

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Сибирский государственный аэрокосмический университет  
имени академика М. Ф. Решетнева

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ  
ТЕХНОЛОГИИ  
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

*Избранные статьи VII Научной интернет-конференции  
с международным участием*

Под редакцией С. И. Сенашова

Красноярск 2014

**Редакционная коллегия**

**СЕНАШОВ С. И.**, доктор физико-математических наук, профессор  
**ШИШОВ В. В.**, доктор технических наук, профессор  
**КУКАРЦЕВ В. В.**, кандидат технических наук, доцент  
**ФИЛЮШИНА Е. В.**, кандидат физико-математических наук, доцент

**Редакционный совет**

**МЕЛЕШКО С. В.**, доктор физико-математических наук,  
профессор (Тайланд)  
**ЛЫЧАГИН В. В.**, доктор физико-математических наук,  
профессор (Швеция)  
**ЮМАГУЖИН В. А.**, доктор физико-математических наук,  
профессор (Россия)  
**ЯХНО А. Н.**, профессор (Мексика)

**И74 Информационные технологии и математическое моделирование :**  
избр. статьи VII Науч. интернет-конф. с междунар. участием / под ред.  
С. И. Сенашова ; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т : Ун-т Гвадалахары. –  
Красноярск, 2014. – 158 с.

В основе сборника – избранные материалы VII Научной интернет-конференции с международным участием, в которых представлены результаты исследований ученых, преподавателей, научных сотрудников Российской Федерации и стран ближнего и дальнего зарубежья в области применения системного анализа, математического моделирования, оптимизации и информационных технологий в различных областях науки.

Сборник зарегистрирован в базе данных Ulrich's Periodicals Directory.

**УДК 330.4(519.248)**  
**ББК 65.04**

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Григорьев Ю. Н., Мелешко С. В.</b> О групповой классификации пространственно однородного и изотропного уравнения Больцмана с источниками .....	4
<b>Шишов В. В., Коюпченко И. Н., Тычков И. И.</b> Спектральный анализ дендрохронологических данных: аппроксимация и прогнозирование дендрохронологических временных рядов .....	15
<b>Аксенов А. В., Козырев А. А.</b> Редукции уравнения стационарного плоского пограничного слоя .....	44
<b>Антамошкин О. А., Кукарцев В. В.</b> Модели и методы формирования надежных структур информационных систем обработки информации .....	51
<b>Сенашов С. И., Филюшина Е. В.</b> Решение упруго-пластических задач с помощью законов сохранения .....	95
<b>Чугунов В. А.</b> Точные и приближенные решения одномерных уравнений «мелкой воды» и их физическая интерпретация .....	135
<b>Сведения об авторах</b> .....	155

## CONTENTS

<b>Grigoriev Yu. N., Meleshko S. V.</b> On group classification of the spatially homogeneous and isotropic Boltzmann equation with sources .....	4
<b>Shishov V. V., Koiupchenko I. N., Tychkov I. I.</b> Spectrum Analysis of Dendrochronological data: Fitting and Forecast of dendrochronological time series .....	15
<b>Aksenov A. V., Kozyrev A. A.</b> Reductions of a steady-state laminar boundary layer equation .....	44
<b>Antamoshkin O. A., Kukarcev V. V.</b> Models and methods of forming reliable structures of information systems for information processing .....	51
<b>Senashov S. I., Filushina E. V.</b> Solution of elastic – plastic problems with conservation laws .....	95
<b>Chugunov V. A.</b> Exact and approximate solutions of one-dimensional equation of the “shallow water” and their physical interpretation .....	135
<b>Information about the authors</b> .....	156

**ON GROUP CLASSIFICATION OF THE SPATIALLY  
HOMOGENEOUS AND ISOTROPIC BOLTZMANN  
EQUATION WITH SOURCES**

Yu. N. Grigoriev<sup>1</sup>, S. V. Meleshko<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institute of Computing Technology,  
1, Academician Koptug prosp., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

<sup>2</sup>School of Mathematics, Institute of Science, Suranaree University  
of Technology, Nakhon Ratchasima, Thailand

E-mail: sergey@math.sut.ac.th

*In [1] the classical group analysis method was applied to the equation which was obtained from the spatially homogeneous and isotropic Boltzmann equation with sources. The derived equation is still a nonlocal partial differential equation. However, this property was not taken into account there. In the present paper this lack of [1] is corrected.*

*Keywords: Boltzmann kinetic equation, exact (invariant) solutions, integro-differential equation, group analysis method.*

**О ГРУППОВОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННО  
ОДНОРОДНОГО И ИЗОТРОПНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА  
С ИСТОЧНИКАМИ**

Ю. Н. Григорьев<sup>1</sup>, С. В. Мелешко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт компьютерных технологий,  
Российская Федерация, 630090, Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1.

<sup>2</sup>Школа математики, Институт естественных наук, Технологический  
университет Суранари, Накхонратчасима, Таиланд.

E-mail: sergey@math.sut.ac.th

*В [1] методы классического группового анализа был применен к уравнению, которое было получено из пространственно однородной и изотропного уравнения Больцмана с источниками. Полученное уравнение является еще и нелокальным дифференциальным уравнением в частных производных. Однако это свойство не было принято во внимание в работе, поэтому результат был не совсем верен. В настоящей работе этот недостаток работы [1] исправлен.*

*Ключевые слова: кинетическое уравнение Больцмана, точные (инвариантные) решения, методы группового анализа.*

## 1. Introduction

The Boltzmann kinetic equation is a basis of the classical kinetic theory of rarefied gases. An interest in the study of the Boltzmann equation was always related with searching for exact (invariant) solutions directly associated with the fundamental properties of the equation. After the studies of the class of the local Maxwellians [2–4] new classes of invariant solutions were constructed in 1960s in [5–7]. The decade later the BKW-solution was almost simultaneously derived in [8] and in [9]. Contrary to the Maxwellians, the Boltzmann collision integral is not zero for this solution. The discovery of the BKW-solution stimulated a great splash of studies of exact solutions of different kinetic equations. However, the progress of that time was really restricted to obtaining BKW-type solutions for different simplified models of the Boltzmann equation (See the review [10]).

The Boltzmann equation is an integro-differential equation. Whereas the classical group analysis method is developed for studying partial differential equations. The main obstacle for applying group analysis to integro-differential equations consists in a presence of nonlocal integral operators. There are several approaches to overcome this difficulty (One can find a review of approaches in [11]). Among of them a transformation of an original integro-differential equation into a differential equation is one of such approaches. In the present paper we discuss the approach applied in [1], where using a generating function for the moments  $G(t, \omega)$  and generating function for the source-moments  $S(t, \omega)$  the following equation was studied

$$\frac{\partial^2(\omega G)}{\partial t \partial \omega} + M_0(t) \frac{\partial(\omega G)}{\partial \omega} = G^2 + \frac{\partial(\omega S)}{\partial \omega}.$$

Here  $M_0(t)$  is the zero moment of the spatially homogeneous and isotropic Boltzmann equation with isotropic scattering model. It is worth to notice that the generating function  $G(t, \omega)$  and the zero moment  $M_0(t)$  are related by the condition

$$M_0(t) = G(t, 0). \quad (2)$$

In [1] the classical group analysis method was applied to equation (1). However during finding an admitted Lie group the condition (2) was not taken into account there. The lack of this condition can lead to uncorrected admitted Lie groups. In the present paper this omission is corrected.

## 2. Determining equation

Equation (1) is rewritten in the form

$$(xu_t)_x - u^2 + u(0)(xu)_x = g, \quad (3)$$

where  $u(0) = u(t, 0)$ . Here  $\omega = x$ ,  $G = u$  and  $(\omega S)_\omega = g$ .

Because of the presence of the term  $u(0)$ , equation (3) is differed from a partial differential equation. Hence, the classical group analysis method cannot be applied to this equation. One needs to use the method developed for equations with nonlocal terms [11–13]. In this section the latest method is applied for finding an admitted Lie group of equation (3).

The admitted generator is sought in the form

$$X = \tau(t, x, u)\partial_t + \xi(t, x, u)\partial_x + \zeta(t, x, u)\partial_u.$$

According to the algorithm [11–13], the determining equation for equation (3) is

$$x\varphi_{tx} + \varphi_t + u(0)(x\varphi_x + \varphi) - 2\varphi u + \varphi(0)(xu)_x = 0, \quad (4)$$

$$\varphi(t, x) = \zeta(t, x, u(t, x)) - u_t(t, x)\tau(t, x, u(t, x)) - u_x(t, x)\xi(t, x, u(t, x)),$$

$$\varphi(0) = \varphi(t, 0).$$

After substituting into (4) the derivatives  $u_{tx}$ ,  $u_{txx}$  and  $u_{ttx}$  found from equation (3) and its derivatives with respect to  $x$  and  $t$ , respectively, one obtains the determining equation

$$\begin{aligned} & \zeta_{tx}x^2 + \zeta_t x + \zeta_u g x + \zeta_u u^2 x + g\xi + u^2\xi - 2ux\zeta + ux\zeta(0) - x(g_t\tau + g_x\xi + g(\tau_t + \xi_x)) - \\ & - \tau_t u^2 x - \xi_x u^2 x + u(0)(\zeta_x x^2 - \zeta_u u x - u\xi + x\zeta + x\xi_x u + x\tau_t u) - xu_x(0)(u_x x + u)\xi(0) - \\ & - \tau_x u_{tt} x^2 - x^2 u_x u_{tt} \tau_u - u_t u_{xx} \xi_u x^2 - u_{xx} \xi_t x^2 + u_t u_x u (\zeta_{uu} x - \tau_{tu}(0)x - \xi_{xu} x + \xi_u) + \\ & + u_t \cdot (\xi_x x + \zeta_{xu} x^2 - \xi - \tau_{tx} x^2 - 2\tau_u x (g + u^2) + u(0)x(2\tau_u u - x\tau_x)), \quad (5) \\ & + u_t^2 x (\tau_u - x\tau_{xu}) + xu_t(0)(\tau - \tau(0))(u_x x + u) + u_x^2 x^2 (\xi_u u(0)) - \xi_{tu} - \\ & - u_t^2 u_x \tau_{uu} x^2 - u_t u_x^2 \xi_{uu} x^2 + \\ & + xu_x (x(\tau_t u(0) + \zeta(0) + \zeta_{tu}) - \xi_{tx} x - \xi_t - 2\xi_u g - 2\xi_u u^2 + 2\xi_u u u(0)) = 0. \end{aligned}$$

Here

$$\tau(0) = \tau(t, 0, u(t, 0)), \xi(0) = \xi(t, 0, u(t, 0)), \zeta(0) = \zeta(t, 0, u(t, 0)),$$

$$u_t(0) = u_t(t, 0), u_x(0) = u_x(t, 0).$$

Differentiating the determining equation (5) with respect to  $u_{tt}$ , ...,  $u_{xx}$  and then with respect to  $u_t$  and  $u_x$ , one gets.

Hence,  $\tau_u = 0, \tau_x = 0, \xi_u = 0, \xi_t = 0$ .

and

$$\tau = \tau(t), \xi = \xi(x),$$

$$\tau(0) = \tau.$$

Differentiating the determining equation with respect to  $u_t$  and then  $u_x$ , one finds

$$\zeta_{uu} = 0$$

or

$$\zeta(t, x, u) = u\zeta_1(t, x) + \zeta_0(t, x).$$

The coefficient with  $u_x u_x(0)$  in the determining equation (5) gives that  $\xi(0) = 0$ . Continue splitting the determining equation (5) with respect to  $u_t$  and then  $u_x$ , one finds

$$\zeta_1(t, x) = -x^{-1}\xi(x) + \zeta_{10}(t).$$

Hence,

$$\zeta(0) = \zeta(t, 0) = u(0)(\zeta_{10}(t) - \xi'(0)) + \zeta_0(t, 0).$$

The coefficient with  $u_x u(0)$  leads to the condition

$$\zeta_{10} = -\tau_t + \xi'(0).$$

Differentiating twice the determining equation with respect to  $u$ , one has

$$\xi_{tt} = 2\frac{\xi}{x} - \xi'(0).$$

The general solution of this equation is

$$\xi = x(c_1 x + c_0).$$

Equating to zero the coefficient with  $u_x$ , one derives

$$\tau_{tt}(t) = \zeta_0(t, 0).$$

The coefficient with  $u(0)$  in the determining equation (5) gives

$$x\zeta_{0x} + \zeta_0 = 0.$$

This equation only has one solution which is nonsingular at  $x = 0$ :

$$\zeta_0(t, x) = 0.$$

Hence,  $\zeta_0(t, 0) = 0$ , and

$$\tau = c_2 t + c_3.$$

The remaining part of the determining equation (5) becomes

$$g_t(c_2 t + c_3) + x g_x(c_1 x + c_0) = -2g(c_1 x + c_2). \quad (6)$$

Thus, the admitted generator has the form

$$X = c_0 X_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3,$$

where

$$X_0 = x \partial_x, X_1 = x(x \partial_x - u \partial_u), X_2 = t \partial_t - u \partial_u, X_3 = \partial_t. \quad (7)$$

The values of constants  $c_0, c_1, c_2, c_3$  and relations between them depend on the function  $g(t, x)$ .

The trivial case of the function

$$g = 0,$$

satisfies equation (6), and corresponds to the case of the spatially homogeneous and isotropic Boltzmann equation without a source term. The distribution function in this case only depends on the modulus of molecular velocity and time. Using the Fourier transform in this case the following equation was derived in [14]:

$$\varphi_t(x, t) + \varphi(x, t)\varphi(0, t) = \int_0^1 \varphi(xs, t)\varphi(x(1-s), t) ds. \quad (8)$$

Complete group classification of equation (8) was presented in [12; 15]. The four-dimensional Lie algebra  $L^4 = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$  spanned by the generators

$$Y_0 = x \partial_x, Y_1 = x \varphi \partial_\varphi, Y_2 = t \partial_t - \varphi \partial_\varphi, Y_3 = \partial_t \quad (9)$$

defines the complete Lie group  $G^4$  admitted by equation (8). Invariant solutions were also obtained.

Notice that one can derive direct relations between the generators (7) and (9).

### 3. Comparison with [1]

Using the variables of the present paper let us formulate the results of [1]. The admitted generator obtained in [1] has the form

$$X = T(t)(\partial_t - M_0(t)G\partial_G) + \alpha G\partial_G + (\gamma - \delta)x(x\partial_x - G\partial_G) - \gamma x\partial_x,$$

where

$$T(t) = \beta - \alpha \int_0^t e^{-m_0(t')} dt', \quad m_0(t) = \int_0^t M_0(t') dt',$$

$\alpha, \beta, \gamma$  and  $\delta$  are constant. The function  $g(t, x)$  has to satisfy the equation

$$T(t) \frac{\partial g}{\partial t} + x(x(\gamma - \delta) - \gamma) \frac{\partial g}{\partial x} = -2(x(\gamma - \delta) + M_0(t)T(t) - \alpha)g.$$

One can see that the part related with the constants  $\gamma$  and  $\delta$  coincide with the result of the present paper, whereas the part related with the constants  $\alpha$  and  $\beta$  is completely different.

#### 4. On equivalence transformations of (3)

For the group classification one needs to know equivalence transformations. Let us find some of them using the generators (7) and considering their transformations of the left hand side of equation (3)

$$L = xu_{tx} + u_t - u^2 + u(0)(xu_x + u).$$

The transformations corresponding to the generator  $X_0 = x\partial_x$  map a function  $u(t, x)$  into the function

$$\bar{u}(\bar{t}, \bar{x}) = u(\bar{t}, \bar{x}e^{-a}),$$

where  $a$  is the group parameter.

Hence,

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \bar{x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{t}}(\bar{t}, \bar{x}) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}(\bar{t}, \bar{x}) - \bar{u}^2(\bar{t}, \bar{x}) + \bar{u}(\bar{t}, 0) \left( \bar{x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}(\bar{t}, \bar{x}) + \bar{u}(\bar{t}, \bar{x}) + \bar{u}(\bar{t}, \bar{x}) \right) = \\ &= x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(t, x) + \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - u^2(t, x) + u(t, 0) \left( x \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + u(t, x) \right). \end{aligned}$$

One can check that the Lie group of transformations

$$\bar{t} = t, \quad \bar{x} = xe^a, \quad \bar{u} = u, \quad \bar{g} = g$$

is an equivalence Lie group of equation (3).

Similar one derives that the transformations corresponding to the generator  $X_3 = \partial_t$  define the equivalence Lie group:

$$\bar{t} = t + a, \quad \bar{x} = x, \quad \bar{u} = u, \quad \bar{g} = g.$$

The transformations corresponding to the generator  $X_2 = t\partial_t - u\partial_u$  map a function  $u(t, x)$  into the function

$$\bar{u}(\bar{t}, \bar{x}) = e^{-a} u(\bar{t}e^{-a}, \bar{x}).$$

Hence,

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \bar{x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{t}}(\bar{t}, \bar{x}) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}(\bar{t}, \bar{x}) - \bar{u}^2(\bar{t}, \bar{x}) + \bar{u}(\bar{t}, 0) \left( \bar{x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}(\bar{t}, \bar{x}) + \bar{u}(\bar{t}, \bar{x}) \right) = \\ &= e^{-2a} \left( x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(t, x) + \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - u^2(t, x) + u(t, 0) \left( x \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + u(t, x) \right) \right). \end{aligned}$$

One can conclude that the transformations

$$\bar{t} = t, \bar{x} = xe^a, \bar{u} = u, \bar{g} = ge^{-2a}$$

compose an equivalence Lie group of equation (3).

The transformations corresponding to the generator  $X_1 = x(x\partial_x - u\partial_u)$  map a function  $u(t, x)$  into the function

$$\bar{u}(\bar{t}, \bar{x}) = \frac{1}{1+ax} u\left(\bar{t}, \frac{\bar{x}}{1+ax}\right).$$

Hence,

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \bar{x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{t}}(\bar{t}, \bar{x}) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}(\bar{t}, \bar{x}) - \bar{u}^2(\bar{t}, \bar{x}) + \bar{u}(\bar{t}, 0) \left( \bar{x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}(\bar{t}, \bar{x}) + \bar{u}(\bar{t}, \bar{x}) \right) = \\ &= (1-ax)^2 \left( x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(t, x) + \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - u^2(t, x) + u(t, 0) \left( x \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + u(t, x) \right) \right). \end{aligned}$$

and the transformations

$$\bar{t} = t, \bar{x} = \frac{1}{1-ax}, \bar{u} = (1-ax)u, \bar{g} = (1-ax)u, \bar{g} = (1-ax)^2 g$$

compose an equivalence Lie group of transformations.

