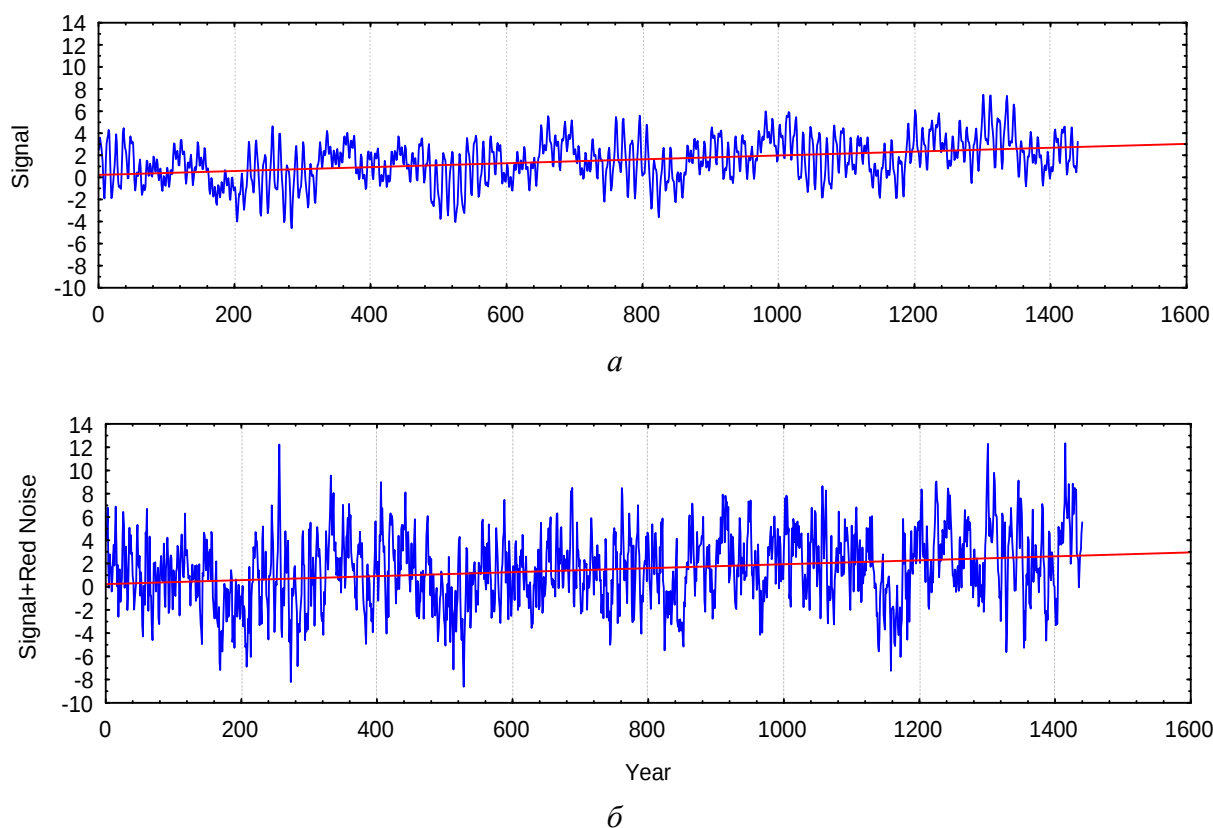


Рис. 1. Динамика чистого сигнала (а) и линейной комбинации сигнала и красного шума (б)

В качестве основных методов для спектрального разложения были использованы метод множественных сфероидальных последовательностей (multiple-taper methods – MTM) [9; 11; 13] и сингулярный спектральный анализ (Singular Spectrum Analysis – SSA) [7; 10]. Для моделирования AR(1) процесса красного шума был использован традиционный метод Монте-Карло.

Для оценки согласованности в динамике временных рядов была использована τ -статистика Кендалла [15; 16] с модификациями. Модификации были связаны с расчетом скользящих коэффициентов Кендалла в определенном окне длины W .

Для вычисления скользящего коэффициента ранговой корреляции Кендалла (K –коэффициента) в момент t с длиной “окна” $W = 2k + 1$ между двумя временными рядами (i -м и j -м) необходимо вычислить предварительно:

$$S_{ij} = \sum_{\substack{p,q=t-k \\ (p < q)}}^{t+k} R(x_i(p), x_i(q)) R(x_j(p), x_j(q)),$$

$$T_i = \sum_{\substack{p,q=t-k \\ (p < q)}}^{t+k} \left(1 - R(x_i(p), x_i(q))\right), \quad T_j = \sum_{\substack{p,q=t-k \\ (p < q)}}^{t+k} \left(1 - R(x_j(p), x_j(q))\right),$$

где

$$R(x_i(p), x_i(q)) = \begin{cases} +1, & \text{если } x_i(q) - x_i(p) > 0, \\ 0, & \text{если } x_i(q) - x_i(p) = 0, \\ -1, & \text{если } x_i(q) - x_i(p) < 0, \end{cases}$$

и, наконец, сам K – коэффициент:

$$K_{ij}(t, W) = \frac{S_{ij}}{\sqrt{0,5 \cdot W(W-1) - T_i} \cdot \sqrt{0,5 \cdot W(W-1) - T_j}}.$$

Коэффициент ранговой корреляции Кендалла применяется для проверки независимости случайных величин (например, несогласованности в росте двух различных деревьев). Если гипотеза независимости верна, то $M(K) = 0$, $D(K) = \frac{2(2W+5)}{9W(W-1)}$. При небольшом объеме выборки

($4 \leq W \leq 10$) проверка статистической гипотезы независимости производится с помощью специальной таблицы.

При $W > 10$ пользуются тем, что величина $t_K = 1 / 2K \cdot W(W-1) / \sqrt{W(W-1)(2n+5)/18}$ распределена по закону Стьюдента. Ниже приведены критические значения ($p < 0,05$) для коэффициента Кендалла в зависимости от величины окна W (табл. 1).

Таблица 1

Критические значения τ -статистики Кендалла, полученные для окон W различной длины

Величина окна W	Критическое значение K	Уровень значимости α
11	0.46	0.05
21	0.31	0.05
51	0.21	0.05
101	0.14	0.05
201	0.10	0.05

Критерии, основанные на коэффициенте ранговой корреляции Спирмена и на коэффициенте ранговой корреляции Кендалла асимптотически эквивалентны (при $W = 2$ соответствующие ранговые статистики совпадают).

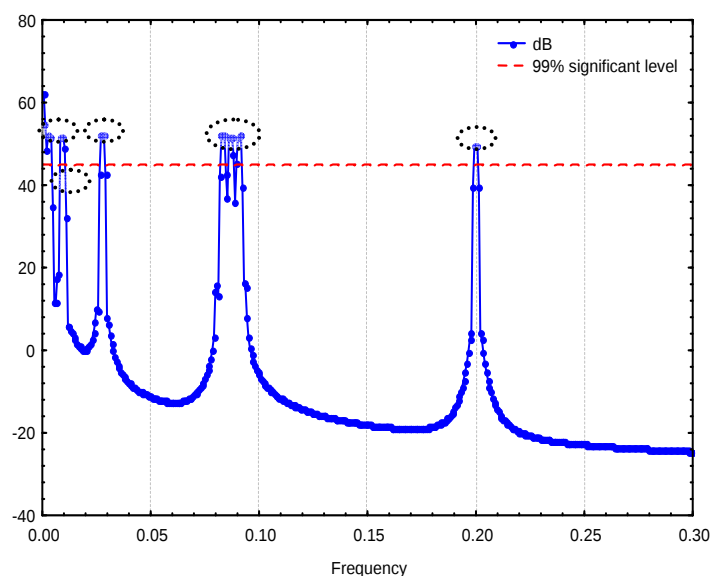
Проверка гипотезы на синтетических временных рядах

На основе метода множественных сфероидальных последовательностей (МТМ) было получено разложение «чистого» сигнала, рассматривае-

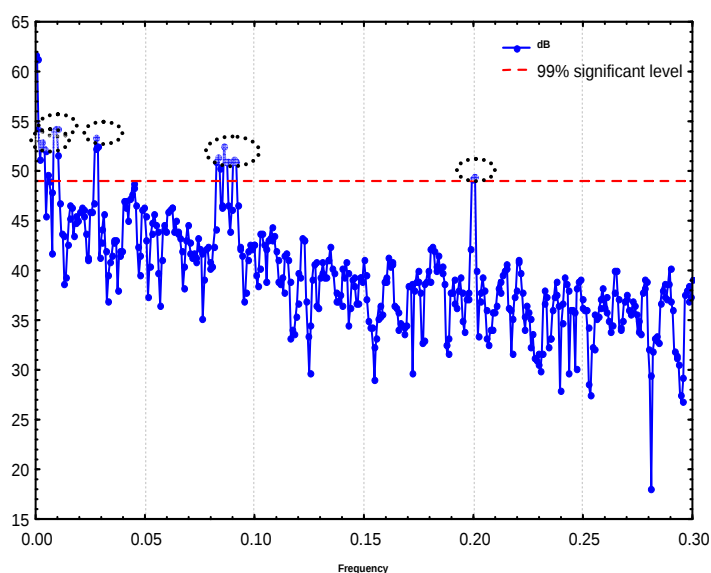
мого в синтетическом примере (рис. 2, *a*), которое практически совпадает с частотами исходных циклических компонент сигнала.

Такое же разложение получается при помощи сингулярного спектрального анализа – SSA. Значимость циклов выявлялась на основе предположения, что фоновое воздействие является белым шумом.

Аналогичный подход был применен для оценки значимых циклических компонент в 160 смоделированных методом Монте-Карло рядах, состоящих из красного шума и, собственно, сигнала (20 временных рядов для каждого автокорреляционного коэффициента 1-го порядка – ρ , который изменялся от 0,1 до 0,8) [19; 20].



a



б

Рис. 2. МТМ спектральное разложение сигнала (*a*) и имитационного временного ряда (*б*), состоящего из сигнала и красного шума ($\rho = 0,4$) (жирной пунктирной линией указан 99,9 % уровень значимости для белого шума)

Результаты показывают, что значимые различия в спектрах сигнала и смоделированных рядов появляются, когда автокорреляционный коэффициент 1-го порядка ρ , определяющий процесс красного шума, становится большим, чем 0,6 (табл. 2).

Таблица 2

Сравнение спектральных характеристик смоделированных методом Монте-Карло рядов, состоящих красного шума и чистого сигнала

Статистические характеристики	Значение авторегрессионного коэффициента ρ , определяющего процесс красного шума							
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$\bar{R}$ – средний коэффициент корреляции между ВР	0,70	0,69	0,68	0,67	0,65	0,62	0,58	0,51
Сходство МТМ-спектров	20/20	20/20	19/20	19/20	18/20	17/20	6/20	2/20

Под сходством спектров в данном случае понимается одинаковость множества частот, выделенных на основе F -критерия и их амплитуды (в dB) в частотной области.

В случаях, когда авторегрессионный коэффициент ρ превосходит 0,6, необходимы дополнительные преобразования спектра (например, на основе робастного оценивания) и замена нулевой гипотезы [8; 13]. В качестве нулевой гипотезы выдвигается предположение, что исходный временной ряд является автокорреляционным процессом 1-го порядка для белого шума, т. е. красным шумом.

С другой стороны, по некоторым оценкам шумовая автокорреляция первого порядка для климатологических и дендрохронологических рядов не превосходит 0,4–0,6 [8; 12].

Следовательно, для достоверного определения цикличностей достаточно использовать предположение о наличии в исходных дендроклиматических рядах только белого шума. Это позволяет значительно упростить процедуру достоверного определения цикличностей, присутствующих, например, в дендроклиматических рядах.

В качестве материала для исследования были взяты две сверхдлительных древесно-кольцевых хронологии, построенных для территории Швеции (Торнотраск) и Финляндии.

Для получения аддитивных спектральных составляющих были применены метод множественных сфероидальных последовательностей и сингулярный спектральный анализ. Оба эти метода являются непараметрическими и применимы для анализа нестационарных временных рядов [7–9].

Проверка гипотезы на древесно-кольцевых хронологиях

Рассмотрим результаты, связанные со спектральным разложением и анализом рассматриваемых сверхдлительных хронологий [18].

На основе метода множественных сфероидальных последовательностей было получено спектральное разложение обеих древесно-кольцевых хронологий.

Очень похожее частотное разложение получается на базе сингулярного спектрального анализа. На базе кластерного анализа были выделены следующие группы компонент: Trend – компоненты с частотами меньше, чем 0,00051, Super long-term – компоненты с частотами в интервале от 0,00051 до 0,00503, Long-term – от 0,00503 до 0,01010, Middle-term – от 0,01010 до 0,01754, Short-term – от 0,01754 до 0,02941, Super short-term – от 0,02941 до 0,05.

Очень важным вопросом при спектральном разложении временных рядов является вопрос о единственности такого представления. Например, простое изменение уровня значимости при выявлении циклов может привести к появлению новых частот или к уменьшению числа последних. Это, безусловно, может оказать влияние на конечный результат. В какой-то мере, подобной проблемы можно избежать при помощи группировки «ближних» частот при помощи одного из классификационных методов, как описано выше. В результате, «генерализованная» компонента, полученная как линейная комбинация сингулярных временных рядов, близких по частоте, будет более робастной к возмущениям, вызванных, например, появлением «новых» составляющих с относительно небольшим вкладом.

Правильность такого подхода может быть подтверждена, например, сравнением циклических составляющих, полученных двумя независимыми методами: сингулярным спектральным анализом и узкополостной фильтрацией на базе обратного быстрого преобразования Фурье (см. рис. 3–5). Можно отметить высокие положительные коэффициенты корреляции между циклическими составляющими, полученных различными методами для разных частотных полос.

Отметим, что наибольшая похожесть выявленных составляющих наблюдается на частотах, определяющих колебания с длиной волны от 20 до 34 лет и от 100 лет и выше. Следуя предположения, что любой сигнал является суммой циклических составляющих, тренда и шума, получаем, что «результатирующие» хронологии, полученные различными способами для одних и тех участков, являются сильно положительно коррелированными. Так, для Швеции коэффициент корреляции между SSA и FFT суммарными хронологиями равен 0,94, а для Финляндии – 0,92, соответственно (рис. 6).

При этом на каждую из вновь полученных хронологий приходится по 71 % от общей дисперсии для соответствующих исходных хронологий.

Таким образом, получено адекватное спектральное представление двух сверхдлительных хронологий для территории Швеции и Финляндии.

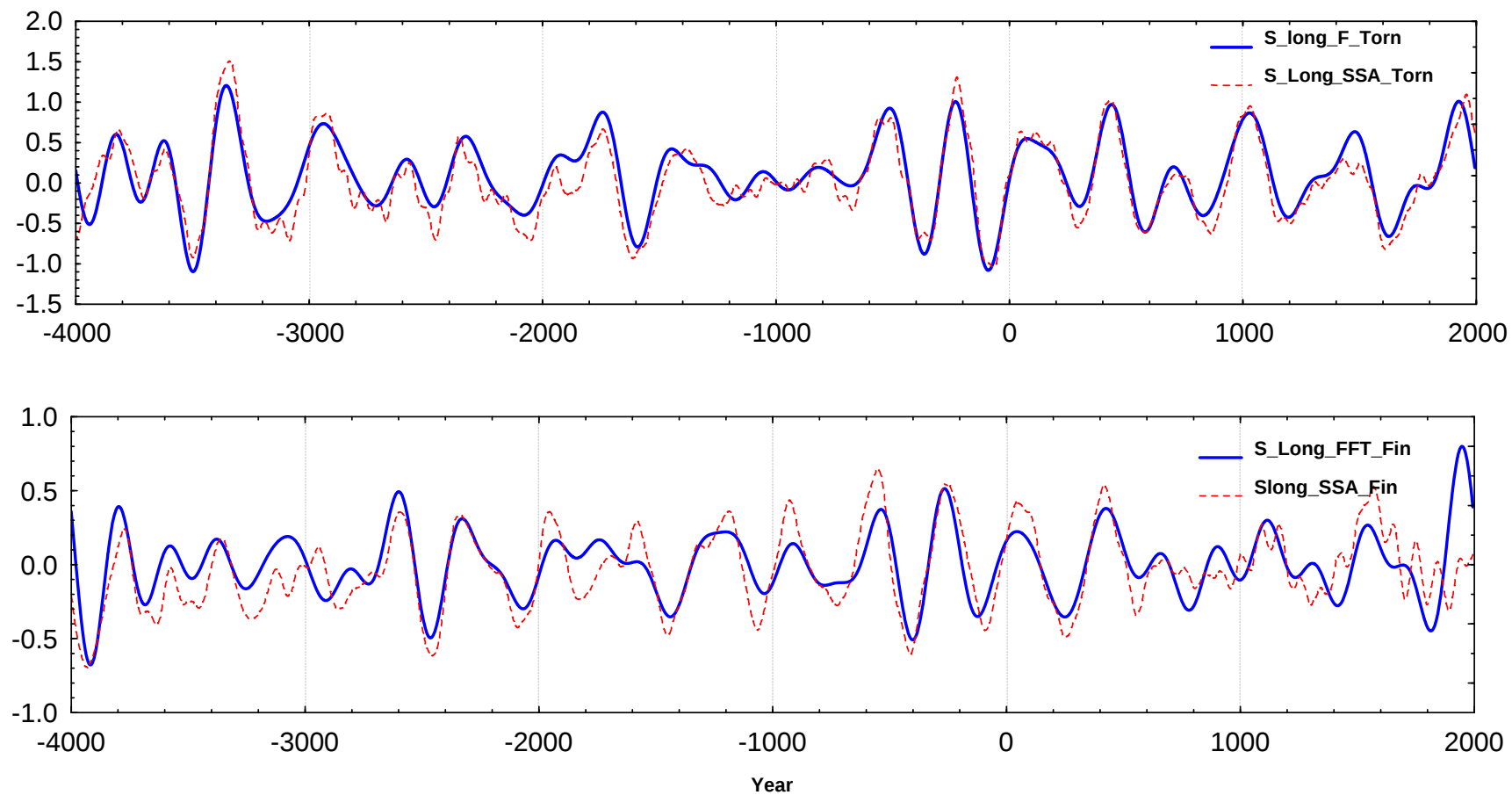


Рис. 3. Низкочастотные компоненты (длина волны более 200 лет), полученные при помощи обратного преобразования Фурье и сингулярного спектрального анализа, для Швеции (коэффициент корреляции между соответствующими компонентами $R = 0,92$) и Финляндии ($R = 0,73$)

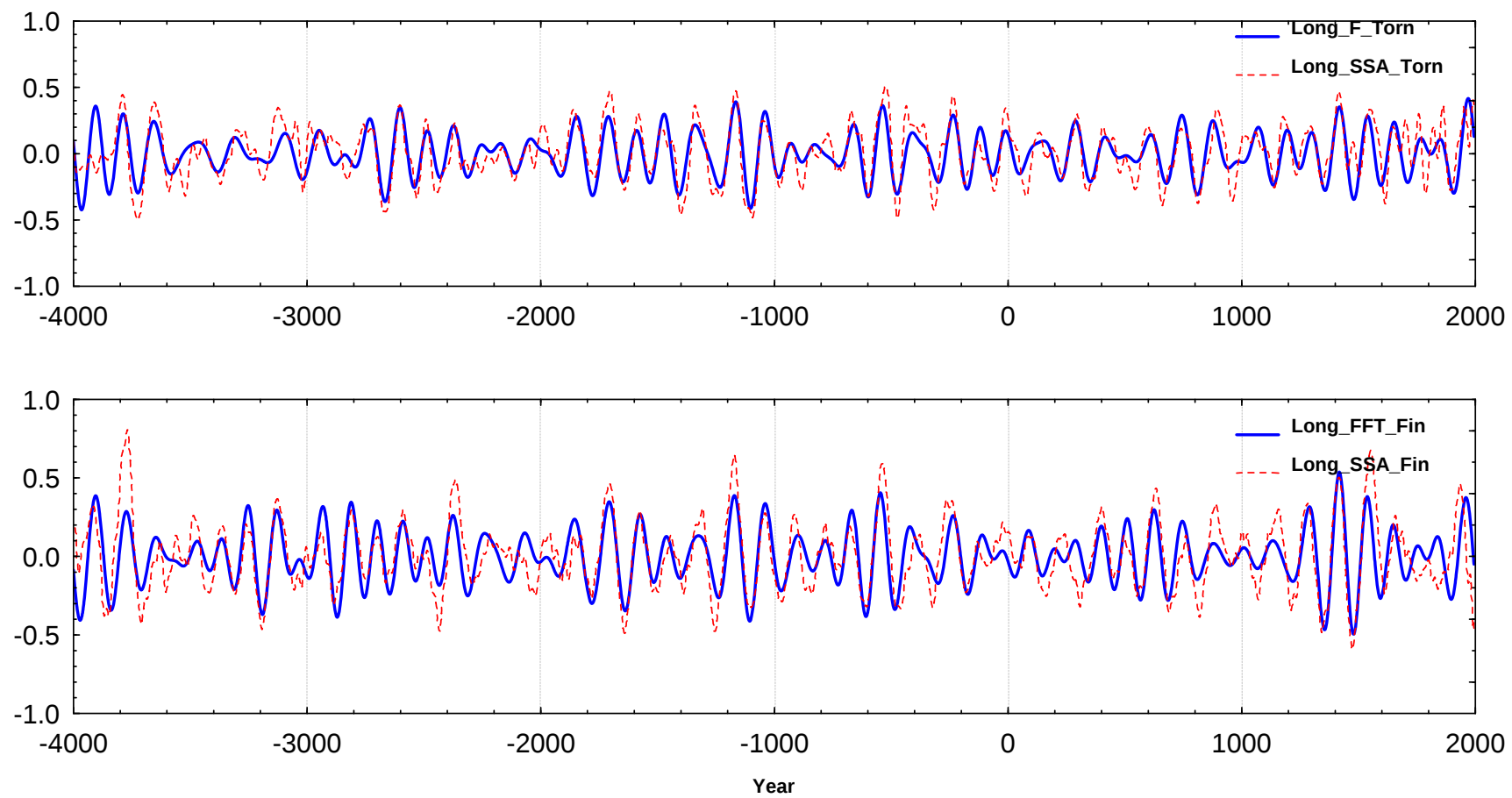


Рис. 4. Низкочастотные компоненты (длина волны от 100 до 200 лет), полученные при помощи обратного преобразования Фурье и сингулярного спектрального анализа, для Швеции ($R = 0,75$) и Финляндии ($R = 0,72$)