Thus, it shown that the Lie group corresponding to the generators

$$X_0^e = x\partial_x, X_1^e = x(x\partial_x - u\partial_u - 2g\partial_g), X_2^e = t\partial_t - u\partial_u - 2g\partial_g, X_3^e = \partial_t$$

is an equivalence Lie group of equation (3).

## 5. Group classification

Group classification of equation (3) is performed with respect to equivalence transformations considered above.

Equation (6) can be rewritten in the form

$$c_0 h_0 + c_1 h_1 + c_2 h_2 + c_3 h_3 = 0, \quad (10)$$

where

$$h_0 = xg_x, h_1 = x(xg_x + 2g), h_2 = tg_t + 2g, h_3 = g_t. \quad (11)$$

For classification of all possibilities it is convenient to consider the functions  $h_i$ , ( $i=0, 1, 2, 3$ ) as coordinates of the four-dimensional vector

$$v = (h_0, h_1, h_2, h_3)$$

The analysis of the relations between the constants  $c_0, c_1, c_2$  and  $c_3$ , follows to the algorithm developed for the gas dynamics equations [16]: the vector space  $\text{Span}(V)$ , where the set  $V$  consists of the vectors  $v$  with  $t$  and  $x$  are changed. This algorithm allows one to study all possible admitted Lie algebras of equation (3) without omission.

First of all, if the function  $g(t, x)$  is such that changing  $t$  and  $x$ , one can find four linear independent vectors  $v$ , then equation (10) can only be satisfied in the case

$$c_0 = 0, c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0.$$

In this case equation (3) does not admit a Lie group. Hence, for existence of an admitted Lie group one needs to study  $\dim(\text{Span}(V)) \leq 3$ .

Another trivial case is  $\dim(\text{Span}(V)) = 0$ . One can derive that  $\dim(\text{Span}(V)) = 0$  if and only if  $g = 0$ . Indeed, if  $g = 0$ , then  $v = 0$ . Conversely, if  $\dim(\text{Span}(V)) = 0$ , then the vector  $v = (h_0, h_1, h_2, h_3)$  is constant with  $t$  and  $x$  are changed. This leads to the function

$$g = 0.$$

Further study deals with  $1 \leq \dim(\text{Span}(V)) \leq 3$ .

### 5.1. Case $\dim(\text{Span}(V)) = 1$

In this case there is a constant vector

$$(\alpha, \beta, \gamma, \theta) \neq 0,$$

such that

$$h_0 = \alpha\rho, h_1 = \beta\rho, h_2 = \gamma\rho, h_3 = \theta\rho, \quad (12)$$

where  $p(t, x) = 0$  is some function which is not constant. Substituting (11) into (12), one obtains that

$$g = \rho(\gamma - t\theta) / 2.$$

and

$$\beta - (\alpha + \gamma)x + tx\theta = 0, \rho_t(\gamma - t\theta) = 3\rho\theta, \quad x\rho_x(\gamma - t\theta) = 2\rho\alpha.$$

Hence,

$$\beta = 0, \theta = 0, \gamma = -\alpha \neq 0, \rho_t = 0, x\rho_x\gamma = -2\rho.$$

In this case one derives that the function  $g(t, x) = qx^{-2}$ , where  $q = 0$  is constant. Equation (6) becomes

$$c_2 = c_0.$$

Thus, for the function  $g = qx^{-2}$  the admitted generators are

$$X_0 + X_2, X_1, X_3.$$

## 5.2. Case $\dim(\text{Span}(\mathbf{V})) = 2$

In this case there are two constant vectors  $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \theta_i)$ ,  $(i=1,2)$  and functions  $\rho_i(t, x)$  such that  $\rho_1\rho_2 \neq 0$ ,

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \theta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \theta_2 \end{pmatrix} = 2,$$

and

$$v = \rho_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \theta_1) + \rho_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \theta_2).$$

The last equation leads to the conditions

$$g = \frac{1}{2}(\rho_1(\gamma_1 - t\theta_1) + \rho_2(\gamma_2 - t\theta_2)),$$

$$\rho_1(\beta_1 - (\alpha_1 + \gamma_1)x + \theta_1tx) + \rho_2(\beta_2 - (\alpha_2 + \gamma_2)x + \theta_2tx) = 0,$$

$$\rho_{1t}(t\theta_1 - \gamma_1) + \rho_{2t}(t\theta_2 - \gamma_2) + 3\rho_1\theta_1 + 3\rho_2\theta_2 = 0, \quad .(14)$$

$$\rho_{1x}x(t\theta_1 - \gamma_1) + \rho_{2x}x(t\theta_2 - \gamma_2) + 2\rho_1\alpha_1 + 2\rho_2\alpha_2 = 0.$$

Notice that  $\beta_1 - (\alpha_1 + \gamma_1)x + \theta_1tx \neq 0$ , because otherwise condition (13) is violated. Hence,

$$\rho_1 = -\rho_2 \frac{\beta_2 - (\alpha_2 + \gamma_2)x + \theta_2tx}{\beta_1 - (\alpha_1 + \gamma_1)x + \theta_1tx},$$

and the remained equations in (14) compose an overdetermined system of equations for the function  $p_2(t, x)$ . Since the analysis of compatibility of this

system is cumbersome (although is not complicated), we omit it here. After finding the function  $g(t, x)$ , and substituting this function into equation (6), one finds relations between the constants  $c_0, c_1, c_2$  and  $c_3$  as it demonstrated for the  $\dim(\text{Span}(V)) = 1$ .

### 5.3. Case $\dim(\text{Span}(V)) = 3$

Analysis of this case differs from the previous case by using a single constant vector

$$(\alpha, \beta, \gamma, \theta) \neq 0$$

which is orthogonal to the set  $V$ :

$$h_0\alpha + h_1\beta + h_2\gamma + h_3\theta = 0. \quad (15)$$

Substituting (11) into (15), one obtains a first-order partial differential equation which has the characteristic system of equations

$$\frac{dt}{\beta t + \gamma} = \frac{dx}{x(\alpha x + \theta)} = \frac{dg}{-2g(\alpha x + \beta)}.$$

As in the previous case a solution of equation (15) depends on the values of  $\alpha, \beta, \gamma$  and  $\theta$ , and after finding the function  $g(t, x)$ , and substituting this function into equation (6), one finds relations between the constants  $c_0, c_1, c_2$  and  $c_3$ .

## 6. Conclusion

The present paper deals with the group classification of equation (3). The presence of the term  $u(0)$  in equation (3) differs it from a partial differential equation. The method developed for equations with nonlocal terms [11–13,] was applied in the present paper. The obtained result is matched with [12; 15], and essentially different in comparison with [1]. It is also worth to notice that after obtaining the function  $g(t, x)$  one has to coordinate it with the source term of the original Boltzmann equation. Only then the invariant solutions of the spatially homogeneous and isotropic Boltzmann equation with isotropic scattering model can be considered.

## 7. Acknowledgements

This research was partially supported by the Office of the Higher Education Commission under NRU project (SUT).

## References

1. *Nonenmacher T. F.* Application of the similarity method to the nonlinear Boltzmann equation // J. of Appl. Mathem. and Physics (ZAMP), 35(9):680–691, 1984.

2. *Maxwell J. C.* On the dynamical theory of gases // Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 157:49–88, 1867.
3. *Boltzmann L.* Further studies on the thermal equilibrium among gas-molecules // Collected Works, 1:275–370, 1872.
4. *Carleman T.* Problemes Mathematiques Dans la Theorie Cinetique des Gas. Uppsala, 1957.
5. *Nikolskii A. A.* The simplest exact solutions of the Boltzmann equation of a rarefied gas motion. Dokl. AS USSR, 151(2):299–301, 1963.
6. *Nikolskii A. A.* Three dimensional homogeneous expansion–contraction of a rarefied gas with power interaction functions. Dokl. AS USSR, 151(3):522–524, 1963.
7. *Nikolskii A. A.* Homogeneous motion of displacement of monatomic rarefied gas // Inzhenerny J., 5(4):752–755, 1965.
8. *Bobylev A. V.* On exact solutions of the Boltzmann equation. Dokl. AS USSR, 225(6):1296–1299, 1975.
9. *Krook M., Wu T. T.* Formation of Maxwellian tails // Phys. Rev. Lett., 36(19):1107–1109, 1976.
10. *Ernst M. H.* Nonlinear model–Boltzmann equations and exact solutions // Phys. Rep., 78:1–171, 1981.
11. *Grigoriev Yu. N., Ibragimov N. H., Kovalev V. F., Meleshko S. V.* Symmetries of integro-differential equations and their applications in mechanics and plasma physics // Lecture Notes in Physics, Vol. 806. Springer, Berlin / Heidelberg, 2010.
12. *Grigoriev Yu. N., Meleshko S. V.* Investigation of invariant solutions of the Boltzmann kinetic equation and its models, 1986. Preprint of Institute of Theoretical and Applied Mechanics.
13. *Meleshko S. V.* Methods for Constructing Exact Solutions of Partial Differential Equations. Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering. Springer, New York, 2005.
14. *Bobylev A. V.* On exact solutions of the Boltzmann equation. Dokl. AS USSR, 225(6):1296–1299, 1975.
15. *Grigoriev Yu. N., Meleshko S. V.* Group analysis of the integro-differential Boltzmann equation. Dokl. AS USSR, 297(2):323–327, 1987.
16. *Ovsiannikov L. V.* Group analysis of differential equations. Nauka, Moscow, 1978. English translation, Ames, W. F., Ed., published by Academic Press, New York, 1982.

**SPECTRUM ANALYSIS OF DENDROCHRONOLOGICAL DATA:  
FITTING AND FORECAST OF DENDROCHRONOLOGICAL  
TIME SERIES**

V. V. Shishov<sup>1</sup>, I. N. Koiupchenko<sup>2</sup>, I. I. Tychkov<sup>3</sup>

Siberian Federal University,  
2, L. Prushinskoy str., Krasnoyarsk, 660075, Russian Federation.

E-mail: <sup>1</sup>vlad.shishov@gmail.com

<sup>2</sup>kinkras@gmail.com

<sup>3</sup>ivan.tychkov@gmail.com

*The goal of the paper is to verify information losses in case of testing a power spectrum by white-noise null hypothesis for detection of significant cycles in dendroclimatical series. New approach described allows to obtain the adequate spectral decomposition of different tree-ring chronologies, to analyze spatial comparisons of different time series, specifying possible reasons of disagreement, to build new long-term reconstruction of different climatic series by different cyclical components. Moreover, the approach allows to extend super long-term tree-ring chronology by low-frequency components, to verify temporal periods in the past for which there are no good statistical estimations, and, finally, to extend existing climatic reconstruction.*

*Keywords: tree-ring series, chronology, spectral decomposition, white noise, climate reconstruction, MTM-approach, singular component analysis.*

**СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДЕНДРОХРОНОЛОГИЧЕСКИХ  
ДАНЫХ: АППРОКСИМАЦИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ  
ДЕНДРОХРОНОЛОГИЧЕСКИХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ**

В. В. Шишов<sup>1</sup>, И. Н. Коюпченко<sup>2</sup>, И. И. Тычков<sup>3</sup>

Сибирский федеральный университет,  
Российская Федерация, 660075, г. Красноярск, ул. Л. Прушинской, 2.

E-mail: <sup>1</sup>vlad.shishov@gmail.com

<sup>2</sup>kinkras@gmail.com

<sup>3</sup>ivan.tychkov@gmail.com

*Целью данной работы является проверка объема информации, потерянной при анализе функций спектральной плотности на основе нулевой гипотезы о белом шуме для выявления значимых цикличностей в дендрохронологических рядах. Новый описанный подход позволяет получать адекватное спектральное разложение различных древесно-кольцевых*

*хронологий, анализировать пространственную сравнимость этих временных рядов, с возможностью выявления причин несогласованности, строить новые длительные реконструкции различных климатических временных рядов на основе циклических составляющих. Более того, данный подход позволяет продлить сверхдлительные древесно-кольцевые хронологии на основе низко-частотных компонент, анализировать временные периоды, для которых не существует хороших статистических оценок и продлить существующие климатические реконструкции.*

*Ключевые слова: древесно-кольцевые ряды, хронология, спектральное разложение, белый шум, климатическая реконструкция, МТМ-подход, сингулярный спектральный анализ.*

It is known, that tree-ring chronologies (dendrochronological time series) are the important source of the oblique high-resolution information about climate and environmental changes in the past and the present (Briffa, et al. 1998, 2002; Vaganov, Shashkin, 2000; Shishov et al., 2002). Often the time series signals are associated with direct external periodic forcing (for example, annual irradiance), or with the internal oscillations of biological systems caused by age changes of last ones, for example (Mann, Lees, 1996). In most cases, the signal is a superposition of different internal and external influences (Allen, Smith, 1994; Wigley, Raper, 1990).

As a rule, periodic signals are simulated by sine functions and, easily, displayed as precise local maximas (narrow peaks) for power spectrum of time series with coherent phase spectrum (Thomson, 1982). When the amplitude and phase for revealed signals are unstable, the previous approach is insufficient. It is necessary to make a number of additional assumptions about possible reasons of the frequency, phase and amplitude instability. After that, signals will be determined as local spectral maximas with higher amplitude in comparison with prospective “noise” (Mann, Lees, 1996).

In climatology it is considered, that instability (nonstationarity) in different systems should be related with “low-frequency” noise arising from the interaction of a white noise with slow-response components of some system (Allen, Smith, 1994; Wigley, Raper, 1990). Such noise is called “red” by definition (Mann, Lees, 1996). Usually, red noise is described by first-order autoregressive process AR (1):  $R_n = \rho R_{n-1} + \omega_n$ , ( $n = 0, \dots, N$ ), where  $\rho$  – lag-one autocorrelation coefficient ( $0 < \rho < 1$ ),  $\omega_n$  – Gaussian noise with average  $R_0$  and variance  $\sigma^2$  (Mann, Lees, 1996). There are several procedures for influence estimation of such stochastic processes to power spectrum of investigated time series (Mann, Lees, 1996; Thomson, 1982). Such procedures allow to estimate different characteristics of such stochastic factors and, thus, to consider its contribution to estimated power spectrum. In such case, significance of power spectrum peaks is tested by “red-noise” null hypothesis.

**The goal of the paper to verify information losses in case of testing a power spectrum by white-noise null hypothesis for detection of significant cycles in dendroclimatical series.**

### **Simulated time-series and approach to analyze them**

Two methods have been used as the basic methods for a spectral decomposition: multiple-taper method – MTM (Lees, Park, 1995; Percival, Walden, 1993; Thomson, 1982) and a singular spectrum analysis (SSA) (Elsner, Tsonis, 1996; Liu et al., 2004). Traditional Monte-Carlo approach have been used for simulating of red-noise AR (1) process.

To simulate a time series an approach described by Mann and Lees (1996) is used with some modifications. In our case, a simulated time series (time-series duration is 1440 yrs) is a linear combination of the next components: linear trend, 3 pure sinusoids with periods in 300, 108 and 36 years with the relative amplitude 1, high-frequency component with period in 5 years and the relative amplitude 0.75, 3 sine oscillations with periods in 11-12 years and amplitude 1, and, finally, AR (1) process with variance  $\sigma^2 = 2$  (Fig. 1). In that case the noise contribution to variance of investigated synthetic process was increased in comparison with Mann&Lees paper (1996).

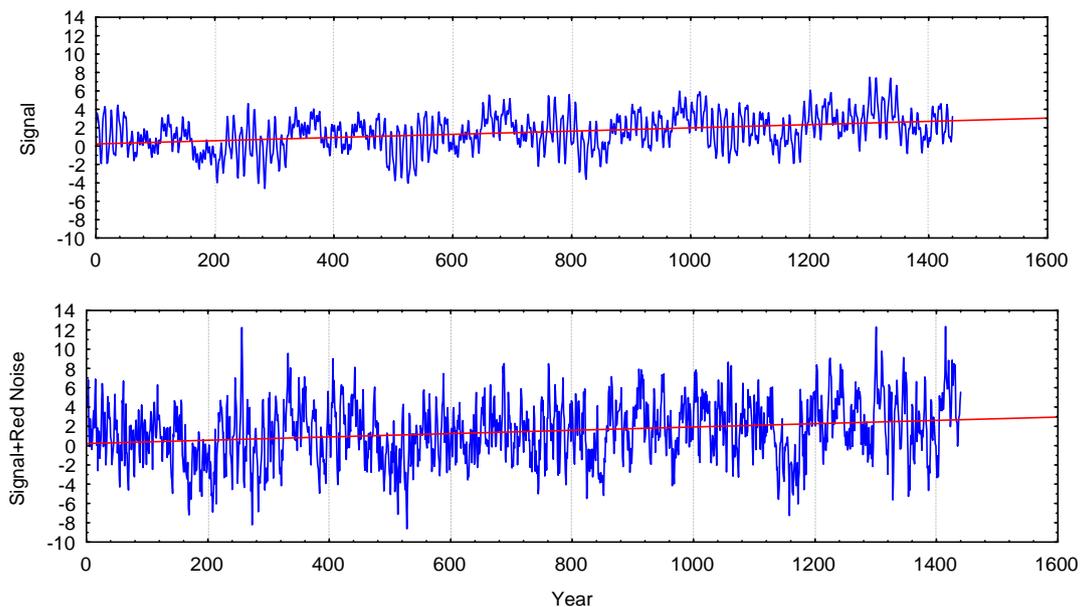


Fig. 1. The pure time-series signal (on top) and linear combination of the signal and red noise process (on bottom)

By MTM approach “pure” signal decomposition of considered time series in a synthetic example (Fig. 2, *a*) was obtained. Estimated frequencies, practically, were similar with theoretical frequencies for pure signal. The same decomposition is obtained by independent methods – singular spectrum analysis (SSA). The cycles significance is tested by assumption, that background is a white noise process.

The similar approach has been applied for testing of significant cyclical components for 160 simulated time series consisting of red noise process and “pure” signal. 20 time series for each one-lag autocorrelation coefficient –  $\rho$ , which varied from 0.1 to 0.8 were analyzed.