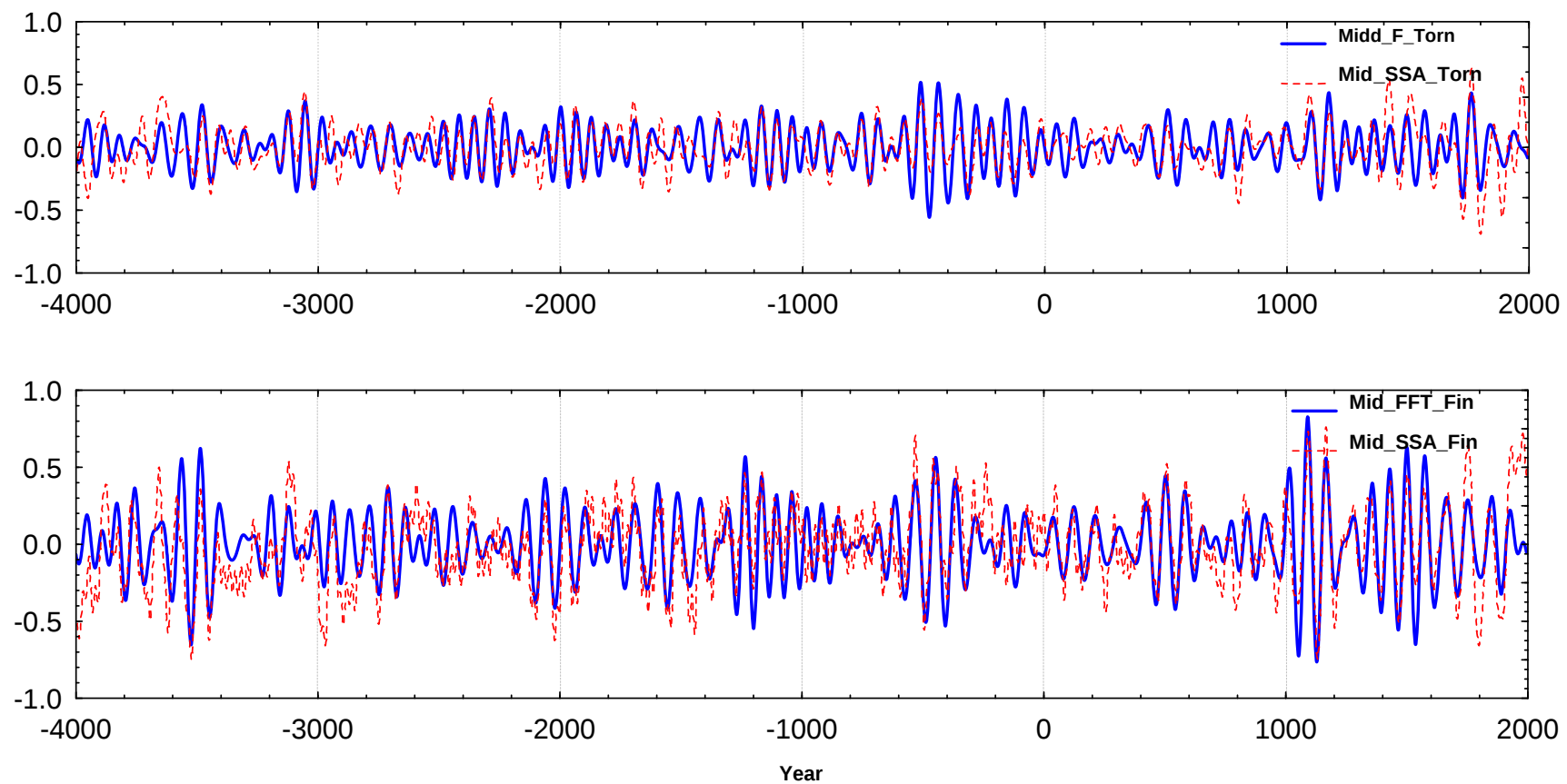


Рис. 5. Низкочастотные компоненты (длина волны от 57 до 100 лет), полученные при помощи обратного преобразования Фурье и сингулярного спектрального анализа, для Швеции ($R = 0,59$) и Финляндии ($R = 0,62$)

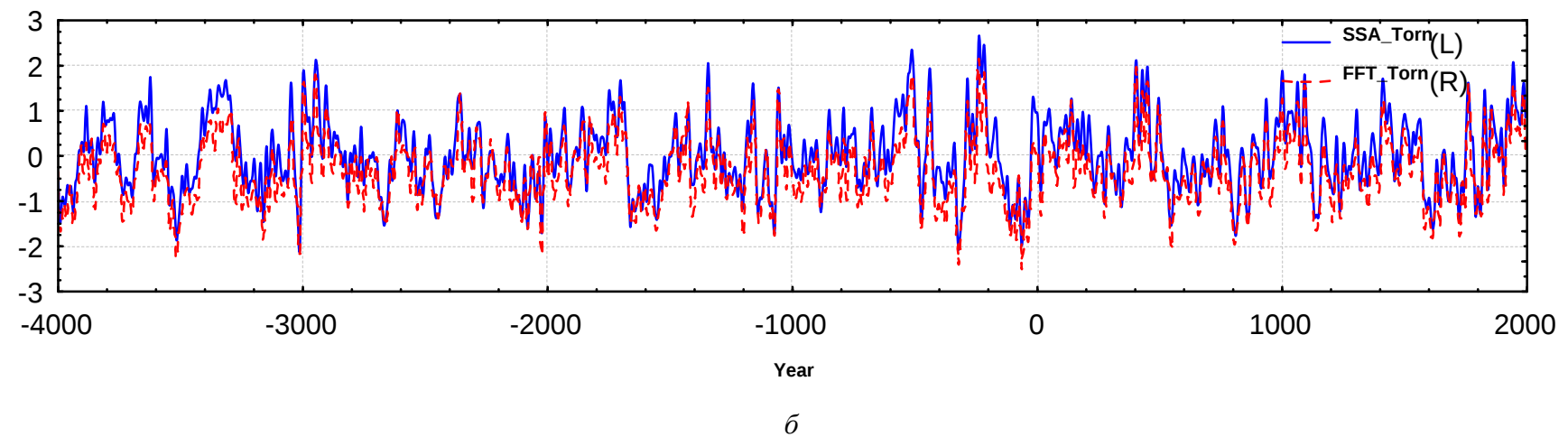
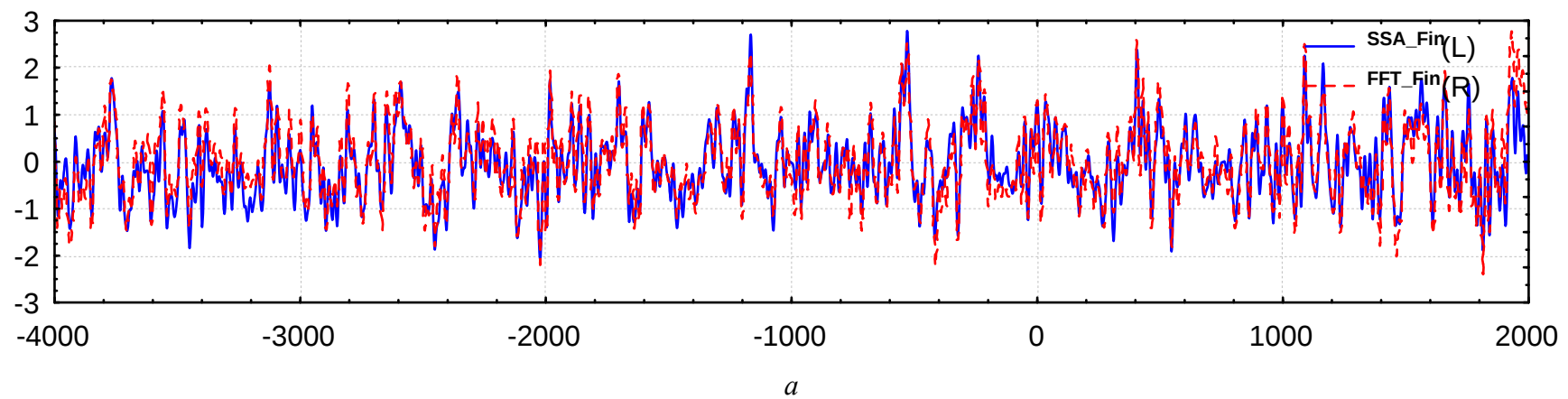
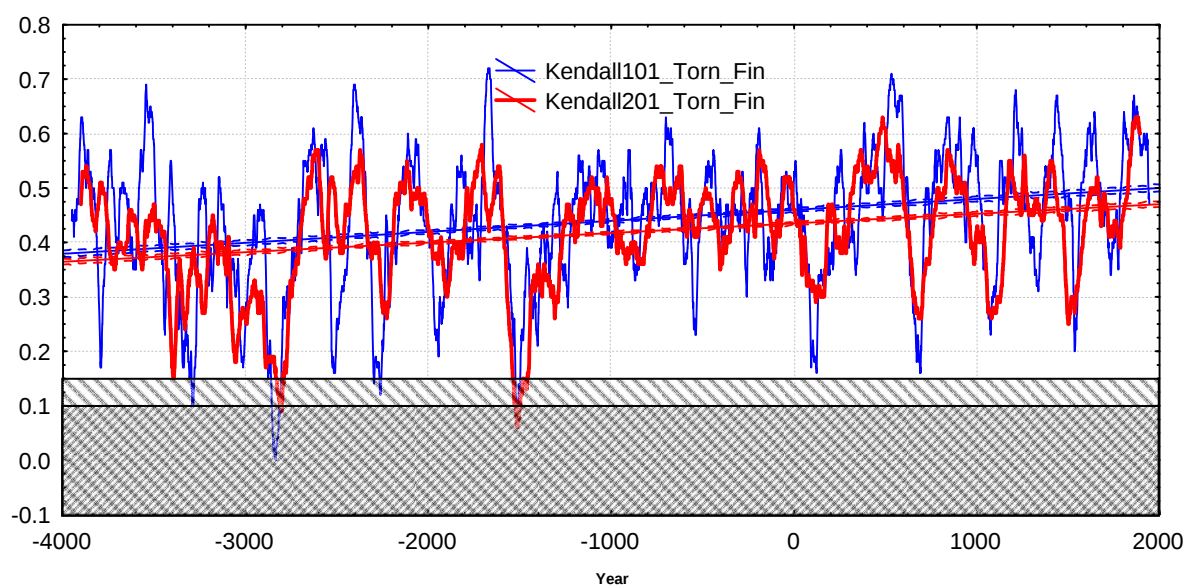


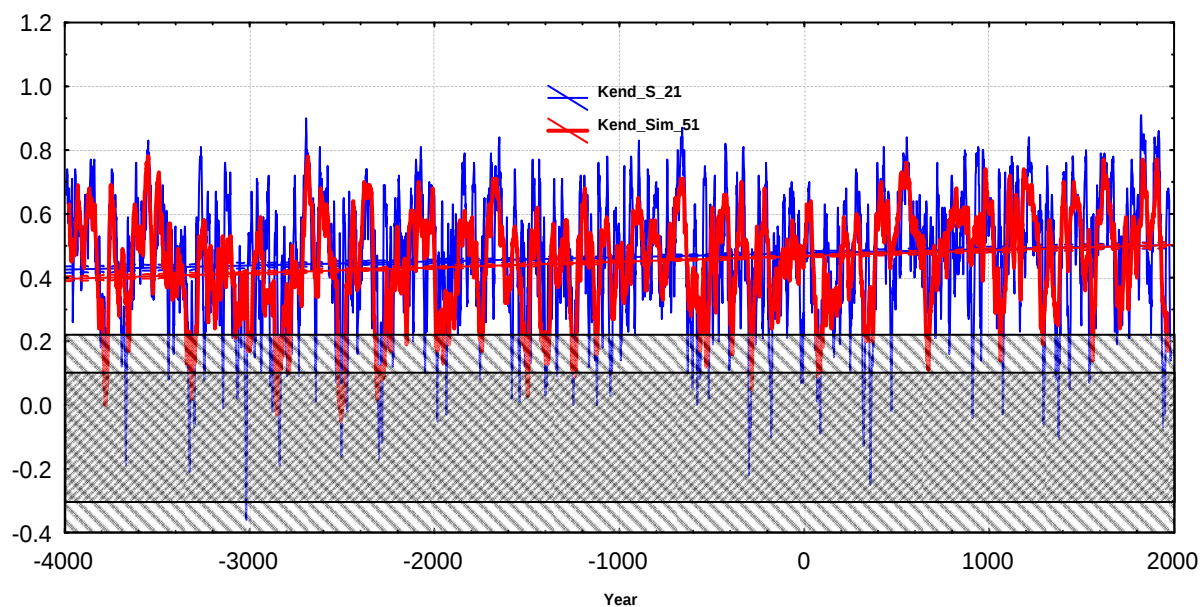
Рис. 6. Суммарные сигналы, полученные для Швеции (a) и Финляндии (b) на базе прямого суммирования SSA- и FFT-составляющих. Коэффициенты корреляции между SSA и FFT «результатирующими» хронологиями равны 0,94 для Швеции и 0,92 для Финляндии, соответственно

Анализ согласованности спектральных разложений сверхдлительных хронологий

Анализируемые древесно-кольцевые хронологии смещены в долготном направлении всего на 300 км друг от друга, и, как следствие, они имеют общую хорошую временную согласованность. Несмотря на это, наблюдаются периоды, когда динамика анализируемых временных рядов существенно различается (рис. 7).



a



б

Рис. 7. Скользящие коэффициенты Кендалла (τ -статистики), рассчитанные между Шведской и Финской древесно-кольцевыми хронологиями с окнами W различной длины (▨ – 95 % уровень значимости для большего окна W ; ▩ – 95 % уровень значимости для меньшего окна W)

Можно отметить существование значимого положительного тренда в согласованности динамики двух древесно-кольцевых хронологий, т. е. синхронность в поведении двух исследуемых временных рядов значительно увеличивается от прошлого к настоящему. Причина в увеличении согласованности может заключаться в лучшем качестве материала в настоящем. Это ведет к более аккуратному построению древесно-кольцевых хронологий, и учитывая, что расстояние между хронологиями не более 300 км (для Севера расстояние не очень значительное), мы получаем лучшую синхронность в поведении.

С другой стороны, по некоторым оценкам увеличение согласованности ведет к ухудшению условий роста для древесных растений. Вероятно, этот факт может являться причиной увеличения согласованности. Спектральный анализ полученных коэффициентов Кендалла показал на наличие следующих цикличностей, которые выявляются для различных скользящих окон: около 1500 лет, 300 лет, 135–155 лет, 90–110 лет, 45–65 лет. Отметим, что более 99 % значимых значений коэффициентов Кендалла для различных значений длины окна W являются положительными. Следовательно, либо исследуемые хронологии находятся постоянно в фазе, либо их поведение не согласованно. Явных противофаз в динамике исследуемых временных рядов не наблюдается.

Выяснить причину таких рассогласований можно на основе анализа различных циклических составляющих, полученных для соответствующих древесно-кольцевых хронологий.

Во-первых, определим, как соотносятся скользящие коэффициенты Кендалла, характеризующие условия роста (коэффициент Кендалла, рассчитанный между древесно-кольцевой хронологией и хронологическим рядом) с исходными древесно-кольцевыми хронологиями.

Во-вторых, определим, как соотносятся скользящие коэффициенты Кендалла, характеризующие условия роста и скользящие коэффициенты Кендалла, характеризующие синхронность в поведении 2-ух древесно-кольцевых хронологий.

В-третьих, попытаемся определиться с наиболее информативной характеристикой, определяющей динамику обоих древесно-кольцевых хронологий.

Заметим, что для анализа согласованности трех и более рядов можно применить скользящий коэффициент конкордации Кендалла [15; 16; 18].

Сравнение поведения скользящих коэффициентов Кендалла условия роста, полученных для низкочастотных составляющих (длина волны от 100 и выше лет) по Финляндии и Швеции с динамикой самих низкочастотных компонент показывает хорошую похожесть (наличие общих периодов согласования, рассогласования и противофаз) между разнородными показателями (рис. 8, 9).

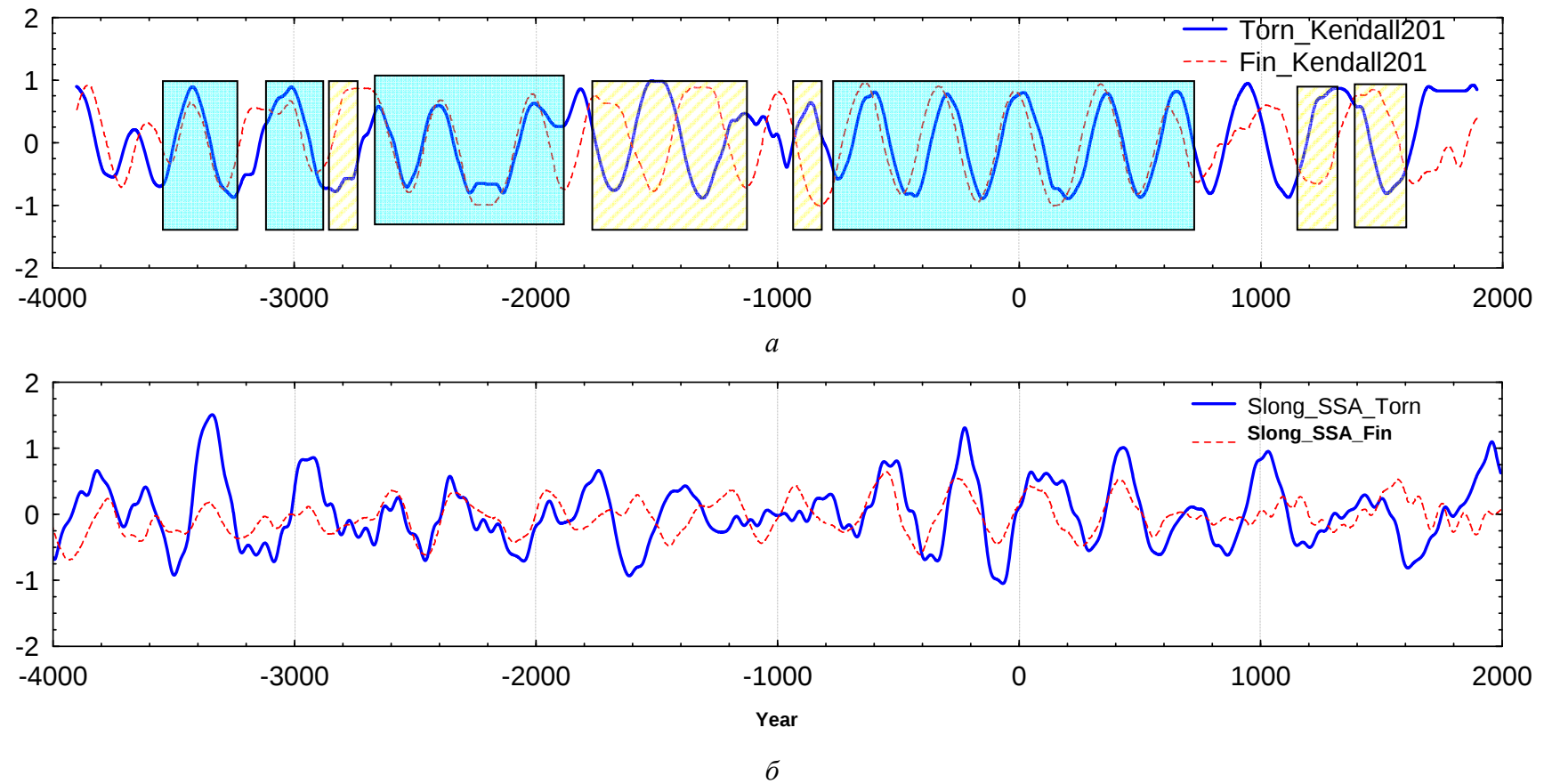


Рис. 8. Сравнительная динамика:
 a – скользящих коэффициентов Кендалла, характеризующих условия роста, для низкочастотных колебаний (длина волны от 200 и выше лет) по Швеции и Финляндии; b – низкочастотных колебаний (длина волны от 200 и выше лет) по Швеции и Финляндии