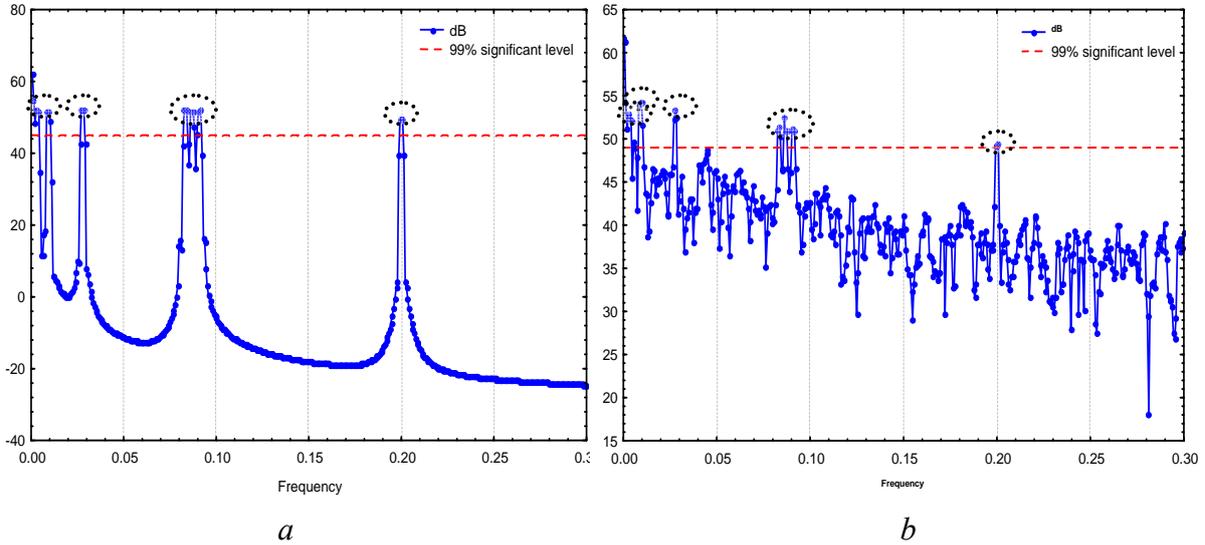


Fig. 2. MTM-spectral decomposition of “pure” signal: *a*) and simulating time series (signal-plus-red noise ( $\rho = 0.4$ ); *b*) (99.9 % – significance level for a white noise is indicated by the bold dashed line)

The results show, that significant differences between power spectrums of the signal and the simulated series originate in cases, when  $\rho$  becomes more, than 0.6 (Tab. 1).

In that case the similarity of MTM power spectrums is interpreted as a uniformity of multitude of the frequencies selected by F-criteria and their amplitude (in dB) in the frequency domain.

*Table 1*

**Comparison of spectral characteristics for simulated time-series and the signal**

Statistics	One-lag autoregressive coefficient $\rho$ determinant of red noise process							
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\bar{R}$ – average correlation coefficient between time series	0.70	0.69	0.68	0.67	0.65	0.62	0.58	0.51
Similarity of MTM power spectrums	20/20	20/20	19/20	19/20	18/20	17/20	6/20	2/20

If autocorrelation coefficient exceeds 0.6, an additional transformations of power spectrum (for example, by robust estimations) and change of a null hypothesis (Mann, Lees, 1996; Thomson, 1982) are needed. As a null hypothesis the next assumption is advanced: initial time series are AR (1) process for a white noise, i. e. red noise process.

On the other hand, by some results the “noise” autocorrelation for dendroclimatical and dendrochronological time series does not exceed 0.4–0.6 (Mann, Lees, 1996; Ramachandra, Hamed, 2003).

Therefore, for reliable cycles obtaining it is enough to use the assumption about white noise background in original dendroclimatical time series. It allows to simplify considerably the procedure of reliable cycles revealing, for example, in dendroclimatology.

### **Analysis of super long-term tree-ring chronologies**

The 2 super long-term tree-ring chronologies obtained for Sweden and Finland have been used (Grudd et al., 2002; Briffa et al., 2008).

The multiple-taper method (MTM) and singular spectrum analysis (SSA) are used for obtaining of additive spectral decomposition. Both of these are nonparametric and can be applied for analysis of non-stationary time series (Elsner, Tsonis, 1996; Mann, Lees, 1996; Lees, Park 1995).

$\tau$ -statistics of Kendall (Kendall, 1970; Kendall, Gibbons, 1990) with modifications has been used for estimation of similarity (concordance) in variations of time series. Modifications were related with calculation of sliding Kendall’s coefficients with some sliding window of length  $W$ .

For calculation of such coefficients ( $K$ -coefficients) at the moment  $t$  with length of “window”  $W = 2k + 1$  between two time series ( $i$ -th и  $j$ -th) it is necessary to calculate:

$$S_{ij} = \sum_{\substack{p,q=t-k \\ (p < q)}}^{t+k} R(x_i(p), x_i(q)) R(x_j(p), x_j(q)),$$

$$T_i = \sum_{\substack{p,q=t-k \\ (p < q)}}^{t+k} \left(1 - \left(R(x_i(p), x_i(q))\right)\right), \quad T_j = \sum_{\substack{p,q=t-k \\ (p < q)}}^{t+k} \left(1 - \left(R(x_j(p), x_j(q))\right)\right),$$

where

$$R(x_i(p), x_i(q)) = \begin{cases} +1, & \text{если } x_i(q) - x_i(p) > 0, \\ 0, & \text{если } x_i(q) - x_i(p) = 0, \\ -1, & \text{если } x_i(q) - x_i(p) < 0, \end{cases}$$

And, at last,  $K$ -coefficient

$$K_{ij}(t, W) = \frac{S_{ij}}{\sqrt{0,5 \cdot W(W-1) - T_i} \cdot \sqrt{0,5 \cdot W(W-1) - T_j}}.$$

$K$ -coefficient of rank correlation is use for independence test of 2 random variables (for example, unsimilarity of two tree-ring series). If the hypothesis of

independence is true, then  $M(K) = 0, D(K) = \frac{2(2W + 5)}{9W(W - 1)}$ . For a small size of sample ( $4 \leq W \leq 10$ ) the testing of independence hypothesis is yielded by special table of  $\tau$ -statistics distribution.

For  $W > 10$  next results is used:  
variable

$$t_K = 1 / 2K \cdot W(W - 1) / \sqrt{W(W - 1)(2n + 5) / 18},$$

where  $K$  – correspondent  $K$ -coefficients;  $W$  – length of sliding window (yr), is distributed by Student distribution. Critical values ( $p < 0.05$ ) for Kendall coefficient can be found below (Tab. 2).

Table 2

**The critical values of Kendall's  $\tau$ -statistics obtained for different sliding windows  $W$**

The length of Window $W$ (yr)	Critical value $K$	Significance level $p$
11	0.46	0.05
21	0.31	0.05
51	0.21	0.05
101	0.14	0.05
201	0.10	0.05

The criteria based on rank correlations of Spearman and Kendall are equivalent asymptotically (for  $W = 2$  the correspondence rank statistics are the same). Let us consider preliminary results, related with spectral decomposition and analysis of different components of the super long-term tree-ring chronologies. By the MTM approach the spectral decomposition of the tree-ring chronologies has been obtained (Tab. 3).

Table 3

**A spectral decomposition of the super long-term chronologies obtained for Sweden and Finland (The frequencies were selected by  $F$ -criteria and their amplitude in frequency domain**

**Sweden (Tornotrask)**

Component number	Frequency	dB	$F$ -values	DOF	Periodicity	Component
1	0.00016669	54.13	19.55	6.12	5999	<b>Trend</b>
2	0.00066678	47.10	2.36	6.09	1500	<b>Super long-term 1</b>
3	0.00183364	53.01	4.04	6.11	545	<b>Super long-term 2</b>
4	0.00250042	53.84	4.26	6.11	400	<b>Super long-term 2</b>
5	0.00333389	55.48	2.15	6.12	300	<b>Super long-term 2</b>
6	0.00416736	51.60	5.23	6.11	240	<b>Super long-term 2</b>
7	0.00466744	50.18	9.56	6.11	214	<b>Super long-term 2</b>
8	0.00500083	49.89	2.80	6.11	200	<b>Super long-term 2</b>

Continuation of the table 3

Component number	Frequency	dB	F-values	DOF	Periodicity	Component
9	0.00516753	49.02	2.43	6.10	194	<b>Long-term</b>
10	0.00550092	47.56	2.48	6.09	182	<b>Long-term</b>
11	0.00616769	47.37	3.97	6.09	162	<b>Long-term</b>
12	0.00683447	45.51	98.04	6.08	146	<b>Long-term</b>
13	0.00733456	47.36	2.96	6.09	136	<b>Long-term</b>
14	0.00766794	49.19	9.18	6.10	130	<b>Long-term</b>
15	0.00866811	49.48	2.65	6.10	115	<b>Long-term</b>
16	0.00900150	48.09	2.88	6.10	111	<b>Long-term</b>
17	0.01033506	45.93	4.60	6.08	97	<b>Middle-term</b>
18	0.01183531	48.62	11.94	6.10	84	<b>Middle-term</b>
19	0.01350225	45.40	2.48	6.08	74	<b>Middle-term</b>
20	0.01416903	46.55	2.41	6.09	71	<b>Middle-term</b>
21	0.01450242	47.23	26.45	6.09	69	<b>Middle-term</b>
22	0.01500250	48.10	4.20	6.10	67	<b>Middle-term</b>
23	0.01850308	45.08	5.75	6.07	54	<b>Short-term</b>
24	0.01900317	48.28	2.34	6.10	53	<b>Short-term</b>
25	0.02067011	47.21	21.43	6.09	48	<b>Short-term</b>
26	0.02117020	45.51	6.54	6.08	47	<b>Short-term</b>
27	0.02233706	45.00	5.74	6.07	45	<b>Short-term</b>
28	0.02567095	45.87	2.28	6.08	39	<b>Short-term</b>
29	0.02600433	46.00	4.53	6.08	38	<b>Short-term</b>
30	0.03767295	45.64	13.37	6.08	27	<b>Super short-term</b>
31	0.04167361	45.58	11.04	6.08	24	<b>Super short-term</b>

**Finland (continues)**

Component number	Frequency	dB	F-values	DOF	Periodicity	Component
1	0.00050033	53.97	2.14	6.12	1999	<b>Super long-term 1</b>
2	0.00133422	45.46	5.19	6.08	750	<b>Super long-term 2</b>
3	0.00183456	48.56	3.34	6.10	545	<b>Super long-term 2</b>
4	0.00216811	48.48	10.70	6.10	461	<b>Super long-term 2</b>
5	0.00283522	53.39	3.66	6.11	353	<b>Super long-term 2</b>
6	0.00400267	49.80	2.12	6.11	250	<b>Super long-term 2</b>
7	0.00433622	49.18	4.514	6.10	231	<b>Super long-term 2</b>
8	0.00567045	46.35	2.57	6.09	176	<b>Long-term</b>
9	0.00667111	45.22	7.07	6.08	150	<b>Long-term</b>
10	0.00733823	48.19	23.78	6.10	136	<b>Long-term</b>
11	0.00767178	50.31	8.28	6.11	130	<b>Long-term</b>
12	0.009006	50.67	4.48	6.11	111	<b>Long-term</b>
13	0.00933956	46.67	4.00	6.09	107	<b>Long-term</b>
14	0.00967312	45.67	33.49	6.08	103	<b>Long-term</b>
15	0.010507	49.62	4.97	6.10	95	<b>Middle-term</b>
16	0.01117412	46.55	2.04	6.09	89	<b>Middle-term</b>

Component number	Frequency	dB	F-values	DOF	Periodicity	Component
17	0.01184123	49.31	2.04	6.10	84	<b>Middle-term</b>
18	0.01234156	48.82	4.49	6.10	81	<b>Middle-term</b>
19	0.01367578	46.37	5.13	6.09	73	<b>Middle-term</b>
20	0.01701134	47.83	2.09	6.10	59	<b>Middle-term</b>
21	0.01784523	46.16	7.91	6.09	56	<b>Short-term</b>
22	0.0203469	46.33	5.32	6.09	49	<b>Short-term</b>
23	0.02068045	47.46	2.34	6.09	48	<b>Short-term</b>
24	0.0263509	45.32	3.32	6.08	38	<b>Short-term</b>
25	0.02685123	46.75	6.77	6.10	37	<b>Short-term</b>
26	0.03218813	46.00	8.19	6.08	31	<b>Super short-term</b>
27	0.03769179	46.34	6.84	6.09	27	<b>Super short-term</b>
28	0.04769847	45.39	2.20	6.08	21	<b>Super short-term</b>

The similar frequency decomposition is obtained by singular spectrum analysis (SSA). By the cluster analysis the following groups of components have been selected: **Trend** – components which frequencies are less, than 0.00051, **Super long-term** – components with frequencies in the range 0.00051–0.00503, **Long-term** – 0.00503–0.01010, **Middle-term** – 0.01010–0.01754, **Short-term** – 0.01754–0.02941, **Super short-term** – 0.02941–0.05 .

There is an important problem in spectral decomposition of time series. It is the problem related to an uniqueness of such transformation. For example, the simple modifications of significance level for cycle detection can change a number of significant frequencies. Certainly, it can influence on results. Such problem can be avoided by classification of “closest” frequencies based on different classification methods. As result, “generalized” simulated component, which is obtained by linear combination of singular “closest” components, will be more robust to the forcing, caused by “new” components with small contribution to total variance, for example. The accuracy of such approach can be confirmed by comparison of cyclical components. These components were obtained by two independent methods: a singular spectrum analysis and narrow-band filtration based on inverse fast Fourier transform (Fig. 3–7). High positive correlation coefficients between cyclical components are obtained. Let us note, the maximum conformity of detected components is observed by frequencies, corresponding to wave lengths from 20 to 34 years and from 100 years and more. Following the assumption that any signal is an additive amount of cyclical components, trend and noise, we have obtained the next: “resulting” chronology obtained by various methods for the same sites are highly positively correlated. So, for Sweden the correlation coefficient between SSA and FFT “aggregate” chronologies is equal 0.94, and for Finland – 0.92, accordingly (Fig. 3). Therefore, adequate spectral decompositions of two super long-term tree-ring chronologies are obtained for Sweden and Finland.

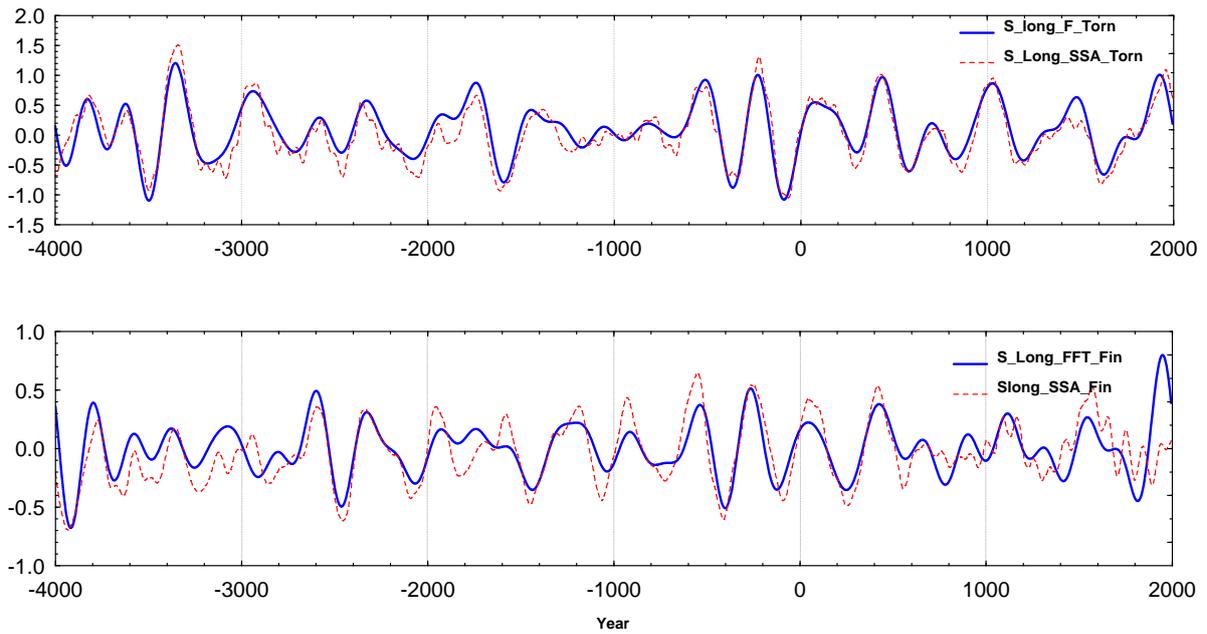


Fig. 3. Low-frequency (**super long-term**) components (a wave length more than 200 years) obtained by Inverse Fourier Transformation and Singular Spectrum Analysis for Sweden (correlation coefficient between corresponding components  $R = 0.92$ ) (on top) and Finland ( $R = 0.73$ ) (on bottom)

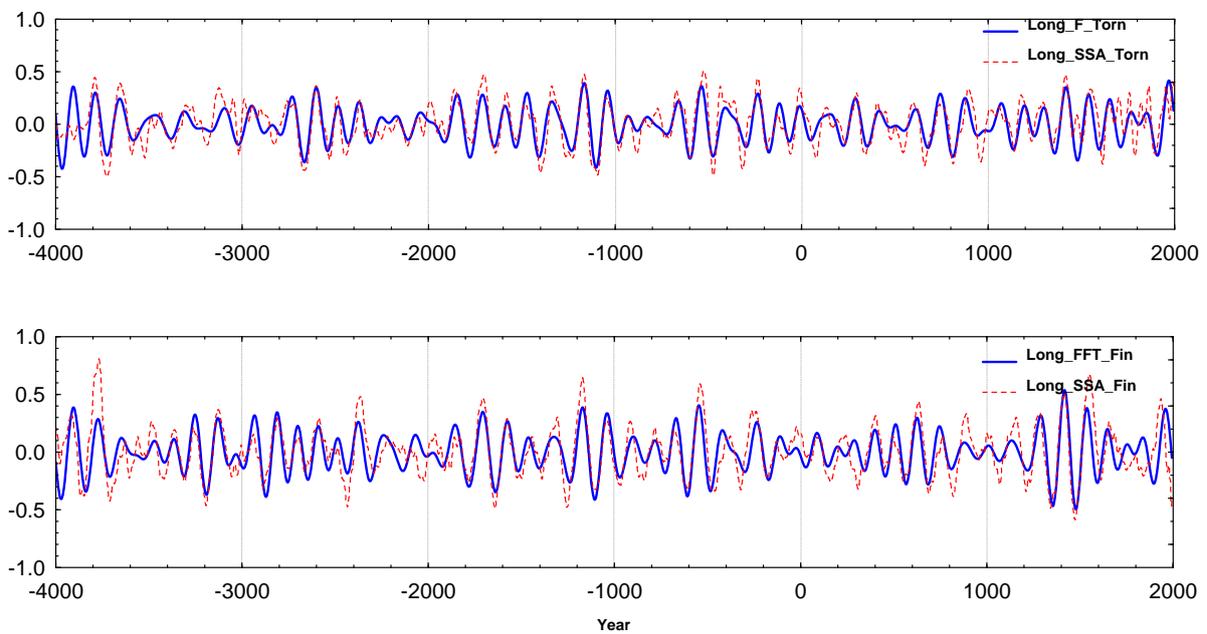


Fig. 4. Low-frequency (**long-term**) components (a wave length from 100 to 200 years) obtained by Inverse Fourier Transformation and SSA for Sweden (correlation coefficient between corresponding components  $R = 0.75$ ) (on top) and Finland ( $R = 0.72$ ) (on bottom)