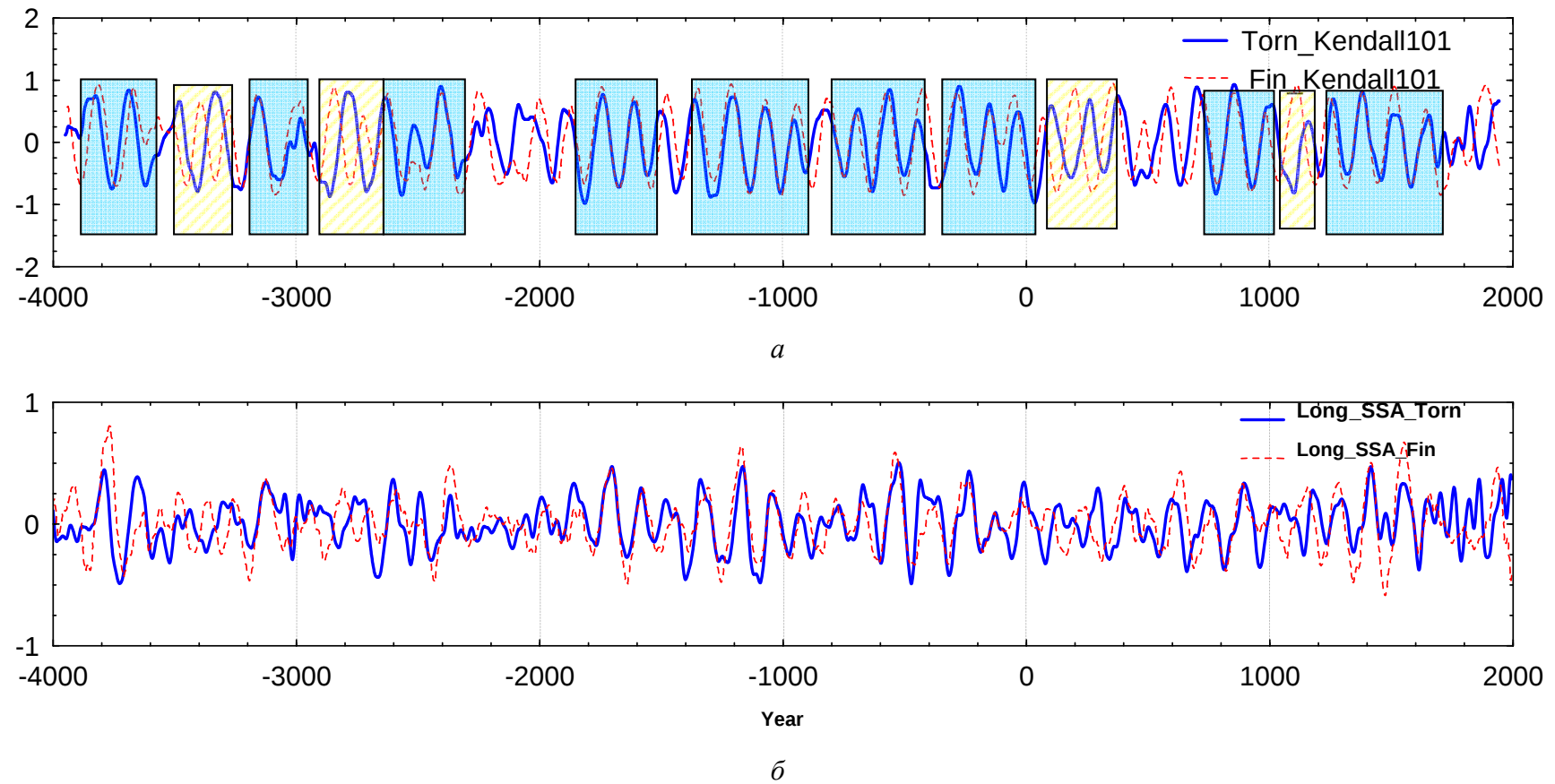


Рис. 9. Сравнительная динамика:
a – скользящих коэффициентов Кендалла, характеризующих условия роста, для низкочастотных колебаний
(длина волны от 100 до 200 лет) по Швеции и Финляндии; *b* – низкочастотных колебаний
(длина волны от 100 и 200 лет) по Швеции и Финляндии

При этом обращает на себя внимание одинаковость амплитуд для коэффициентов Кендалла. Это объясняется переходом от абсолютных значений к рангам, так как τ статистика Кендалла основана на подсчете инверсий при сравнении двух ранжированных рядов. Одним из самых дискуссионных остается вопрос о выборе окна скольжения W . В случае, когда известна доминирующая частота в спектральном разложении временного ряда, выбор достаточно прост: длина окна скольжения должна быть близкой к половине длины доминирующего цикла. Правильность такой рекомендации подтверждается, например, сходством динамики коэффициента Кендалла и самой циклической компоненты (см. рис. 8, 9).

Аналогичные взаимоотношения выявляются при сравнении скользящих коэффициентов Кендалла с более высокочастотными циклическими компонентами. Заметим, что подход с выбором окна скольжения остается прежним.

Таким образом, можно сделать заключение о том, что скользящий коэффициент Кендалла, характеризующий условия роста, хорошо отражает особенности поведения исходных циклических компонент. В отличие от коэффициента корреляции Пирсона, который, напрямую, зависит от среднего и дисперсии, коэффициенты Кендалла в меньшей степени зависят от абсолютных значений исходных временных рядов, то есть являются более «грубыми» характеристиками. Можно привести примеры, когда коэффициент корреляции Пирсона будет незначим (случай нелинейной зависимости между исследуемыми переменными), а коэффициент ранговой корреляции будет значим с высоким уровнем достоверности.

Определим, как соотносятся скользящие коэффициенты Кендалла, характеризующие условия роста и скользящие коэффициенты Кендалла, характеризующие синхронность в поведении различных циклических компонент для 2-х древесно-кольцевых хронологий.

Для всех выделенных циклических компонент по Шведской и Финской древесно-кольцевым хронологиям отмечается прямое соответствие между значениями коэффициентов Кендалла, характеризующих синхронность в поведении 2-х временных рядов, и характеристиками, отражающих условия роста (рис. 10–12). В качестве последних можно рассматривать как скользящие коэффициенты Кендалла условий роста, так и сами циклические составляющие в силу высокого соответствия в их поведении. Приведенные соответствия указывают на то, что характеризовать совместную динамику двух древесно-кольцевых хронологий можно при помощи одной характеристики – скользящего τ -коэффициента Кендалла с соответствующим выбором окна W .

При этом, «покомпонентный» анализ (совместный анализ циклических составляющих для древесно-кольцевых хронологий) выявляет ряд интересных особенностей. Прежде всего, отмечается отрицательный тренд в динамике скользящего коэффициента Кендалла для низкочастотной компоненты с длиной волны больше, чем 200 лет.

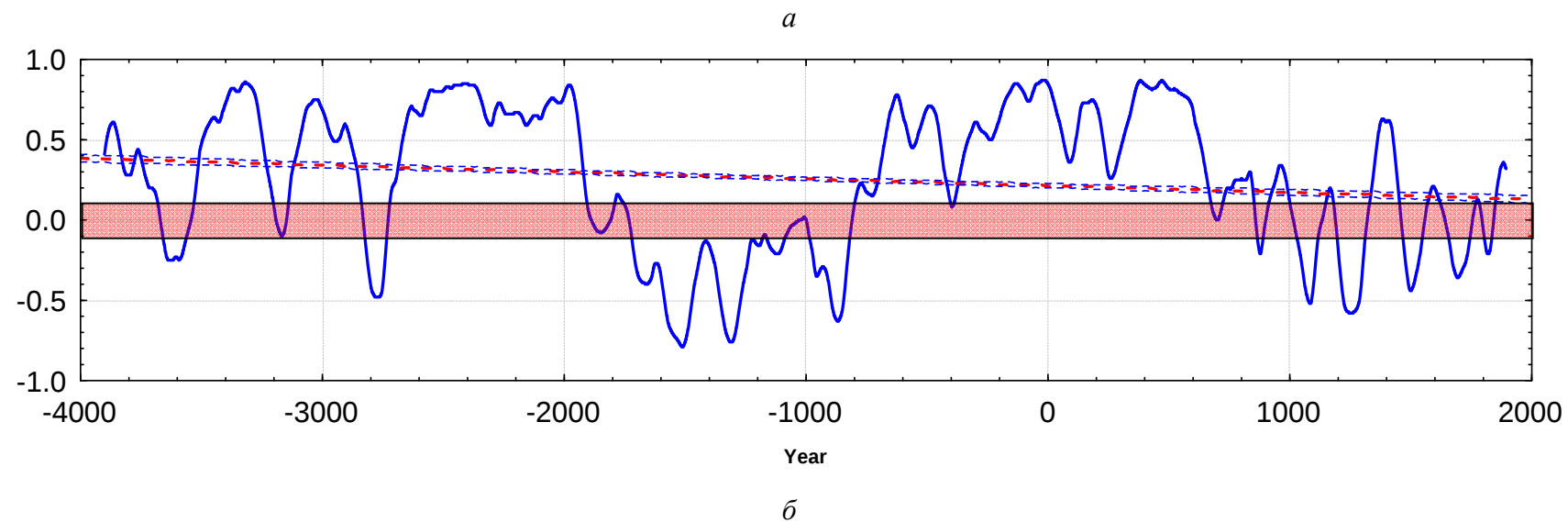
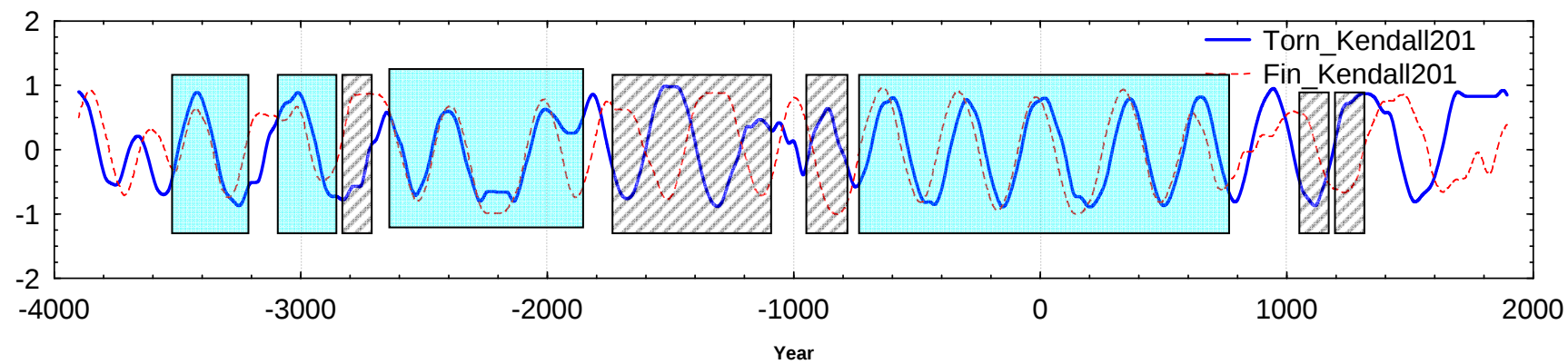


Рис. 10. Динамика скользящих коэффициентов Кендалла ($W = 201$) условий роста (a) и синхронности (b), построенных для низкочастотных составляющих (длина волны более 200 лет) по Швеции и Финляндии (заштрихованная область на b) – область значимых значений для Кендалла τ с $p < 0,05$)

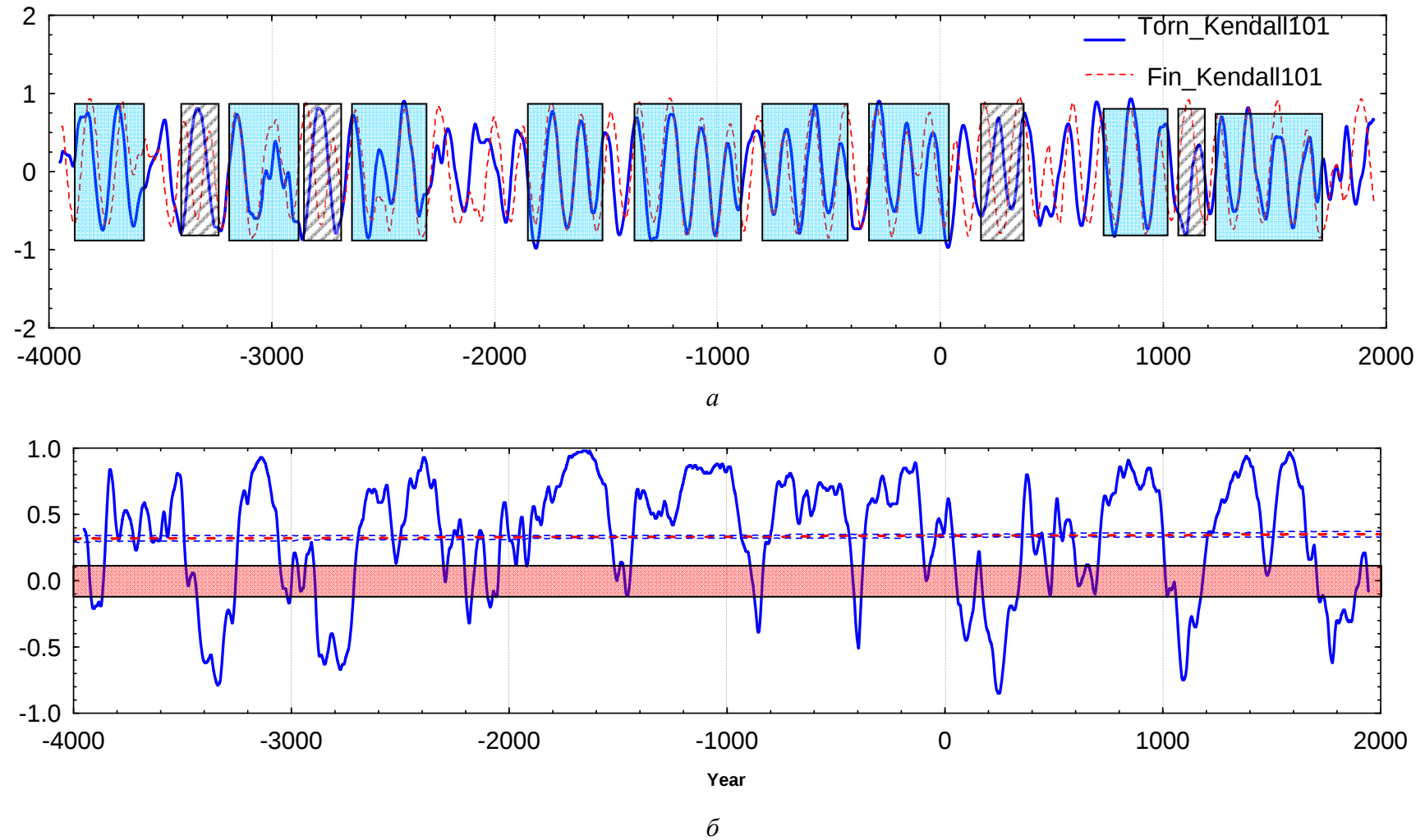


Рис. 11. Динамика скользящих коэффициентов Кендалла ($W = 101$) условий роста (a) и синхронности (b), построенных для низкочастотных составляющих (длина волны от 100 до 200 лет) по Швеции и Финляндии (заштрихованная область на b) – область значимых значений для Кендалла tau с $p < 0,05$)

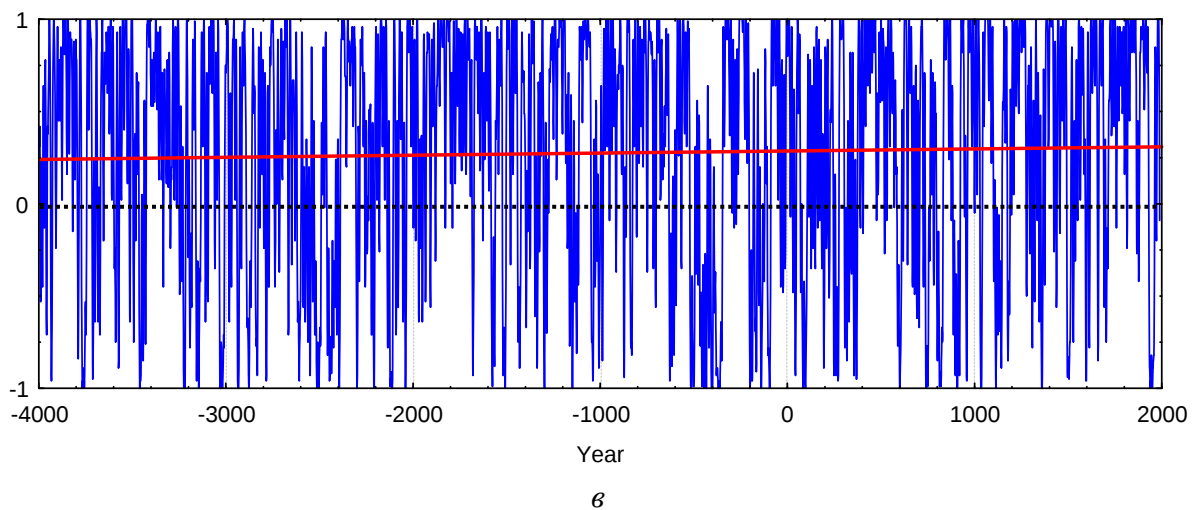
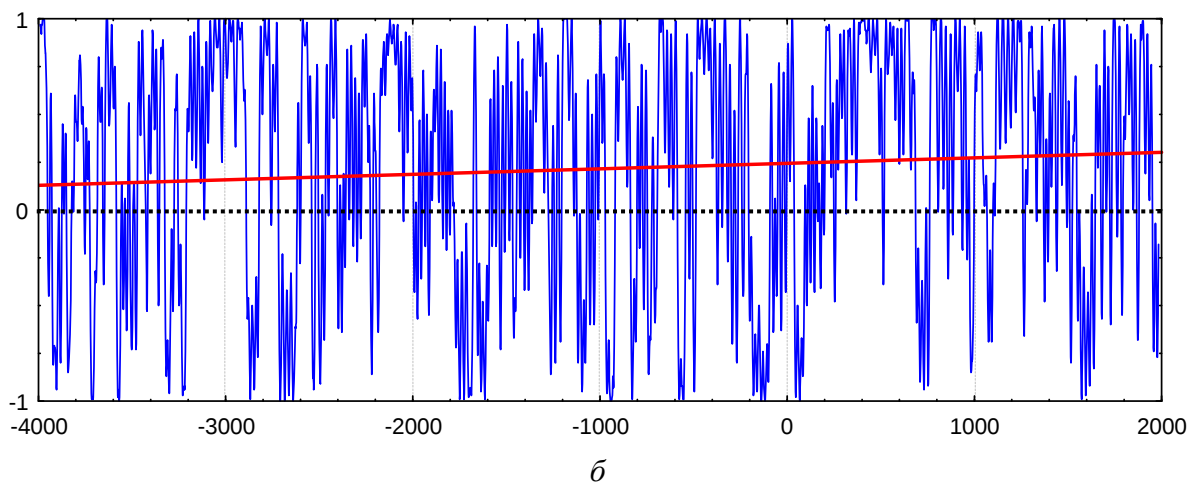
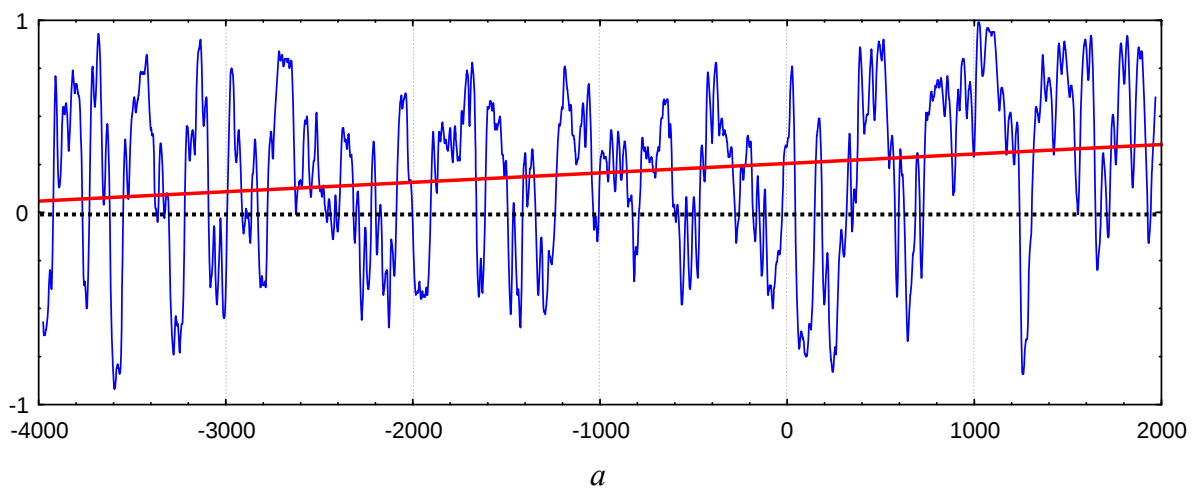


Рис. 12. Динамика скользящих коэффициентов Кендалла, характеризующих синхронность:
 a – низкочастотных компонент (57–99 лет); b и v – высокочастотных компонент (35–56 и 20–34 года) соответственно

Это означает, что согласованность анализируемых рядов в самой нижне-частотной полосе значительно падает от прошлого к настоящему времени (см. рис. 10).