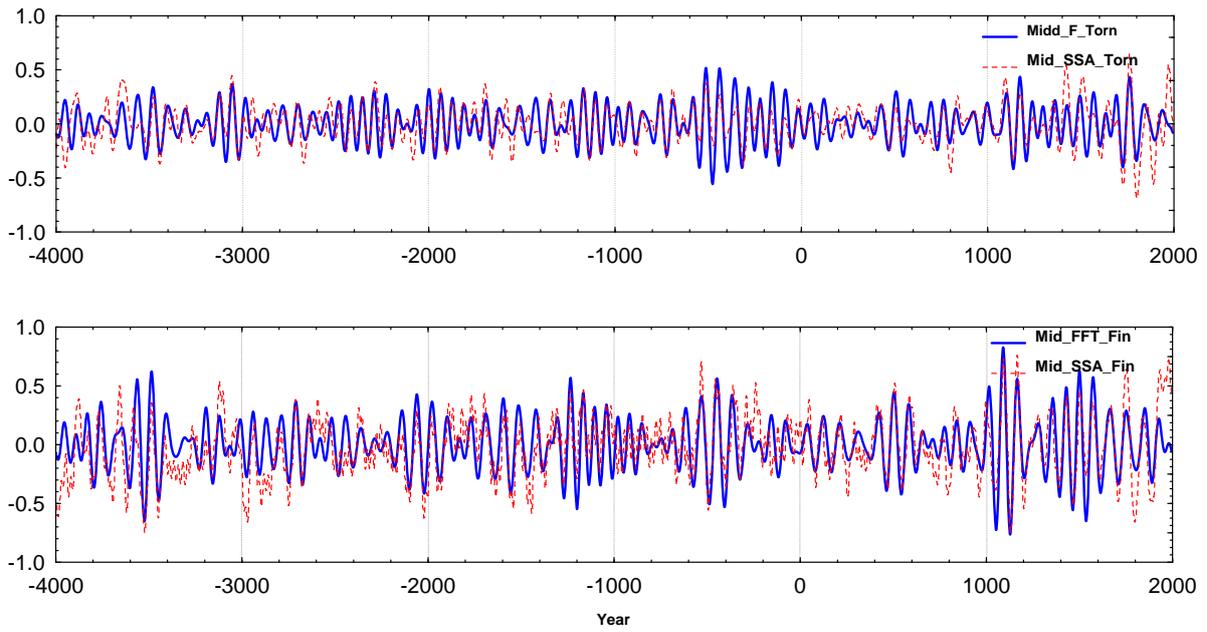


Fig. 5. Low-frequency (**middle-term**) components (a wave length from 57 to 99 years) obtained by Inverse Fourier Transformation (IFT) and SSA for Sweden ( $R = 0.59$ ) (on top) and Finland ( $R = 0.62$ ) (on bottom)

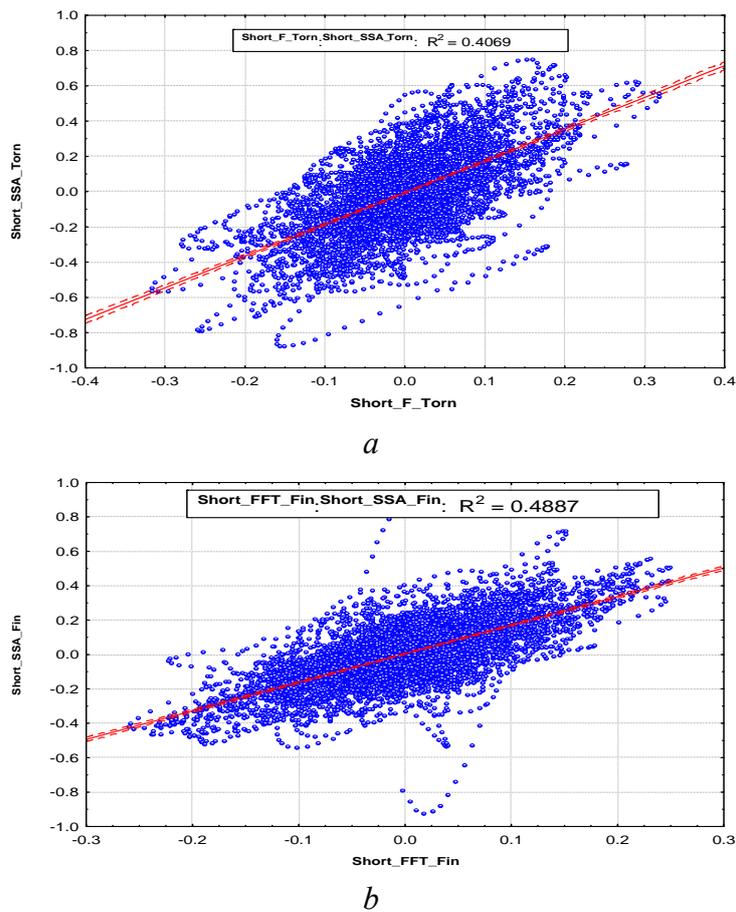
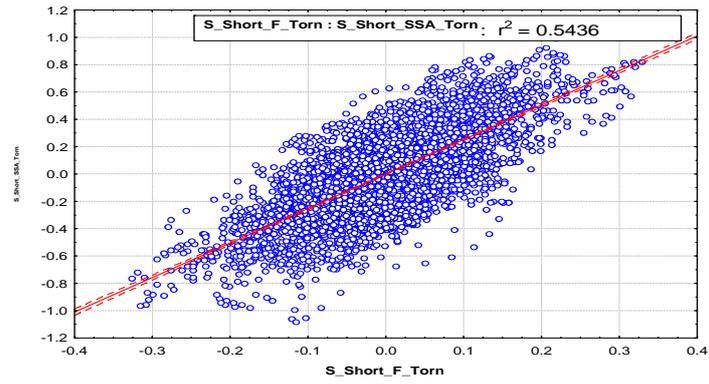
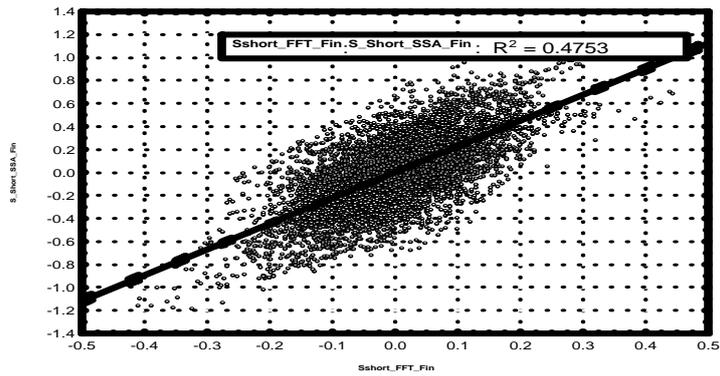


Fig. 6. SSA&IFT shot-term (a wave length from 35 to 56 years) components scatterplots for Torn (*a*) and Finish (*b*) Chronologies



*a*



*b*

Fig. 7. SSA&IFT shot-term (a wave length from 20 to 34 years) components scatterplots for Torn (*a*) and Finish (*b*) Chronologie

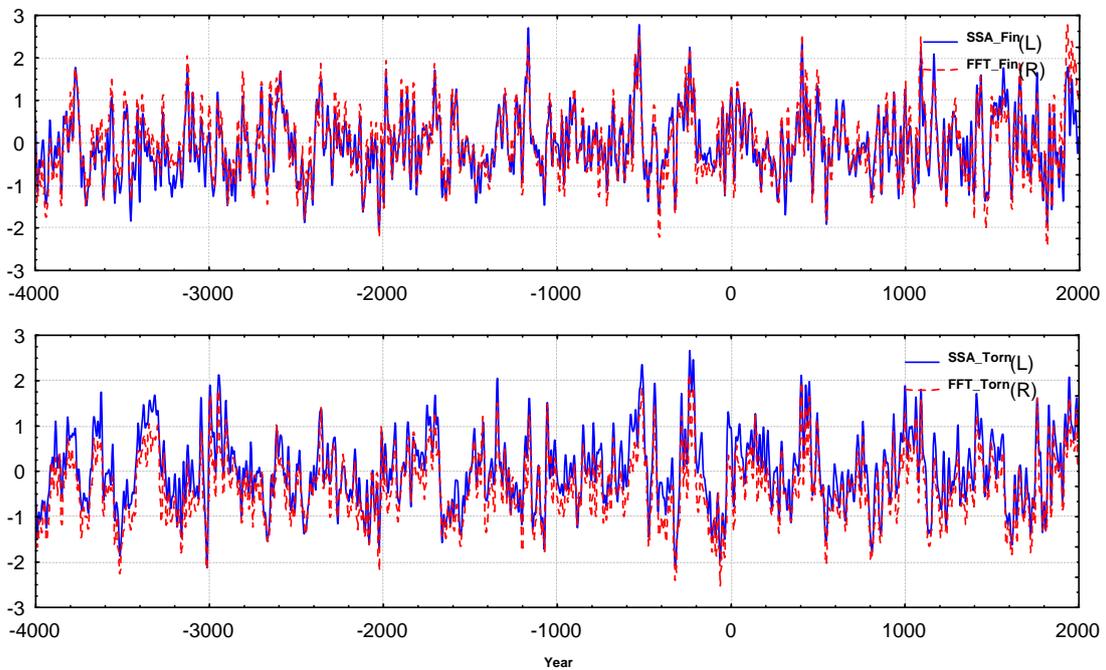
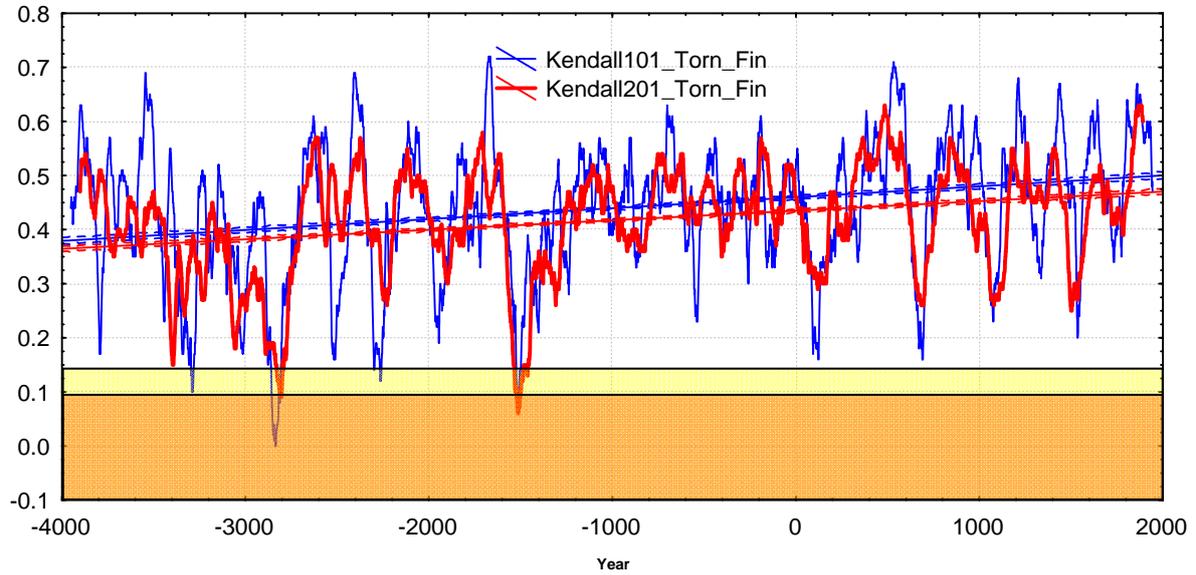
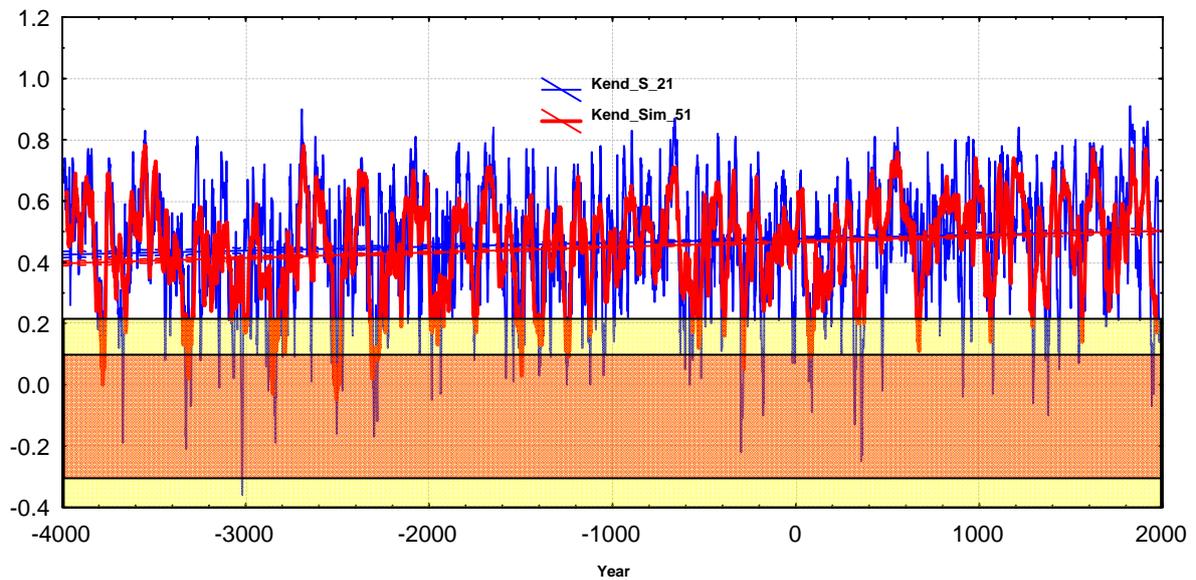


Fig. 8. Simulated signals obtained for Sweden (on top) and Finland (on bottom) by direct summing of SSA and IFT components, accordingly. Correlation coefficients between SSA and FFT simulated chronologies are equal 0.94 for Sweden and 0.92 for Finland (Each of simulated chronologies explains 71 % of total variance for corresponding tree-ring chronologies)

Analyzable tree-ring chronologies are located on 300 kms from each other by longitudinal direction. As consequence, they have a common good temporal coherence (similarity). In spite of it, there are some time intervals when dynamics (time behaviors) of the time series are essentially differing (Fig. 9).



*a*



*b*

Fig. 9. Sliding Kendall coefficients ( $\tau$ -statistics) between Swedish and Finland tree-ring chronologies are obtained for different windows  $W$  (orange – 95 % a significance level for bigger window  $W$ , yellow – 95 % a significance level for smaller one)

Significant positive trend in coherence (similarity) of two tree-ring chronologies is obtained, i. e. a synchronism in behavior of two tree-ring series significantly increases from the past to the present. The reason of coherence

increasing can be explained by better quality of tree-ring data in the present. It leads to more accurate generation of tree-ring chronologies. As results, we have obtained the better synchronism in variance of tree-ring chronologies in the present time.

On the other hand, a similarity increasing leads to deterioration (worsening) of growth condition for trees (Unpublished results). Probably, this fact is a reason for coherence increasing between the tree-ring chronologies.

The spectrum analysis of Kendall coefficients has revealed the next cyclicities for different sliding windows  $W$ : about 1500 yrs, 300, 135–155, 90–110, 45–65 years.

More than 99 % of significant values of Kendall's coefficients (for different length of window  $W$ ) are the positive. Therefore, the analyzed chronologies are permanently in a phase, or their variance is not concordant. There are no antiphases in variance of these time series.

It is possible to explain a reason of such mismatches by temporal analysis of different cyclical components obtained for the tree-ring chronologies.

At first, we should define, what does it mean a relationship between sliding Kendall coefficients characterizing growth conditions (Kendall coefficient calculated between tree-ring chronology and chronological series) and initial tree-ring chronologies.

Second, we should define, what does it mean a relationship between sliding Kendall coefficients characterizing growth conditions and sliding Kendall coefficients characterizing synchronism in time behaviour of 2 tree-ring chronologies.

Thirdly, we should try to find a most informative statistics characterizing a variance of both tree-ring chronologies.

There is a concordance coefficient of Kendall (Kendall, 1970, Briffa et al., 2008), which will be used for 3 and more dendrochronological time series, simultaneously.

Comparison of the sliding Kendall coefficients of growth conditions, obtained for super long-term and long-term components, with the same cycles shows significant similarity between heterogeneous time series (Fig. 10, 11). Common intervals of concordance, disagreement and antiphases are observed.

The amplitudes for Kendall's coefficients  $K_{\text{ендалла}}$  are the same for different sites. It can be explained by the specific transformation from absolute values to ranks. It's known, that  $\tau$ -statistics is based on inverses calculation for two ranked time series.

One of the most debatable problem is a select of length  $W$  of sliding window. In a case when principal frequency in spectral decomposition of time series is, *a priori*, known, the select is ordinary enough: the length of window should be the close to half of wave length for principal cycle. The correctness of such recommendation can be confirmed by similar dynamics of Kendall's coefficient and the observed components, for example (Fig. 10, 11).

Similar relationships are obtained by comparison of sliding Kendall's coefficients with more high-frequency cyclical components.

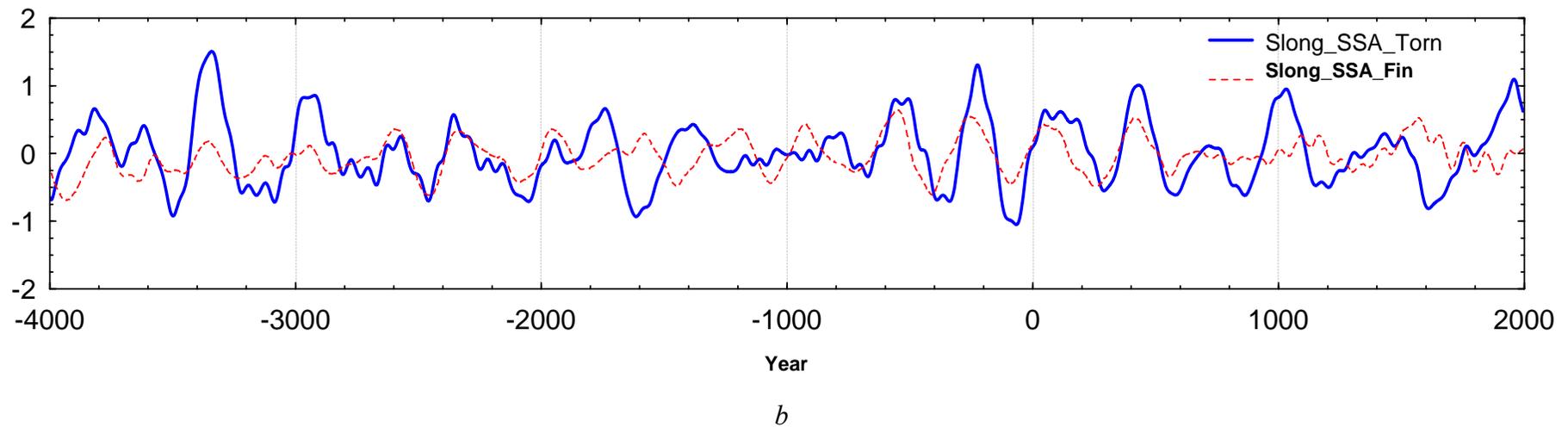
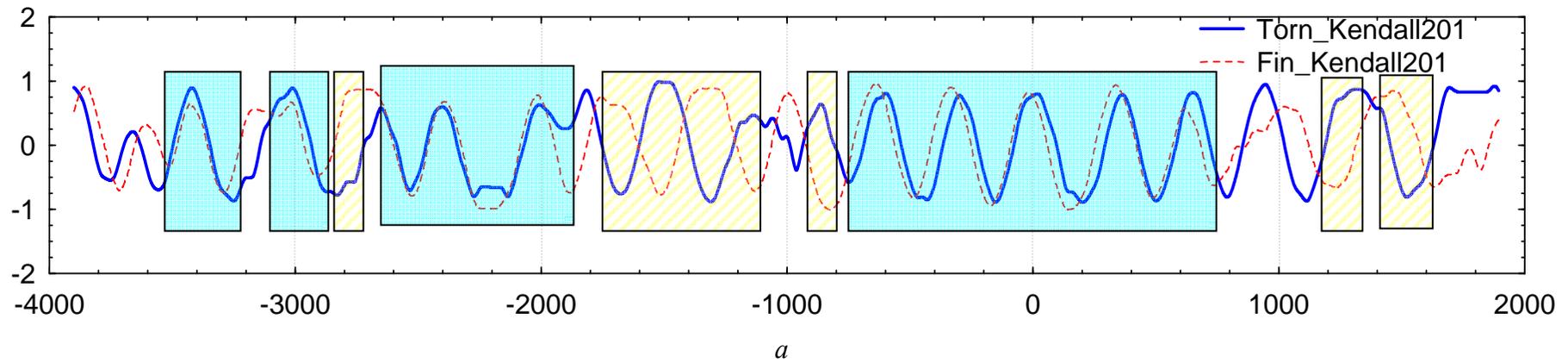


Fig. 10. Comparative dynamics of:  
*a* – the sliding Kendall's coefficients characterizing of growth conditions, for super long-term components (the wave length from 200 years and more) for Sweden and Finland; *b* – initial super long-term components (the wave length from 200 years and more) for Sweden and Finland. Common time intervals of concordance, disagreement and antiphases are marked by square areas

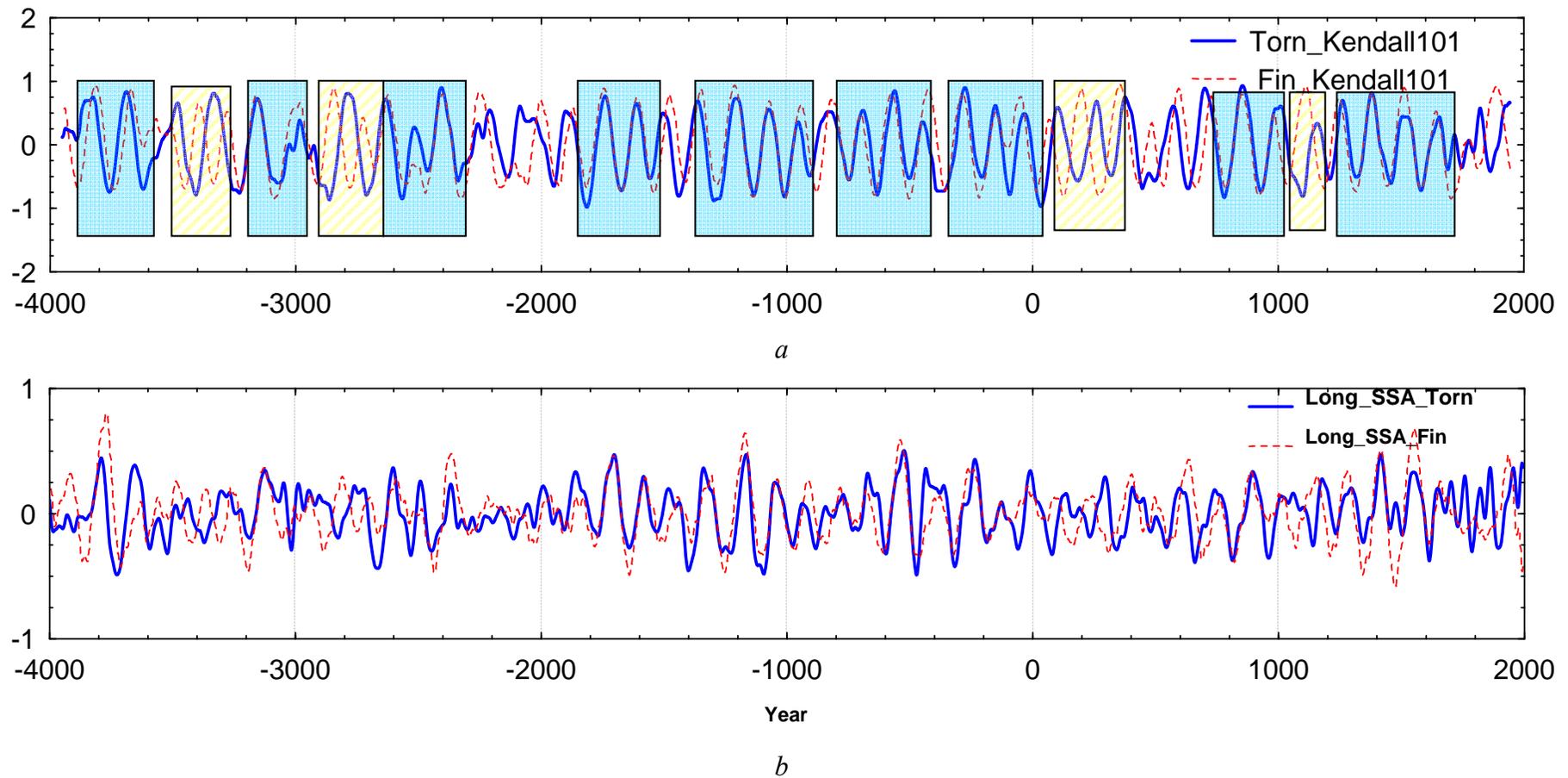


Fig. 11. Comparative dynamics of:  
*a* – the sliding Kendall's coefficients characterizing of growth conditions for super long-term components (the wave length from 100 to 200 years) for Sweden and Finland; *b* – initial super long-term components (the wave length from 100 to 200 years) for Sweden and Finland. Common time intervals of concordance, disagreement and antiphases are marked by square area

Thus, the sliding Kendall's coefficients characterising growth conditions are well reflecting singularities of initial cyclical components.

In comparison with Pearson correlation coefficient depending on 2 parameters: mean and variance, Kendall's coefficients are more "rough" characteristics and less depended from absolute values of original time series. It is possible to get an example when Pearson correlation coefficient will be insignificant (in case of nonlinear relation between observed variables), and, in the same time, rank coefficient of correlation can be significant with high confidence level.

What is a relationship between sliding Kendall coefficients characterizing growth conditions and sliding Kendall coefficients characterizing synchronism in time behaviour of 2 tree-ring chronologies?

For all cyclical components there is a direct correspondence between of Kendall's coefficients characterizing synchronism in time behaviour of 2 time series, and the characteristics, reflecting growth conditions (Fig. 12-14). One from the next characteristics: Kendall's coefficients of growth condition or original cyclical components can be considered as growth condition characteristics by high correlation between these ones (Fig. 10, 11).

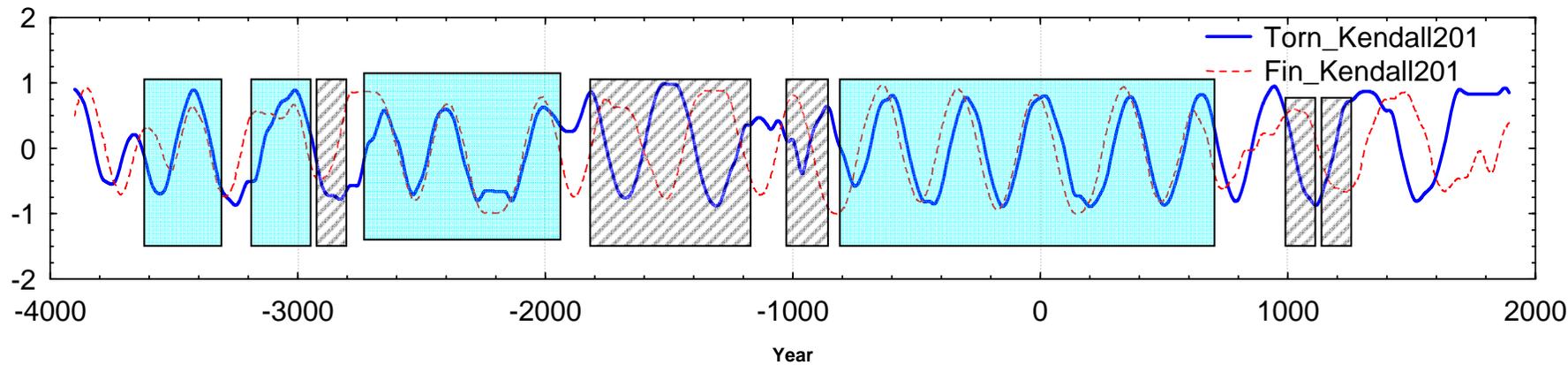
Last results show it is possible to characterize a combined variance of 2 tree-ring chronologies by the one coefficient – the sliding  $\tau$ -coefficients of Kendall with the corresponding selection of window  $W$ .

At the same time, the "component-wise" analysis (the combined analysis of cyclical components obtained for tree-ring chronologies) reveals a number of interesting singularities. First of all, the negative trend for sliding Kendall's coefficient obtained for super long-term components is observed. It means, that a coherence (similarity) of observed series significantly decreases in the most low-frequency band from the past to the present time (Fig. 12).

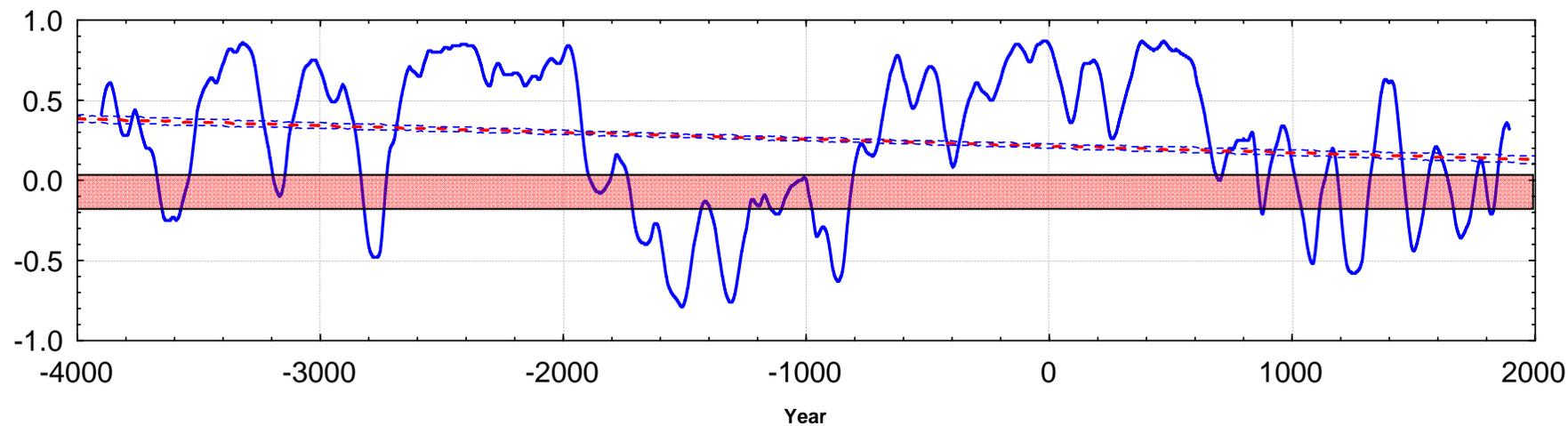
On the other hand, there are no significant trends in a similarity of cyclical component with a wave length from 100 to 200 years (Fig. 13).

Therefore, there is "inconsistency" with concordance results obtained above for initial tree-ring chronologies (the concordance only increases by the time for different sliding).

It is possible to explain the "inconsistency" by the following. The sliding window certainly is the filter, but, in the same time, not absolutely effective (in comparison with different kind of narrow-band filters). As result, similarity influence of more high-frequency components superimposes on similarity of low-frequency components by the calculation of sliding  $\tau$ -coefficients characterizing of synchronism for initial tree-ring chronologies for "major" ( $W \geq 100$  years) windows. Taking into account, that the contribution of low-frequency (a wave length  $> 100$  years) component are estimated in 25 % of total variability for the Finish chronology and 34 % – for Swedish one, the opposite contribution for more high-frequency component appears more essential. In fact, there is manifest positive temporal trend in coherence for 3 high-frequency components (from the past to the present) (Fig. 14).



*a*



*b*

Fig. 12. The sliding Kendall's coefficients ( $W = 201$ ) characterizing growth conditions: *a* – and synchronism (similarity); *b* – which are obtained for super long-term components (wave length more than 200 years) for Sweden and Finland (the shaded area on *b*) – plot – area of significant values for Kendall tau with  $p < 0.05$ )

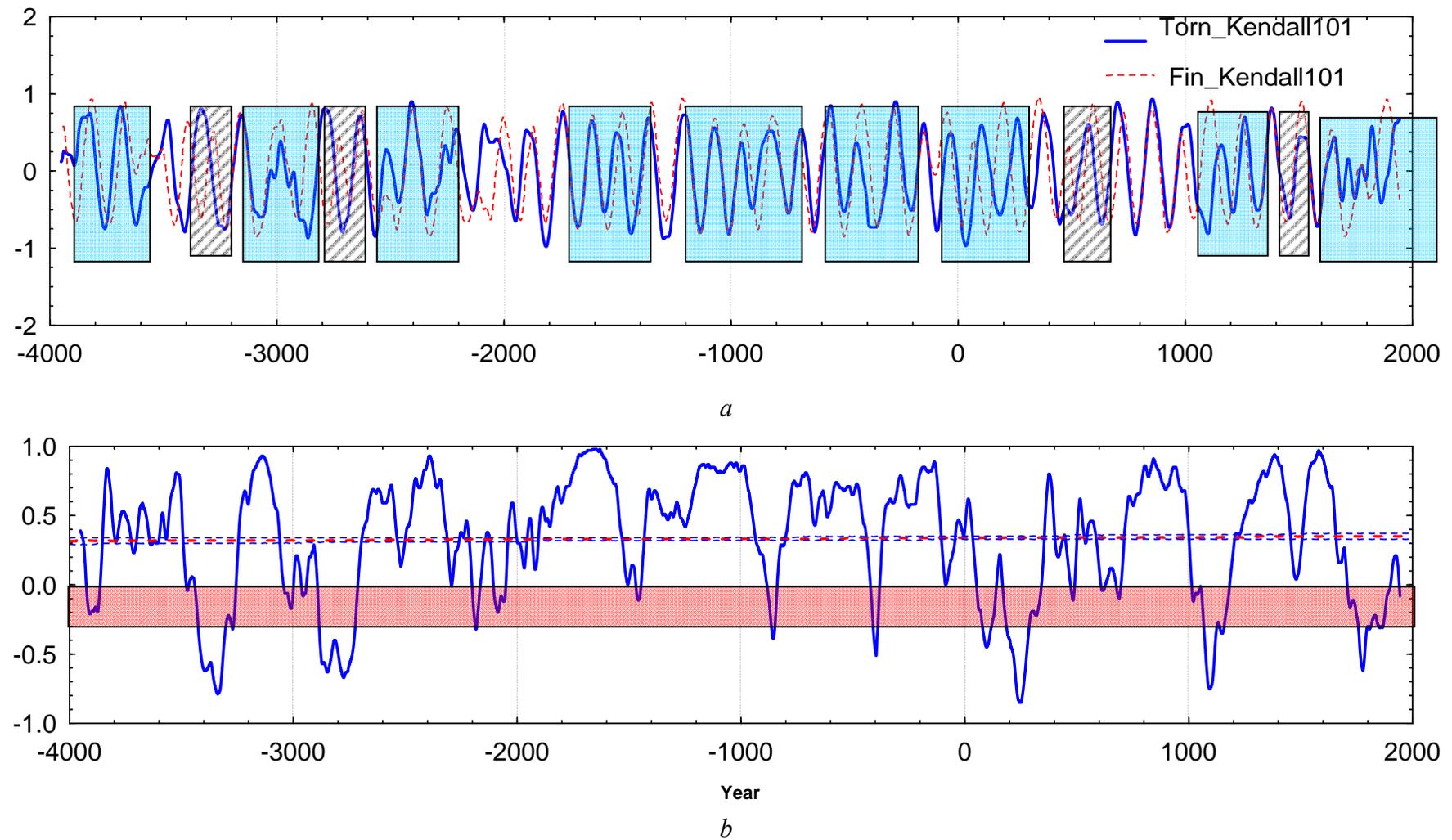
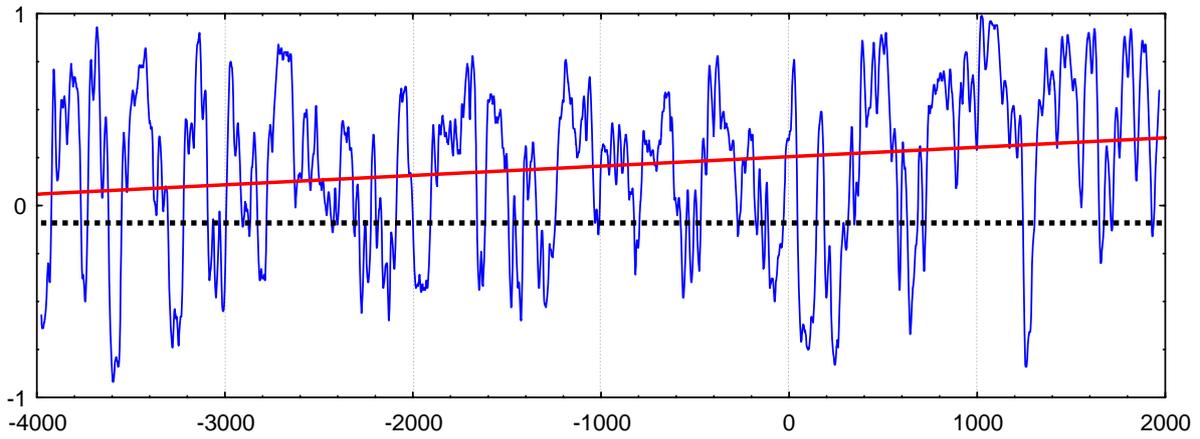
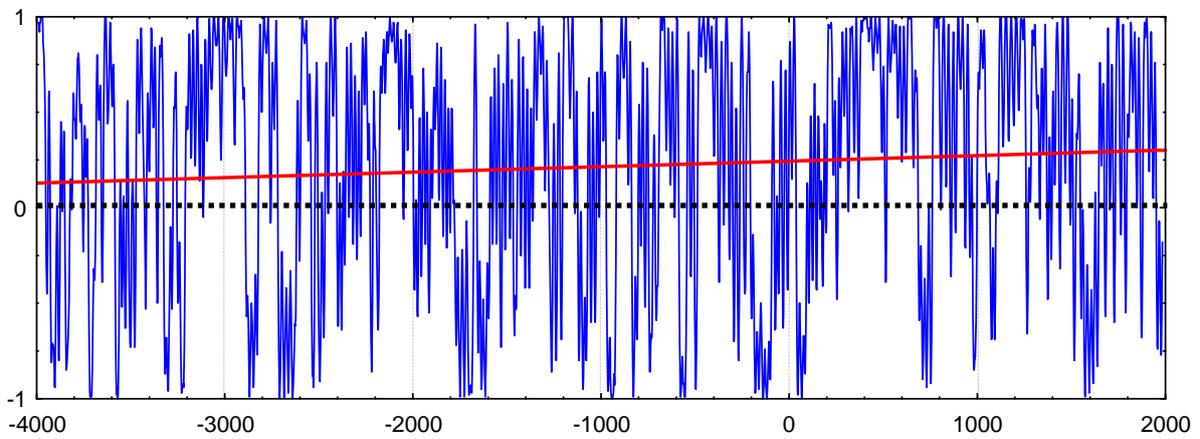