С другой стороны, нет значимых трендов в согласованности для циклических компонент с длиной волны от 100 до 200 лет (см. рис. 11).

Возникает «противоречие» с результатами по согласованности, полученными выше для исходных хронологий (согласованность со временем только увеличивается для различных скользящих окон).

Это «противоречие» можно объяснить следующим. Окно скольжения, безусловно, является фильтром, но в тоже время, фильтром не совсем эффективным (например, в отличие от разнообразных узкополосных фильтров). В результате, при расчете τ -коэффициентов синхронности для исходных древесно-кольцевых хронологий с «большими» ($W \geq 100$ лет) окнами, на согласованность низкочастотных компонент накладывается влияние согласованности для более высокочастотных составляющих. Учитывая, что вклад низкочастотных (длина волны > 100 лет) составляющих оценивается в 25 % от общей изменчивости для Финской и 34 % – для Шведской хронологии, противоположный по знаку вклад более высокочастотных составляющих оказывается весьма существенным. Действительно, для 3-х учтенных компонент (см. рис. 12) в согласованности наблюдается явный положительный тренд во времени (от прошлого к настоящему).

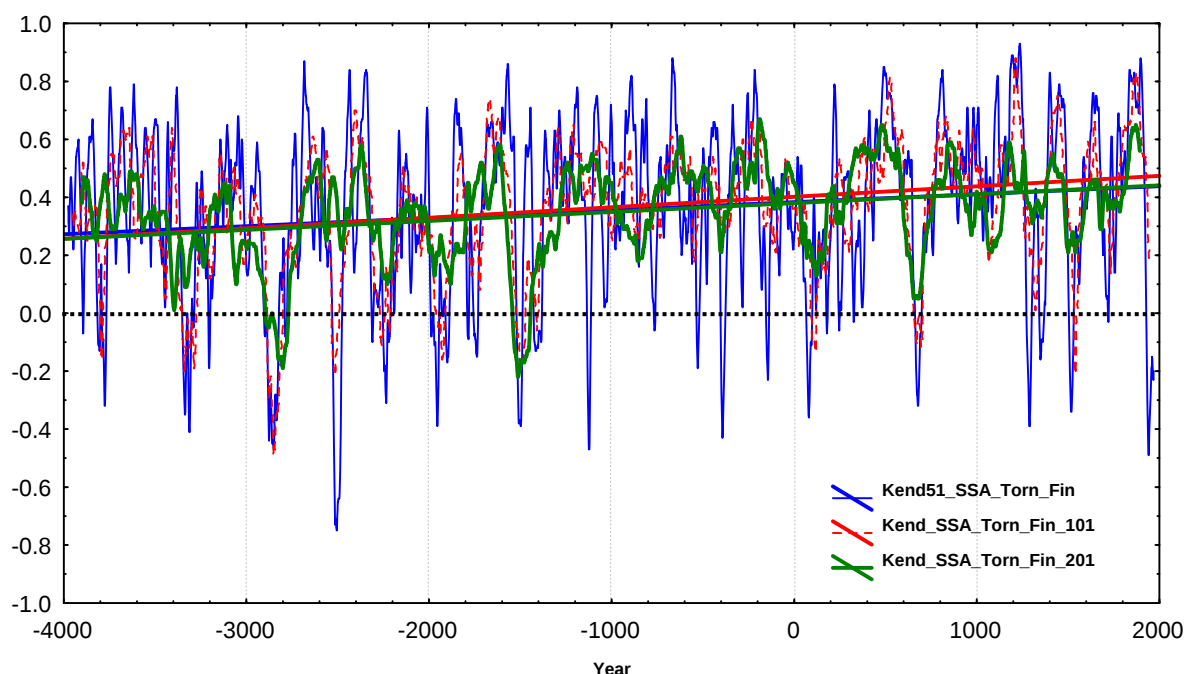


Рис. 13. Скользящие коэффициенты Кендалла синхронности, рассчитанные между смоделированными (70 % от общей дисперсии) Шведской и Финской хронологиями

Отметим также, что на циклические составляющие в данном разложении приходится примерно 70 % от общей дисперсии для рассматриваемых супердлительных древесно-кольцевых хронологий. Следовательно, 45 % вариации по Финляндии и 36 % – по Швеции, приходящиеся на высокочастотные составляющие, вносят в совокупности существенный вклад в согласованность между суммарными составляющими (смоделированными древесно-кольцевыми хронологиями) по Швеции и Финляндии (см. рис. 13).

На основании проведенного анализа получены следующие результаты:

1. Для выявления значимых циклов в дендроклиматических рядах достаточно тестировать полученный спектр на базе нулевой гипотезы, сформулированной для белого шума. Это позволяет значительно упростить процедуру достоверного определения циклическостей, присутствующих, например, в дендроклиматических рядах.

2. На базе двух независимых подходов: метода множественных сфероидальных последовательностей и сингулярного спектрального анализа получено спектральное разложение для двух сверхдлительных древесно-кольцевых хронологий по Швеции и Финляндии. Отмечаются высокие положительные коэффициенты корреляции между циклическими составляющими, полученных различными методами, для разных частотных полос.

3. Адекватность комбинированного MTM&SSA подхода для спектрального представления древесно-кольцевых хронологий подтверждена высокими положительными коэффициентами корреляции между «результатирующими» хронологиями, полученными различными способами для одних и тех участков.

4. Отмечается значимый положительный тренд в согласованности двух древесно-кольцевых хронологий, т. е. синхронность в поведении двух супердлительных древесно-кольцевых хронологий для Швеции и Финляндии значимо увеличивается от прошлого к настоящему.

5. Спектральный анализ полученных коэффициентов Кендалла показал на наличие следующих циклическостей, которые выявляются для различных скользящих окон: около 1500 лет, 300 лет, 135–155 лет, 90–110 лет, 45–65 лет.

6. Более 99 % значимых значений коэффициентов Кендалла для различных значений длины окна W являются положительными. Следовательно, либо исследуемые хронологии находятся постоянно в фазе, либо их поведение не согласованно. Явных противофаз в динамике исследуемых временных рядов не наблюдается.

7. При «покомпонентном» анализе (совместный анализ циклических составляющих для древесно-кольцевых хронологий) отмечается отрицательный тренд в динамике скользящего коэффициента Кендалла для низкочастотной компоненты с длиной волны больше, чем 200 лет и отсутст-

ние любых трендов в согласованности для циклических компонент с длиной волны от 100 до 200 лет.

8. Выявлено значимое влияние на согласованность между древесно-кольцевыми хронологиями высокочастотных компонент с длиной волны от 20 до 100 лет, которые в совокупности определяют существующий положительный тренд в согласованности.

Описанный выше подход позволяет находить адекватное спектральное разложение существующих древесно-кольцевых хронологий, проводить пространственные сопоставления динамики исследуемых временных рядов, указывая возможные причины рассогласования, строить новые длительные реконструкции различных климатических характеристик при помощи различных циклических составляющих.

Работа выполнена при поддержке проекта Министерства науки и высшего образования РФ «Наука будущего» № 5.3508.2017/4.6.

Библиографические ссылки

1. Ваганов Е. А., Шиятов С. Г., Мазепа В. С. Дендроклиматические исследования в Урало-Сибирской Субарктике. Новосибирск : Наука, 1996. 244 с.
2. Ваганов Е. А., Шашкин А. В. Рост и структура годичных колец хвойных. Новосибирск : Наука, 2000. 232 с.
3. Шишов В. В., Ваганов Е. А., Хьюз М. К., Корец М. А. Пространственная изменчивость прироста древесных растений на территории Сибири в последнем столетии // Докл. АН. М. : ДАН, 2002. Т. 387, № 5. С. 690–693.
4. Allen M. R. Smith L. A. Investigating the origins and significance of low-frequency modes of climate variability // Geophys. Res. Lett., 1994, 21: 883–886.
5. Reduced sensitivity of recent tree-growth to temperature at high northern latitudes / K. F. Briffa, F. H. Schweingruber, F. N. Jones et al. // Nature, 1998, 391: 678–682.
6. Tree-ring width and density data around the Northern Hemisphere: Part 1, local and regional climate signals / K. F. Briffa, T. J. Osborn, F. H. Schweingruber et al. // The Holocene, 2002, 12-6: 737–757
7. Elsner J. B., Tsonis A. A. Singular Spectrum Analysis. Plenum Press, 1996.
8. Mann M. E., Lees J. Robust Estimation of Background Noise and Signal Detection in Climatic Time Series // Climatic Change, 1996, 33: 409–445.
9. Lees J. M., Park J. Multiple-taper spectral analysis: a stand alone C-Subroutine // Computers & Geosciences. 1995, Vol. 21, No. 2: 199–236.
10. The forecast of seasonal precipitation trend at the north Helan Mountain and Baiyinaobao regions, Inner Mongolia for the next 20 years /

Liu Yu, V. Shishov, Shi Jiangfeng, E. Vaganov et al. // Chinese Science Bulletin, 2004, Vol. 49, No. 4: 410–415.

11. Percival D. B., Walden A. T. Spectral Analysis for Physical Applications, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1993. 583 p.

12. Ramachandra Rao A., Hamed K. Multi-taper method of analysis of periodicities in hydrologic data // Journal of Hydrology, 2003, 279: 125–143.

13. Thomson D. J. Spectrum estimation and harmonic analysis // Proc. IEEE 70, 1982: 1055–1096.

14. Wigley T. L., Raper R. Natural variability of the climate system and detection of the greenhouse effect // Nature, 1990, 344: 324–327.

15. Kendall M. Rank correlation methods. London : Griffin, 1970.

16. Kendall M., Gibbons J. D. Rank correlation methods. London : Griffin, 1990.

17. A 7400-year tree-ring chronology in northern Swedish Lapland: natural climatic variability expressed on annual to millennial timescales / H. Grudd, K. R. Briffa, W. Karlen et al. // The Holocene, 2002: 657–667.

18. Trends in recent temperature and radial tree growth spanning 2000 years across Northwest Eurasia / K. R. Briffa, V. V. Shishov, T. M. Melvin et al. // Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series B-Biological Sciences – Special issue, 2008. Vol. 363: 2271–2284, DOI: 10.1098/rstb.2007.2199.

19. Шишов В. В., Тычков И. И., Попкова М. И. Методы анализа дендроклиматических данных и их применение для территории Сибири : учеб. пособие ; Сиб. федер. ун-т. Красноярск, 2015. 210 с.

20. Шишов В. В., Попкова М. И., Тычков И. И. Нелинейное оценивание дендроклиматических данных и его применение для территории Сибири. Красноярск, 2016. 135 с.

21. Trends in elemental concentrations of tree rings from the Siberian Arctic / I. P. Panyushkina, V. V. Shishov, A. M. Grachev et al. // Tree-Ring Research. 2016. Vol. 72(2). P. 67–77. DOI: <http://dx.doi.org/10.3959/1536-1098-72.02.67>.