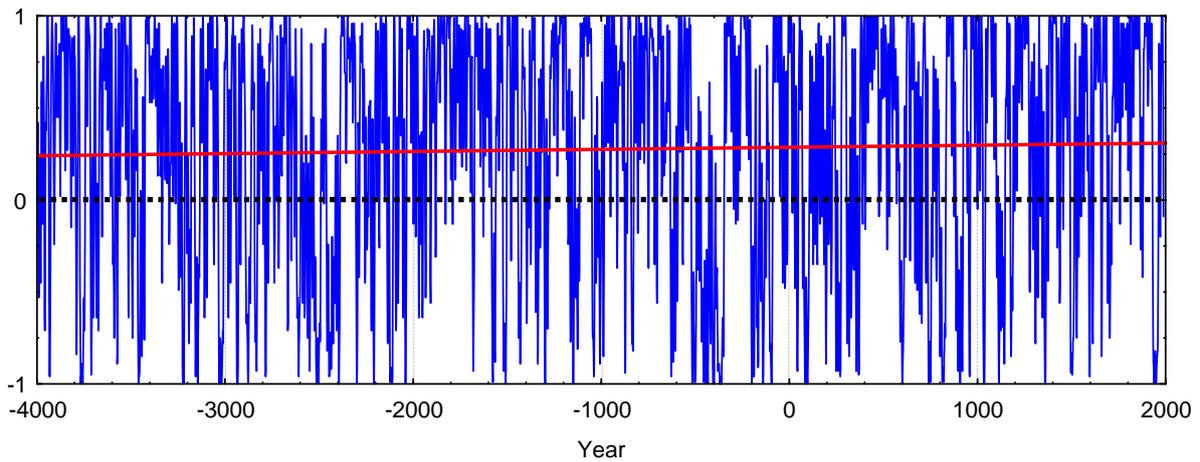
Fig. 13. The sliding Kendall's coefficients ( $W = 101$ ) characterizing growth conditions: *a* – and synchronism (similarity); *b* – which are obtained for long-term components (wave length from 100 to 200 years) for Sweden and Finland (the shaded area on *b* – plot – area of significant values for Kendall tau with  $p < 0.05$ )



*a*



*b*



*c*

Fig. 14. The sliding Kendall's coefficients ( $W = 101$ ) characterizing synchronism (similarity):  
*a* – middle-term components (57–99 yrs cycles); *b* – short-term (35–56 yrs);  
*c* – super short-term components (20–34 yrs), correspondently

Approximately 70 % of total variance are explained by revealing cyclical components for each of observed tree-ring chronology. Therefore, 45 % of variation for Finland and 36 % – for Sweden are high-frequency components (a wave length from 20 to 99 yrs). Their total contribution is statistically significant to concordance between tree-ring chronologies for Sweden and Finland (Fig. 15).

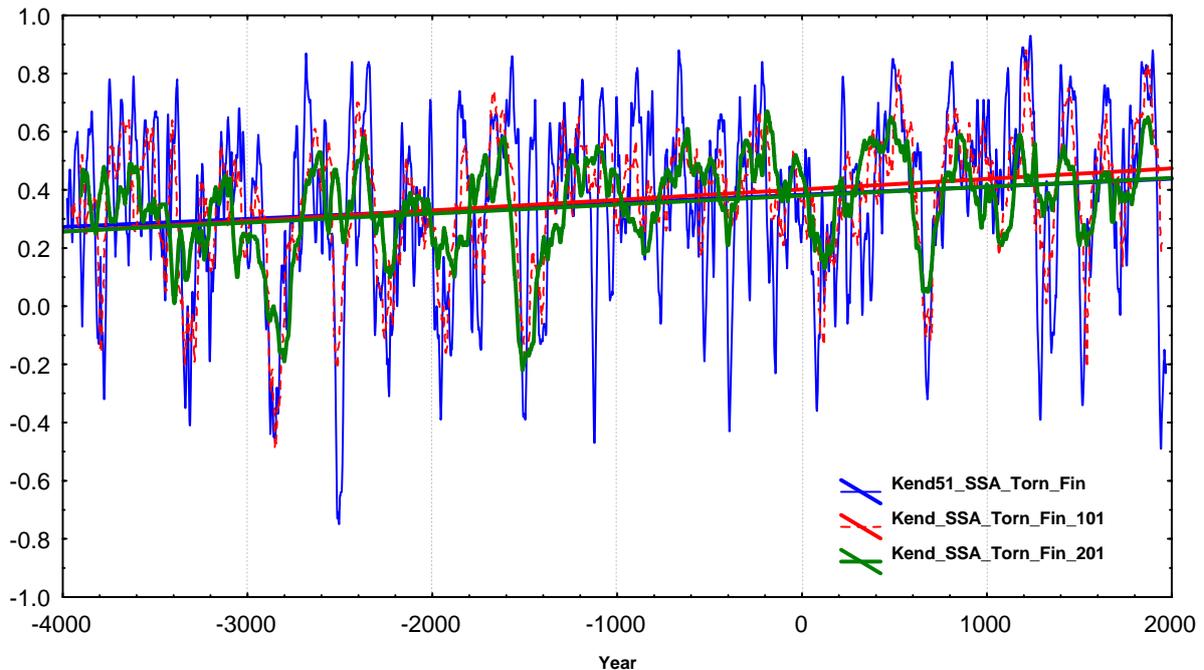


Fig. 15. Sliding Kendall's coefficients of similarity, calculating between simulated (70 % of total variance) Swedish and Finnish chronologies

### **Forecast of low-frequency components for long-term tree-ring series**

In the section the statistical approach is described, which allows to make forecasts of low-frequency components for super long-term tree-ring chronologies by narrow-band filtration (a inverse Fast Fourier transformation based on multiple spheroidal sequences) and a singular spectrum analysis (SSA).

Preliminary results have shown the adequate spectral decomposition of initial dendrochronological time series is necessary to obtain a back forecast (or reconstruction) of super long-term tree-ring chronologies. Such spectral decomposition can be realized, for example, by multiple-taper method (MTM which is rather robust to different noise affects, especially for low-frequency domain (see sections above). Recovery of cyclical components was realized by inverse fast Fourier transformation.

By cluster analysis it is possible to allocate several groups of cyclical components, joined by several statistical tests for closest frequencies and

amplitudes. For each selected group of cyclical components it is possible to obtain “aggregate” cyclical component as linear combination of all cyclical component for the same group.

Each “aggregate” component can be described by several parameters: principal frequency (selected by F-test and its amplitude (in dB) in frequency domain), periodogram support, average amplitude, amplitude variance, etc. Some of these is used in singular spectrum analysis, in particular, principal frequency is used for window selection and, therefore, for trajectory matrix construction.

All aggregated components, obtained by the approach above are components with finite ranks in singular decomposition. The last one testifies that we have really allocated cyclical components (or components which are decomposed by finite number of harmonics).

There is other important problem. What are differences between cyclical functions obtained by singular spectrum analysis and “actual” cyclical components for the super long-term chronologies. Time behavior (or dynamics) of actual components can be estimated, for example, by the narrow-band filtration.

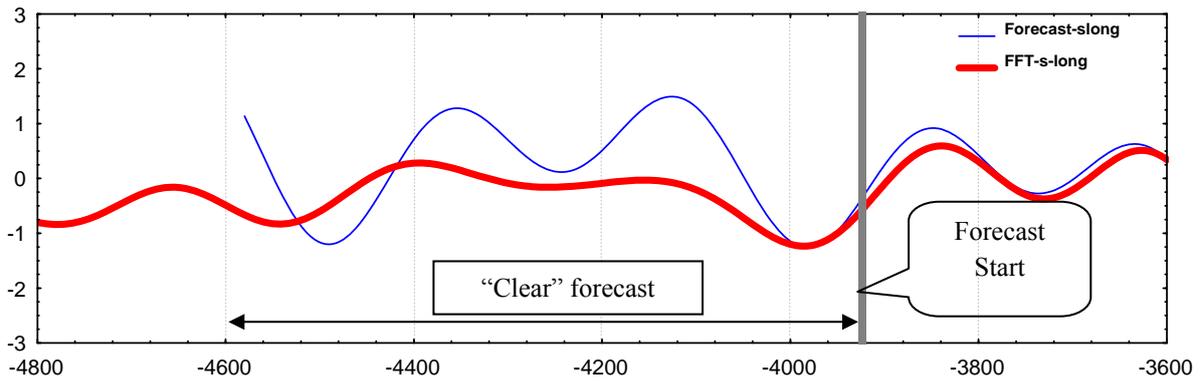
The proposed approach was tested based on two super long-term 7-thousand’s-years tree-ring chronologies, obtained for Finland and Sweden.

Two common time intervals were considered for both cases.

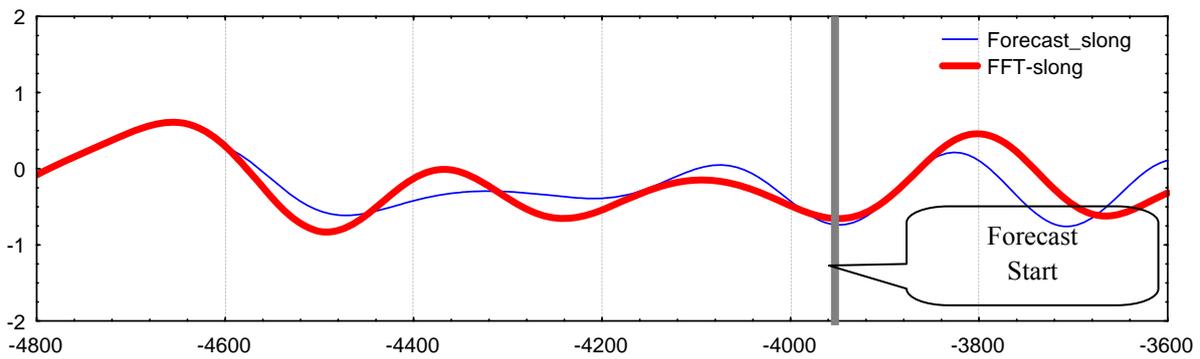
Time interval from 1994 A.D. to 3800 B.C. is an interval for which singular decomposition of different cyclical components is obtained. 1000-years forecast back was obtained from 3600 to 4600 BC by the singular decomposition. “Pure” forecast covered 660 years from 3940 to 4600 BC (340-years interval from 3600 to 3940 BC was included to SSA algorithm of verification). 660-years interval allowed to compare the obtained forecast with actual data for the same time period.

For SSA the “aggregate” cyclical components are obtained by described above method (based on inverse fast Fourier transformation and cluster analysis), but for time interval from 1994 AD to 3800 BC. These components are different from “aggregate” ones obtained for whole 7000-years interval (from 1994 AD to 5400 BC), but were strongly correlated. There are non-significant frequency, phase and amplitude shifting.

There is a good coherence in behavior of low-frequency components with a wave length from 100 years and more, obtained for different tree-ring chronologies (Fig. 16, 17) The good coherence in variance of low-frequency components for actual chronologies (bold solid lines) is explained by proximity of dendrochronological test-polygons – the distance between ones is, approximately, 300 kms. Most likely, variance of these components reflects a changes of common growth factor (e. g. summer temperature (Briffa et al., 2008)).



*a*



*b*

Fig. 16. Comparative dynamics of low-frequency components (with wave length more than 200 years), obtained by narrow-band filtration of actual data (a bold solid line) and their modeling by singular spectrum analysis (thin solid line) for Sweden (*a*) and Finland (*b*)

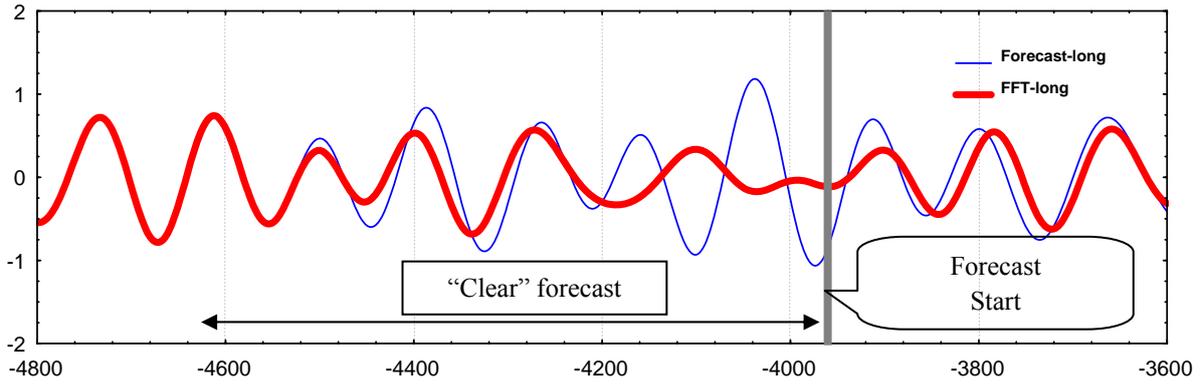
The 660-years forecasts for both tree-ring chronologies is highly correlated with actual data (Tab. 4).

So, correlation coefficients between low-frequency components with wave length from 100 to 200 years (components: **Forecast-long** and **FFT-long**) for Sweden and Finland are equal 0.52 and 0.89 ( $p < 0.0000001$ ), accordingly<sup>1</sup>. The maximum differences between forecast and actual data are revealed for Sweden in interval from 3940 to 4200 BC. The antiphases for this interval determine “low” value of correlation coefficient (Fig. 17). The reason of such deviations (amplitude modulation and phase shifting) is not clear.

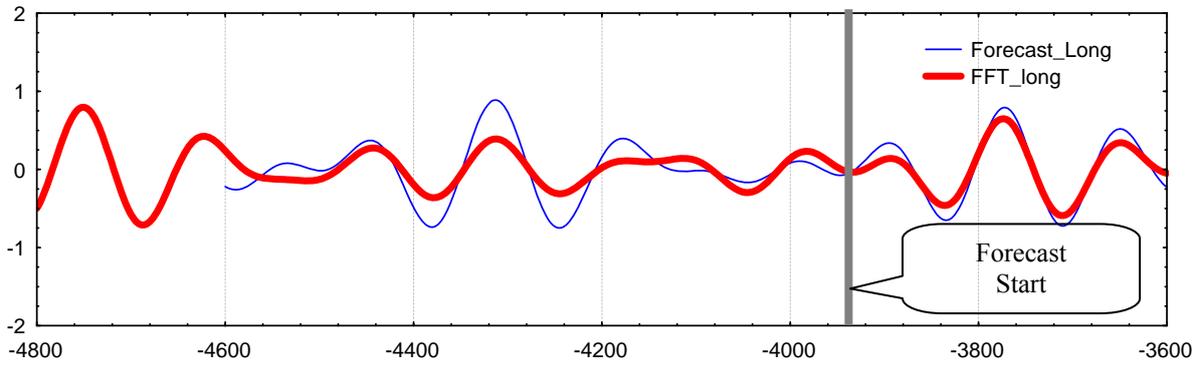
Let us consider the most long-term wavelength oscillations (components **Forecast-s-long** and **FFT-s-long**) with a wave length more than 200 years. The forecast and actual curves are more similar for both sites. Correlation coefficients are equal 0.67 for Sweden and 0.65 for Finland.

---

<sup>1</sup> **Remark:** Correlation coefficients are estimated for all 1000-yr interval from 3600 to 4600 BC.



*a*



*b*

Fig. 17. Comparative dynamics of low-frequency components (with wave length from 100 to 200 years), obtained by narrow-band filtration of actual data (a bold solid line) and their modeling by singular spectrum analysis (thin solid line) for Sweden (*a*) and Finland (*b*)

*Table 4*

**Correlation coefficients between different cyclical components obtained by narrow-band filtration and its forecast based on singular spectrum analysis for Sweden (*A*) and Finland (*B*)**

*A*

	FFT-s-long	FFT-long	FFT-mid	FFT-short	FFT-s_short	FFT-Sum	FFT-Lon_Mid
Forecast-slong	0.67	0.00	0.04	0.01	-0.01	0.44	0.51
Forecast-long	0.13	0.52	0.05	0.00	0.00	0.33	0.38
Forecast-mid	-0.03	-0.04	0.66	-0.01	0.00	0.11	0.13
Forecast-short	0.00	-0.01	0.02	0.08	0.01	0.02	0.00
forecast-sshort	0.00	0.00	0.00	0.02	-0.10	-0.04	0.00
Forecast_Sum	0.51	0.23	0.24	0.03	-0.04	0.48	0.56
ForecastLMid	0.57	0.26	0.27	0.00	0.00	0.55	0.63

B

	FFT-s-long	FFT-Long	FFT-Mid	FFT-short	FFT-s_short	FFT-LongT	FFT-Sum
Forecast-slong	0.65	0.00	0.04	0.01	0.00	0.50	0.33
Forecast-long	-0.06	0.89	0.03	0.00	0.00	0.48	0.31
Forecast-mid	-0.02	0.05	0.22	-0.04	0.00	0.02	0.09
Forecast-short	0.03	0.01	-0.05	0.32	0.03	0.03	0.15
Forecast-sshort	-0.01	-0.01	0.01	0.01	0.11	-0.01	0.05
Forecast-Sum	0.19	0.43	0.11	0.16	0.06	0.40	0.39
Forecast-LongT	0.35	0.74	0.05	0.00	0.00	0.71	0.47

It is possible to expect forecast deterioration by increasing of frequency. In general, this assumption is confirmed, excepting of oscillations with wave length from 58 till 100 years for Sweden (Fig. 18, 19). In this case, high coherence is observed between forecast and actual data (correlation coefficient between **Forecast-mid** and **FFT-mid** is 0.66 (Tab. 1)) (Fig. 18, a.)

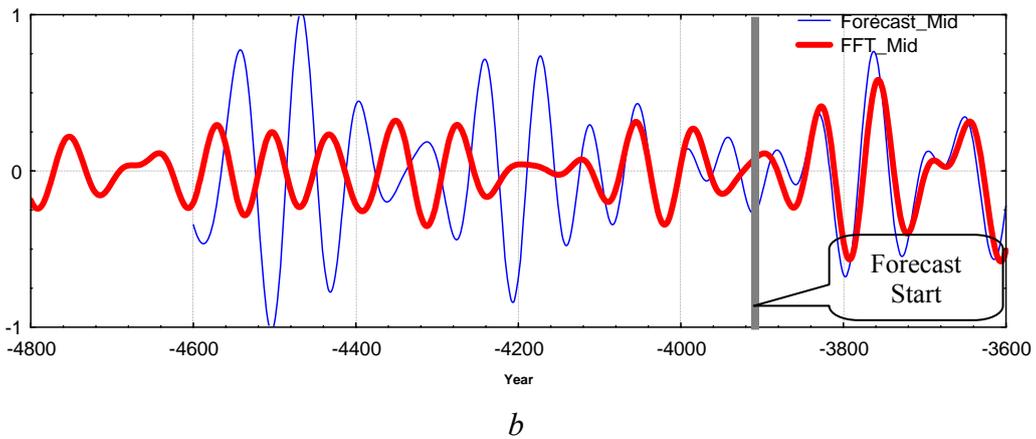
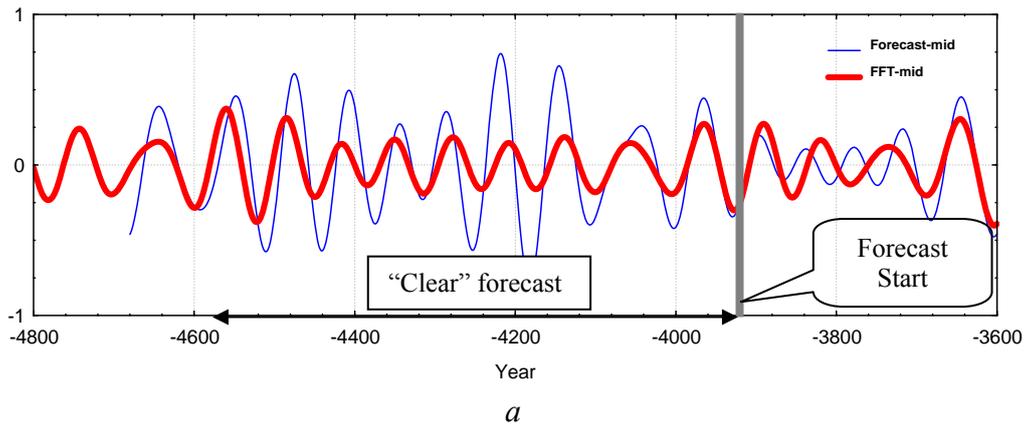


Fig.. 18. Comparative dynamics of low-frequency components (with wave length from 58 to 100 years), obtained by narrow-band filtration of actual data (a bold solid line) and their modeling by singular spectrum analysis (thin solid line) for Sweden (a) and Finland (b)

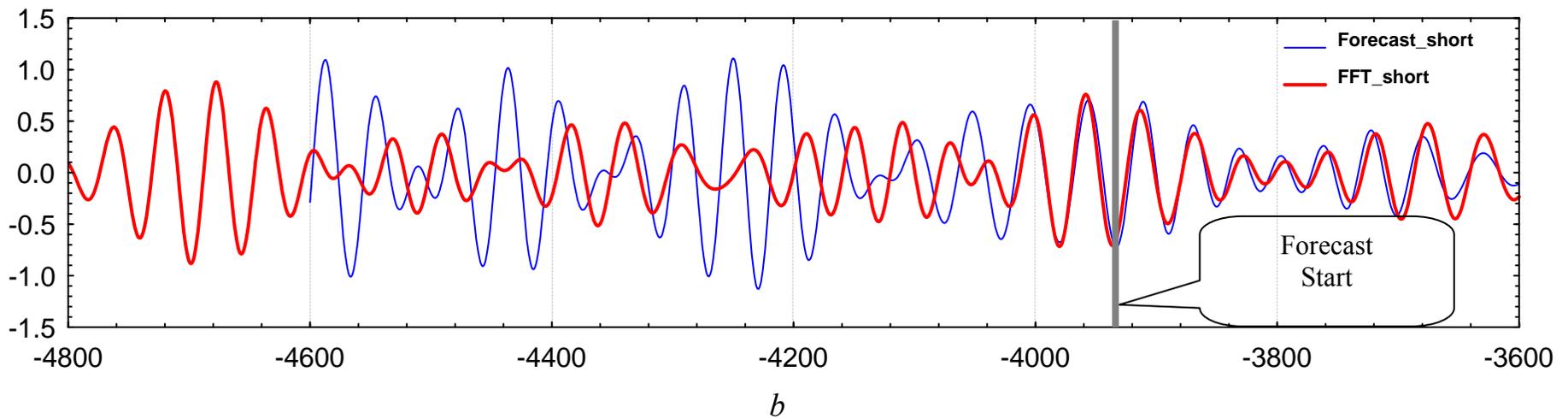
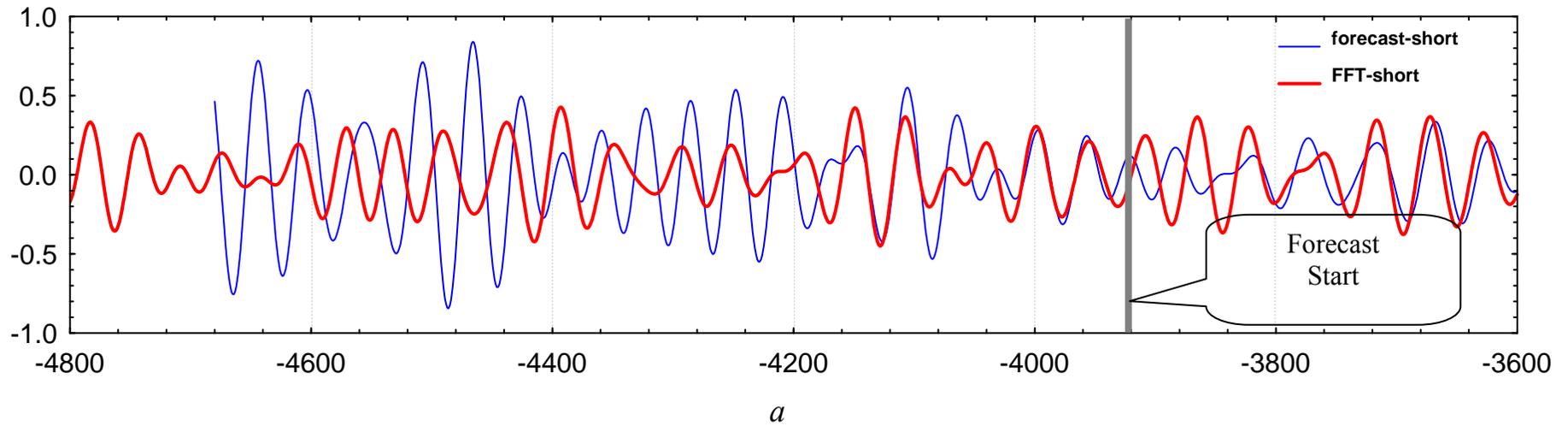


Fig. 19. Comparative dynamics of low-frequency components (with wave length from 35 to 57 years), obtained by narrow-band filtration of actual data (a bold solid line) and their modeling by singular spectrum analysis (thin solid line) for Sweden (a) and Finland (b)

Let's note, that contribution of low-frequency components (wave length  $> 100$  years) is estimated as 25 % of total variability for Finnish and 34 % – for Sweden chronologies. 20 % of total variability is explained by components with length wave from 35 to 100 years for each chronology. The contribution of high-frequency components (wave length from 20 to 34 years) for Finnish tree-ring chronology is more than in 2 times in comparison with Swedish one. It is estimated, approximately, in 20 %. Most likely, such differences were arisen by different standardization methods.

Proposed approach is based on a hypothesis, that signal for the super long-term chronologies is a linear combination of a trend, harmonic components and noise. Therefore, next step is quite logical. Let us assume, that additive amount of forecast components, significantly correlated with actual data will be the close to the amount of actual components (Fig. 20, *b*). The last assumption is confirmed by high positive correlations for Sweden and Finland – 0,63 and 0.71 ( $p < 0.000001$ ), accordingly.

Thus, it is possible to state, that the obtained algorithm allows to make high-quality long-term (about several centuries) forecast in the past of low-frequency components. Such low-frequency components can be interpreted as the basic tendencies in tree growth for short-term scales (about 100–200 years).

Based on obtained results the next conclusions can be stated:

1. It is enough to test the power spectrum by white-noise null hypothesis for detection of significant cycles in dendroclimatical series. It allows to simplify considerably the procedure of reliable cycles revealing, for example, in dendroclimatology.

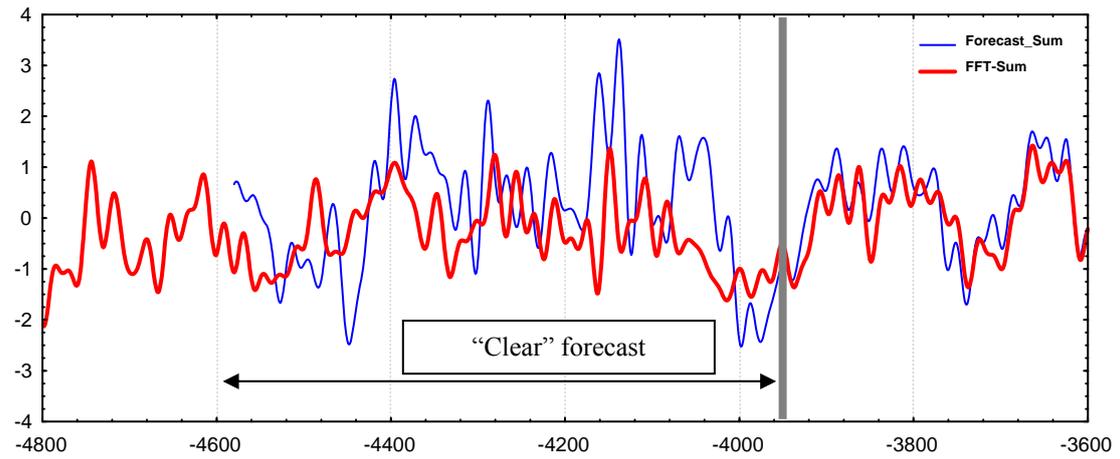
2. The spectral decomposition for two super long-term tree-ring chronologies are obtained for Sweden and Finland by two independent approaches: multiple-taper method and singular spectrum analysis. High positive correlation coefficients between different cyclical component obtained by different methods are observed.

3. Adequacy of combined MTM&SSA approach for spectral decomposition of tree-ring chronologies is confirmed by high positive correlation coefficients between “simulating” chronologies obtained by different approach for each sites.

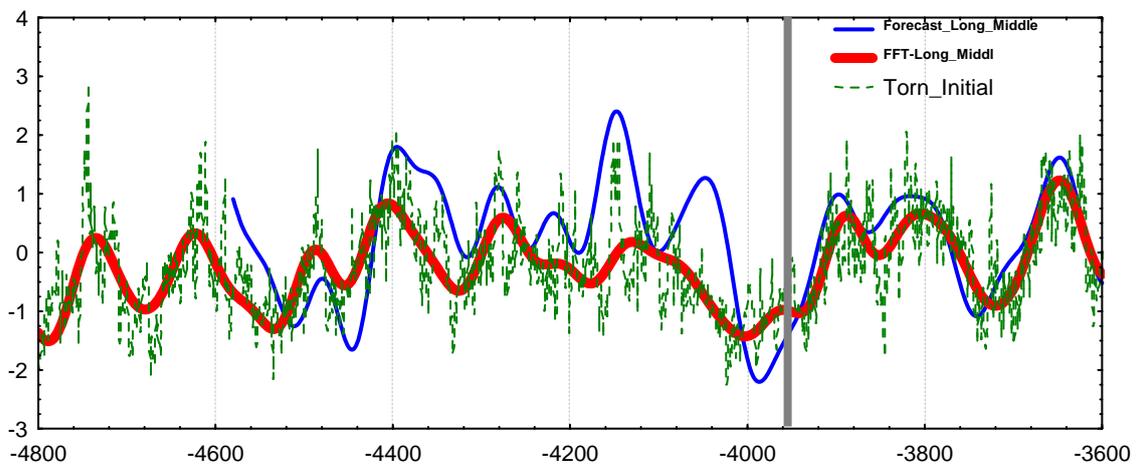
4. The significant positive trend in concordance of two tree-ring chronologies is revealed, i. e. synchronism of two super long-term tree-ring chronologies for Sweden and Finland significantly increases from the past to the present.

5. The spectrum analysis of Kendall coefficients has revealed the following cyclicities for different sliding windows  $W$ : about 1500 yrs, 300, 135–155, 90–110, 45–65 years.

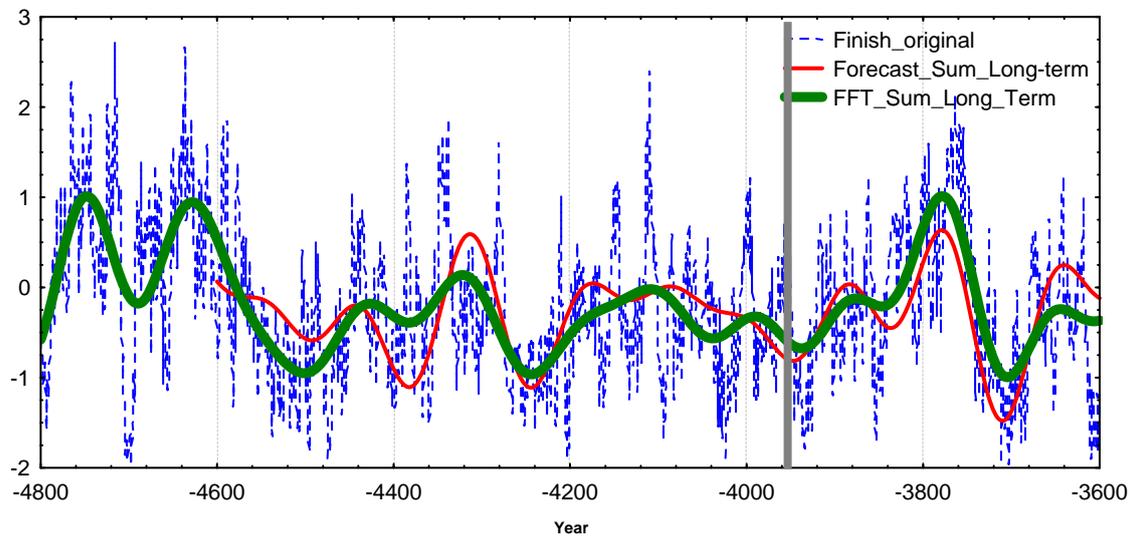
6. More than 99 % of significant Kendall's coefficients for different lengths of window  $W$  are the positive. Therefore, the chronologies are permanently in a phase, or their behaviour is not concordant. Manifest antiphases in dynamics of these series  $t$  are not observed.



*a*



*b*



*c*

Fig. 20. Comparative dynamics of “aggregate”, obtained by narrow-band filtration of actual data bold and their modeling by singular spectrum analysis with:  
*a* – wave length more than 20 years (Sweden); *b* – wave length more than 58 years (Sweden);  
*c* – a wave length more than 100 years (Finland)

7. The negative trend for sliding Kendall's coefficient calculated for super long-term components (with a wave length more, than 200 years) is obtained by the "component-wise" analysis (the combined analysis of cyclical components obtained for tree-ring chronologies). There are no significant trends in a similarity of cyclical component with a wave length from 100 to 200 years.

8. High-frequency components (wave length from 20 to 99 years) significantly influence on total concordance between tree-ring chronologies which. These ones determine the existing positive trend in chronology coherence.

9. The obtained algorithm allows to produce a high-quality long-term (about several centuries) forecast in the past for low-frequency components which can be interpreted as the basic tendencies in tree growth for short-term scales (about 100–200 years)

The approach described above allows to obtain the adequate spectral decomposition of different tree-ring chronologies, to analyze spatial comparisons of different time series, specifying possible reasons of disagreement, to build new long-term reconstruction of different climatic series by different cyclical components. Moreover, the approach allows to extend super long-term tree-ring chronology by low-frequency components (about 30 % of explained variation for several centuries ago), to verify temporal periods in the past for which, by objective reasons (e. g., a small number of wood sample), there are no good statistical estimations, and, finally, to extend existing climatic reconstruction.