22. How can the parameterization of a process-based model help us understand real tree-ring growth? / I. I. Tychkov, I. V. Sviderskaya, E. A. Babushkina et al. // Trees – Structure and Function. 2019. Vol. 33(2). P. 345–357. DOI: 10.1007/s00468-018-1780-2 (Impact factor 1.78, SJR Quartile Q1).

23. Elevation-layered dendroclimatic signal in eastern Mediterranean tree rings / R. Touchan, V. V. Shishov, I. I. Tychkov et al. // Environmental Research Letters. 2016. Vol. 11 (4). Article number 044020. DOI: 10.1088/1748-9326/11/4/044020.

References

1. Vaganov E. A., Shiyatov S. G., Mazepa V. S. Dendroclimatic studies in the Ural-Siberian subarctic. Novosibirsk, Nauka, 1996, 244 p. (In Russ.)
2. Vaganov E. A., Shashkin A. V. Growth and structure of coniferous annual rings. Novosibirsk, Nauka, 2000, 232 p. (In Russ.)
3. Shishov V. V., Vaganov E. A., Hughes M. K., Korets M. A. Spatial variability of woody plant growth in Siberia in the last century // *Docl. AN. Moscow, DAN*, 2002, Vol. 387, No. 5, Pp. 690–693. (In Russ.)
4. Allen M. R. Smith L. A. Investigating the origins and significance of low-frequency modes of climate variability // *Geophys. Res. Lett.*, 1994, 21: 883–886.
5. Reduced sensitivity of recent tree-growth to temperature at high northern latitudes / K. F. Briffa, F. H. Schweingruber, F. N. Jones et al. // *Nature*, 1998, 391: 678–682.
6. Tree-ring width and density data around the Northern Hemisphere: Part 1, local and regional climate signals / K. F. Briffa, T. J. Osborn, F. H. Schweingruber et al. // *The Holocene*, 2002, 12-6: 737–757
7. Elsner J. B., Tsonis A. A. *Singular Spectrum Analysis*. Plenum Press, 1996.
8. Mann M. E., Lees J. Robust Estimation of Background Noise and Signal Detection in Climatic Time Series // *Climatic Change*, 1996, 33: 409–445.
9. Lees J. M., Park J. Multiple-taper spectral analysis: a stand alone C-Subroutine // *Computers & Geosciences*. 1995, Vol. 21, No. 2: 199–236.
10. The forecast of seasonal precipitation trend at the north Helan Mountain and Baiyinaobao regions, Inner Mongolia for the next 20 years / Liu Yu, V. Shishov, Shi Jiangfeng, E. Vaganov et al. // *Chinese Science Bulletin*, 2004, Vol. 49, No. 4: 410–415.
11. Percival D. B., Walden A. T. *Spectral Analysis for Physical Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1993. 583 p.
12. Ramachandra Rao A., Hamed K. Multi-taper method of analysis of periodicities in hydrologic data // *Journal of Hydrology*, 2003, 279: 125–143.
13. Thomson D. J. Spectrum estimation and harmonic analysis // *Proc. IEEE* 70, 1982: 1055–1096.
14. Wigley T. L., Raper R. Natural variability of the climate system and detection of the greenhouse effect // *Nature*, 1990, 344: 324–327.
15. Kendall M. *Rank correlation methods*. London, Griffin, 1970.
16. Kendall M., Gibbons J. D. *Rank correlation methods*. London, Griffin, 1990.
17. A 7400-year tree-ring chronology in northern Swedish Lapland: natural climatic variability expressed on annual to millennial timescales / H. Grudd, K. R. Briffa, W. Karlen et al. // *The Holocene*, 2002: 657–667.

18. Trends in recent temperature and radial tree growth spanning 2000 years across Northwest Eurasia / K. R. Briffa, V. V. Shishov, T. M. Melvin et al. // Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series B-Biological Sciences – Special issue, 2008. Vol. 363: 2271–2284, DOI: 10.1098/rstb.2007.2199.

19. Shishov V. V., Tychkov I. I., Popkova M. I. Methods of analysis of dendroclimatic data and their application to the territory of Siberia : Textbook ; Siberian Federal University. Krasnoyarsk, 2015, 210 p. (In Russ.)

20. Shishov V. V., Popkova M. I., Tychkov I. I. Nonlinear estimation of dendroclimatic data and its application for the territory of Siberia. Krasnoyarsk, 2016, 135 p. (In Russ.)

21. Trends in elemental concentrations of tree rings from the Siberian Arctic / I. P. Panyushkina, V. V. Shishov, A. M. Grachev et al. // Tree-Ring Research. 2016. Vol. 72(2). P. 67–77. DOI: <http://dx.doi.org/10.3959/1536-1098-72.02.67>.

22. How can the parameterization of a process-based model help us understand real tree-ring growth? / I. I. Tychkov, I. V. Sviderskaya, E. A. Babushkina et al. // Trees – Structure and Function. 2019. Vol. 33(2). P. 345–357. DOI: 10.1007/s00468-018-1780-2 (Impact factor 1.78, SJR Quartile Q1).

23. Elevation-layered dendroclimatic signal in eastern Mediterranean tree rings / R. Touchan, V. V. Shishov, I. I. Tychkov et al. // Environmental Research Letters. 2016. Vol. 11 (4). Article number 044020. DOI: 10.1088/1748-9326/11/4/044020.

© Шишов В. В., Коюпченко И. Н., 2019

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Кастро Луис Мануэль Пиньюэлас – бакалавр математических наук, аспирант магистратуры физико-математических наук университетского центра CUValles Университета Гвадалахары, Мексика.

E-mail: luismanuel.castro@hotmail.com.

Коюпченко Ирина Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент, Сибирский федеральный университет, Красноярск.

E-mail: IКoуupchenko@sfu-kras.ru.

Курмичев Евгений Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор факультета точных и технологических наук университетского центра CULagos Университета Гвадалахары, Мексика.

E-mail: ekurmyshev@culagos.udg.mx.

Матвеев Александр Данилович – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Российская Федерация, Красноярск.

E-mail: mtv241@mail.ru.

Сенашов Владимир Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск; профессор кафедры алгебры и математической логики, Сибирский федеральный университет, Красноярск.

E-mail: sen1112home@mail.ru, тел.: 8-960-762-58-45.

Сенашов Сергей Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева, Красноярск.

E-mail: sen@sibsau.ru.

Филюшина Елена Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева, Красноярск.

E-mail: filyushina@sibsau.ru.

Ширяева Тамара Алексеевна – кандидат физико-математических наук, доцент, Красноярский государственный аграрный университет, Красноярск.

E-mail: tas_sfu@mail.ru.

Шишов Владимир Валерьевич – доктор технических наук, доцент, Сибирский федеральный университет, Красноярск.

E-mail: shishov@kgtei.ru.

Шлепкин Алексей Анатольевич – кандидат физико-математических наук, Сибирский федеральный университет, Красноярск.

E-mail: shlyorpin@mail.ru.

Шлепкин Анатолий Константинович – доктор физико-математических наук, профессор, Красноярский государственный аграрный университет, Красноярск.

E-mail: ak_kgau@mail.ru.

Яхно Александр Николаевич – кандидат физико-математических наук, профессор математического факультета университетского центра CUCEI Университета Гвадалахары, Мексика.

E-mail: alexander.yakhno@cucei.udg.mx.

Яхно Лилия Владимировна – кандидат физико-математических наук, профессор математического факультета университетского центра CUCEI Университета Гвадалахары, Мексика.

E-mail: liliya.yakhno@yahoo.com.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Piñuelas Castro Luis Manuel – bachelor of mathematical Sciences, post-graduate master of physical and mathematical Sciences at the CUValles University center of the University of Guadalajara, Mexico.

E-mail: luismanuel.castro@hotmail.com.

Filushina Elena Vladimirovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Reshetnev University, Krasnoyarsk.

E-mail: filyushina@sibsau.ru.

Koyupchenko Irina Nikolaevna – Candidate of Physics and Mathematics Sciences, associate Professor, Siberian Federal University, Krasnoyarsk.

E-mail: IKoyupchenko@sfu-kras.ru

Kourmychev Evgeniy Vasilevich – doctor of physical and mathematical Sciences, Professor of the faculty of exact and technological Sciences at the CULagos University center of the University of Guadalajara, Mexico.

E-mail: ekurmyshev@culagos.udg.mx.

Matveev Alexander Danilovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate Professor, senior researcher, Institute of Computational Modeling SB RAS, Russian Federation, Krasnoyarsk.

E-mail: mtv241@mail.ru

Senashov Sergei Ivanovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Reshetnev University, Krasnoyarsk.

E-mail: sen@sibsau.ru.

Senashov Vladimir Ivanovich – Doctor of Physic and Mathematic Sciences, Professor, Leader Researcher of Institute of Computational Modelling of Siberian Branch of RAS, Professor of Algebra and Logic Department of Siberian Federal University.

E-mail: sen1112home@mail.ru, phone: 8-960-762-58-45.

Shiryaeva Tamara Alekseevna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Krasnoyarsk State Agrarian University, Krasnoyarsk.

E-mail: tas_sfu@mail.ru.

Shishov Vladimir Valer'evich – Doctor of Technical Sciences, associate Professor, Siberian Federal University, Krasnoyarsk.

E-mail: shishov@kgtei.ru.

Shlepkin Alexey Anatoly'evich – Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Siberian Federal University, Krasnoyarsk.

E-mail: shlyopkin@mail.ru.

Shlepkin Anatoly Konstantinovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Krasnoyarsk State Agrarian University, Krasnoyarsk.

E-mail: ak_kgau@mail.ru.

Yakhno Alexander Nikolaevich – candidate of physical and mathematical Sciences, Professor of mathematics at the CUCEI University center of the University of Guadalajara, Mexico.

E-mail: alexander.yakhno@cucei.udg.mx.

Yakhno Liliya Vladimirovna – candidate of physical and mathematical Sciences, Professor of mathematics at the CUCEI University center of the University of Guadalajara, Mexico.

E-mail: liliya.yakhno@yahoo.com.

Научное издание

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

*Избранные статьи XII Научной интернет-конференции
с международным участием*

Под редакцией С. И. Сенашова

Корректурa, оригинал-макет и верстка *Л. В. Звонаревой*

Подписано в печать 30.01.2020. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.

Печать плоская. Усл. печ. л. 7,3. Уч.-изд. л. 8,9. Тираж 100 экз.

Заказ . С 34/20.

Редакционно-издательский отдел СибГУ им. М. Ф. Решетнева.
660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31.

E-mail: rio@mail.sibsau.ru. Тел. (391) 201-50-99.

Отпечатано в редакционно-издательском центре

СибГУ им. М. Ф. Решетнева.

660049, г. Красноярск, просп. Мира, 82.

Тел. (391) 227-69-90.