The work is supported by the Siberian Federal University state assignment – 2014 of the Ministry of Education and Science of Russian Federation.

## References

1. *Allen, M. R. Smith, L. A.* Investigating the origins and significance of low-frequency modes of climate variability // *Geophys. Res. Lett.*, 1994, 21: 883–886.

2. *Briffa K. F., Schweingruber F. H., Jones F. N., Osborn T. J., Shiyatov S. G., Vaganov E. A.* Reduced sensitivity of recent tree-growth to temperature at high northern latitudes // *Nature*. 1998, 391: 678–682.

3. *Briffa K. F., Osborn T. J., Schweingruber F. H., Jones P. D., Shiyatov S. G., Vaganov E. A.* Tree-ring width and density data around the Northern Hemisphere: Part 1. local and regional climate signals // *The Holocene*, 2002, 12–6: 737–757.

4. *Briffa K. R., Shishov V. V., Melvin T. M., Vaganov E. A., Grudd H., Hantemirov R. M., Eronen M., Naurzbaev M. M.* 2008. Trends in recent Temperature and Radial Tree Growth spanning 2000 years across Northwest Eurasia. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series B-Biological Sciences* – Special issue, doi: 10.1098/rstb.2007.2199.

5. *Elsner J. B., Tsonis A. A.* Singular Spectrum Analysis. Plenum Press, 1996.
6. *Mann, M. E., Lees. J.* Robust Estimation of Background Noise and Signal Detection in Climatic Time Series // *Climatic Change*, 1996, 33: 409–445.
7. *Lees J. M., Park J.* Multiple-taper spectral analysis: a stand alone C-Subroutine // *Computers & Geosciences*. 1995. Vol. 21, No. 2: 199–236.
8. *Liu Yu., Shishov V., Jiangfeng Shi, Vaganov E., Junyan Sun, Qiufang Cai, Djanseitov I., Zhisheng An.* The forecast of seasonal precipitation trend at the north Helan Mountain and Baiyinaobao regions, Inner Mongolia for the next 20 years // *Chinese Science Bulletin*, 2004. Vol. 49, No. 4: 410–415
9. *Percival D. B., Walden A. T.*, Spectral Analysis for Physical Applications, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1993. 583 p.
10. *Ramachandra Rao A., Hamed K.* Multi-taper method of analysis of periodicities in hydrologic data // *J. of Hydrology*, 2003, 279:125–143.
11. *Thomson D. J.* Spectrum estimation and harmonic analysis // *Proc. IEEE* 70, 1982: 1055–1096.
12. *Wigley T. L., Raper R.* Natural variability of the climate system and detection of the greenhouse effect // *Nature*. 1990, 344: 324–327.
13. *Kendall M.* Rank correlation methods. London: Griffin, 1970.
14. *Kendall M., Gibbons J. D.* Rank correlation methods. London: Griffin, 1990.
15. *Grudd H., Briffa K. R., Karlen W., Bartholin T. S., Jones P. D., Kromer B.* A 7400-year tree-ring chronology in northern Swedish Lapland: natural climatic variability expressed on annual to millennial timescales // *The Holocene*, 2002: 657–667.
16. *Vaganov E. A., Shiyatov S. G., Mazepa V. S.* Dendroclimatic studing in the Ural-Siberian Subarctic region. Novosibirsk: Nauka, 1996. 244 p (in Russian).
17. *Vaganov E. A., Shashkin A. V.* Growth and tree-ring structure of conifers. Novosibirsk: Nauka, 2000. 232 p (in Russian).
18. *Shishov V. V., Vaganov E. A., Hughes M. K., Koretz M. A.* Spatial variability of tree growth for Siberia in the last century // *Doklady Earth Sciences*. 2002. Vol. 387-5. P. 690–693.

## РЕДУКЦИИ УРАВНЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ПЛОСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

А. В. Аксенов, А. А. Козырев

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,  
Российская Федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1.  
E-mail: aksenov@mech.math.msu.su

*Ранее для уравнения Буссинеска были получены все редукции вида  $u = U(x, y, w(z))$ , где  $z = z(x, y)$ . Там же было показано, что существуют редукции, отличные от редукций, получаемых с помощью симметрий. Далее были найдены все редукции уравнения Бюргерса, уравнения Кортевега-де Вриза, и модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза. Рассмотрено уравнение, описывающее ламинарный стационарный плоский пограничный слой. Это уравнение описывает движение вязкой несжимаемой жидкости в ламинарном стационарном плоском пограничном слое, искомая функция  $u$ -функция тока (без ограничения общности, кинематический коэффициент вязкости полагается равным единице).*

*Получены все редукции решений рассмотренного уравнения к решениям обыкновенных дифференциальных уравнений. Показано, к какому ОДУ, с точностью до замены переменных, редуцируется уравнение движение вязкой несжимаемой жидкости в ламинарном стационарном плоском пограничном слое. Показано, что рассматриваемое уравнение имеет редукции, не получаемые с помощью симметрий.*

*Ключевые слова: пограничный слой, редукция дифференциального уравнения, инвариантное решение.*

## REDUCTIONS OF A STEADY-STATE LAMINAR BOUNDARY LAYER EQUATION

A. V. Aksenov, A. A. Kozyrev

Moscow State University named after M. V. Lomonosov,  
1, Lenin Hills, Moscow, 119991, Russian Federation.  
E-mail: aksenov@mech.math.msu.su

*Early for the Boussinesq equation were obtained all kinds of reduction  $u = U(x, y, w(z))$ ,  $z = z(x, y)$ .*

*It was also shown that there are reductions other than reductions obtained using symmetries. Further reductions were found all of the Burgers equation Korteweg-de Vries equation and the modified Korteweg-de Vries.*

*We consider equation of plane steady-state laminar boundary layer. All reductions of the solutions of this equation to the solutions of ordinary differential equation are obtained. The fact that there are reductions that cannot be obtained using the symmetry methods has been shown.*

*Keywords: boundary layer, reduction of a differential equation, invariant solution.*

В работе [1] для уравнения Буссинеска

$$u_{tt} + \frac{1}{2}(u^2)_{xx} + u_{xxx} = 0$$

были получены все редукции вида

$$u = U(x, y, w(z)), \quad (1)$$

где  $z = z(x, y)$ . Было показано, что существуют редукции, отличные от редукций, получаемых с помощью симметрий. В этой работе также были найдены все редукции уравнения Бюргерса:

$$u_t + uu_x = u_{xx},$$

уравнения Кортевега-де Вриза:

$$u_t + uu_x = u_{xxx},$$

и модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза:

$$u_t + u^2 u_x = u_{xxx}.$$

Для этих уравнений было показано, что найденные редукции совпадают с редукциями, получаемыми с помощью симметрий, т. е. совпадают с инвариантными решениями.

В настоящей работе находятся все редукции уравнения стационарного плоского пограничного слоя. В отличие от работы [1], в настоящей работе предложен общий метод, применимый к широкому классу уравнений с частными производными (ограничения применимости предложенного метода будут указаны ниже).

Рассмотрим уравнение

$$u_y u_{xy} - u_x u_{yy} = u_{yyy}. \quad (2)$$

Уравнение (2) описывает движение вязкой несжимаемой жидкости в ламинарном стационарном плоском пограничном слое,  $u$  – функция тока (без ограничения общности, кинематический коэффициент вязкости полагается равным единице) [2].

Найдем все решения уравнения (2), сводящиеся к решению обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Решение уравнения (2) ищем в виде (1). Функции  $U(x, y, w(z))$  и  $z(x, y)$ , находятся из условия, что при подстановке решения вида (1) в уравнение (2) получается ОДУ на функцию  $w(z)$ . Подставляя (1) в (2), получаем

$$\begin{aligned}
& (U_y + U_w w' z_x) (U_{xy} + U_{xw} w' z_y + (U_{yw} + U_{ww} w' z_y) w' z_y + U_w w'' z_y z_x + U_w w' z_{xy}) - \\
& - (U_x + U_w w' z_x) (U_{yy} + U_{yw} w' z_y + (U_{yw} + U_{ww} w' z_y) w' z_y + U_w w'' z_y^2 + U_w w' z_{yy}) - \\
& - U_{yyy} - U_{yyw} w' z_y - (U_{yyw} + U_{yww} w' z_y) w' z_y - U_{yw} w'' z_y^2 - U_{yw} w' z_{yy} - \\
& - (U_{yyw} + U_{yww} w' z_y + (U_{yww} + U_{www} w' z_y) w' z_y + U_{ww} w'' z_y^2 + U_{ww} w' z_{yy}) w' z_y - \\
& - 2(U_{yw} + U_{ww} w' z_y) w'' z_y^2 - 2(U_{yw} + U_{ww} w' z_y) w' z_{yy} - \\
& - U_w w''' z_y^3 - 3U_w w'' z_y z_{yy} - U_w w' z_{yyy} = 0. \tag{3}
\end{aligned}$$

Поделим обе части уравнения (3) на коэффициент при старшей производной  $w'''$ , то есть на  $U_w z_y^3$  (процедура нормирования коэффициентов). Условием того, что полученное уравнение является ОДУ, является зависимость каждого из нормированных коэффициентов при производных  $w(z)$  только от переменных  $w$  и  $z$ . Рассмотрим нормированный коэффициент при слагаемом, содержащем  $w'' w'$ . Он имеет вид

$$3U_{ww}/U_w = \Gamma(w, z).$$

Проинтегрировав это уравнение, получаем, что

$$U = \beta(x, y) \Gamma_0(w, z) + \alpha(x, y).$$

Таким образом, искомые решения уравнения (2) можно искать в виде

$$u = \beta(x, y) w(z) + \alpha(x, y). \tag{4}$$

Подставляя (4) в исходное уравнение (2), получаем

$$\begin{aligned}
& (\alpha_y + \beta_y w + \beta w' z_y) (\alpha_{xy} + \beta_{xy} w + \beta_x w' z_y + \beta_y w' z_x + \beta w'' z_y z_x + \beta w' z_{xy}) - \\
& - (\alpha_x + \beta_x w + \beta w' z_x) (\alpha_{yy} + \beta_{yy} w + 2\beta_y w' z_y + \beta w'' z_y^2 + \beta w' z_{yy}) - \\
& - \alpha_{yyy} - b_{yyy} w - 3\beta_{yy} w' z_y - 3\beta_y w'' z_y^2 - 3\beta_y w' z_{yy} -
\end{aligned}$$

$$-\beta w''' z_y^3 - 3\beta w'' z_y z_{yy} - \beta w' z_{yy} = 0. \quad (5)$$

Условие того, что (5) есть ОДУ, означает, что нормированные коэффициенты, зависящие от функций  $\alpha(x, y)$ ,  $\beta(x, y)$ ,  $z(x, y)$  и их производных, должны быть функциями только от переменной  $z$ . Откуда получаем следующую систему из восьми уравнений (слева указана комбинация производных от  $w(z)$ , коэффициенты при которых должны быть функцией только от переменной  $z$ ):

$$\begin{aligned} \underline{w'''} &| \quad 1, \\ \underline{w'^2} &| \quad \frac{\beta z_y^2 \beta_x + \beta^2 z_y z_{xy} - \beta^2 z_x z_{yy} - \beta z_y \beta_y z_x}{\beta z_y^3} = \Gamma_1(z), \\ \underline{w'w''} &| \quad \frac{\beta z_y \beta_y z_x - \beta z_y^2 \beta_x}{\beta z_y^3} = \Gamma_2(z), \\ \underline{w''} &| \quad \frac{z_y (3\beta z_{yy} + 3\beta_y z_y + \alpha_x \beta z_y - \alpha_y \beta z_x)}{\beta z_y^3} = \Gamma_3(z), \\ \underline{ww'} &| \quad \frac{\beta_y^2 z_x - \beta_y \beta_x z_y + \beta_y \beta z_{xy} + \beta z_y \beta_{xy} - \beta_x \beta z_{yy} - \beta z_x \beta_{yy}}{\beta z_y^3} = \Gamma_4(z), \\ & \quad \alpha_y \beta_x z_y + \alpha_y \beta_y z_x + \alpha_y \beta z_{xy} + \beta z_y \alpha_{xy} - 2\alpha_x \beta_y z_y - \\ \underline{w'} &| \quad \frac{-\alpha_x \beta z_{yy} - \beta z_x \alpha_{yy} - 3\beta_y z_{yy} - 3\beta_{yy} z_y - \beta z_{yyy}}{\beta z_y^3} = \Gamma_5(z), \\ \underline{w^2} &| \quad \frac{\beta_y \beta_{xy} - \beta_x \beta_{xy}}{\beta z_y^3} = \Gamma_6(z), \\ \underline{w} &| \quad \frac{\beta_y \alpha_{xy} - \alpha_x \beta_{yy} + \alpha_y \beta_{xy} - \beta_x \alpha_{yy} - \beta_{yyy}}{\beta z_y^3} = \Gamma_7(z), \\ \underline{w^0} &| \quad \frac{\alpha_x \alpha_{yy} - \alpha_y \alpha_{xy} - \alpha_{yyy}}{\beta z_y^3} = \Gamma_8(z). \end{aligned} \quad (6)$$

Каждое из уравнений (6) эквивалентно условию равенства нулю якобиана левой части этого уравнения и функции  $z(x, y)$ . В результате можно получить переопределенную систему уравнений для определения неизвестных функций  $\alpha(x, y)$ ,  $\beta(x, y)$ ,  $z(x, y)$ . Эту систему уравнений (она не приводится в силу ее громоздкости) можно существенно упростить, вводя вспомогательные функции  $\mu_1(x, y)$ ,  $\mu_2(x, y)$ ,  $\mu_3(x, y)$ , определяемые из следующих соотношений

$$\begin{aligned}
z_x - \mu_1(x, y)z_y &= 0, \\
\beta_x - \mu_1(x, y)\beta_y - \mu_2(x, y)\beta &= 0, \\
\alpha_x - \mu_1(x, y)\alpha_y - \mu_2(x, y)\alpha - \mu_3(x, y) &= 0.
\end{aligned}$$

В результате получаем следующую переопределенную систему на вспомогательные функции:

$$\begin{aligned}
\mu_{1y}\mu_2 + \mu_{1xy} - \mu_{1y}^2 - \mu_1\mu_{1yy} &= 0, \\
\mu_{2x} + \mu_2^2 - \mu_2\mu_{1y} - \mu_1\mu_{2y} &= 0, \\
3\mu_{1yy} + 3\mu_{2y} + \mu_{3x} - \mu_1\mu_{3y} + \mu_2\mu_3 - \mu_{1y}\mu_3 &= 0, \\
\mu_{2y}(2\mu_{1y} - \mu_2) &= 0, \\
\mu_2\mu_{2yy} &= \mu_{2y}^2, \\
-\mu_2\mu_{3y} + 2\mu_{2y}\mu_3 - 2\mu_{1y}\mu_{3y} + 4\mu_{1yy} + 6\mu_{2yy} &= 0, \\
-2\mu_{2y}\mu_{3y} + \mu_{2yy}\mu_3 + \mu_2\mu_{3yy} + \mu_{2yyy} &= 0, \\
\mu_{3yyy} &= \mu_{3y}^2 - \mu_3\mu_{3yy}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Из четвертого уравнения системы (7) следует, что нужно рассмотреть два случая.

*Случай 1.*  $\mu_{2y} = 0$ . Тогда  $\mu_2 = \mu_2(x)$ , а из второго уравнения следует, что  $\mu_1$  линейна по  $y$ , то есть  $\mu_1 = y(\mu_2' + \mu_2^2)/\mu_2 + f(x)$ . Подстановка полученного выражения для  $\mu_1$  в первое уравнение приводит к следующему уравнению на  $\mu_2$ :  $\mu_2'' = 2\mu_2'^2/\mu_2$ . Отсюда получается  $\mu_2 = 1/(c_1x + c_2)$ ,  $\mu_1 = y(1 - c_1)/(c_1x + c_2) + f(x)$ . Далее, из седьмого уравнения системы (7) следует, что  $\mu_{3yy} = 0$ . Тогда из последнего уравнения системы (7) следует, что  $\mu_{3y} = 0$ ,  $\mu_3 = \mu_3(x)$ , а из третьего уравнения следует, что  $\mu_3' = \mu_3\mu_2'/\mu_2$ . Тогда получаем  $\mu_3 = c_3\mu_2 = c_3/(c_1x + c_2)$ . Окончательно получаем, что в случае 1.

$$\mu_1 = y \frac{1 - c_1}{c_1x + c_2} + f(x), \quad \mu_2 = \frac{1}{c_1x + c_2},$$

$$\mu_3 = \frac{c_3}{c_1x + c_2}.$$

Случай 2.  $\mu_2 = 2\mu_{1y}$ . После подстановки в пятое уравнение получаем  $\mu_{1y}\mu_{1yyy} = \mu_{1yy}^2$ , откуда  $\mu_1 = f_1(x)\exp[uf_2(x)] + f_3(x)$ . Подстановка полученного выражения в шестое уравнение дает  $\mu_3 f_2(x) - \mu_{3y} + 4f_2^2(x) = 0$ . Далее, подставляя  $\mu_2 = 2\mu_{1y} = 2f_1(x)f_2(x)\exp[uf_2(x)]$  в шестое и седьмое уравнения системы, нетрудно убедиться, что  $f_2(x) = 0$ , а значит  $\mu_1 = h(x), \mu_2 = 0, \mu_3 = F\left(y + \int h(x)dx\right)$ , где  $h(x)$  – произвольная функция, а функция  $F$  определяется из решения ОДУ  $F''' = F'^2 - FF''$ .

Покажем, к какому ОДУ, с точностью до замены переменных, редуцируется уравнение (2) в этом случае. Так как уравнение (2) допускает преобразование  $y \rightarrow y + g(x)$ , где  $g(x)$  – произвольная функция, а редуцированное решение вида (1) допускает преобразования  $z \rightarrow K(z), \beta \rightarrow \beta M(z), \alpha \rightarrow \alpha + \beta L(z)$ , где  $K(z), M(z), L(z)$  – произвольные функции, то, не ограничивая общности, можно положить  $\beta = 1, z = y$ . Тогда можно получить, что  $\alpha = x\varphi(y)$ , где функция  $\varphi(y)$  удовлетворяет ОДУ  $\varphi''' = \varphi'^2 - \varphi\varphi''$ . Редуцированное уравнение в рассматриваемом случае будет иметь следующий вид:

$$w''' + \varphi w'' + \varphi' w = 0.$$

Уравнение (1) допускает следующий базис операторов симметрии [3]:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = f(x)\frac{\partial}{\partial y}, X_3 = \frac{\partial}{\partial u}, X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, X_5 = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Вычисление функций  $\mu_1(x, y), \mu_2(x, y), \mu_3(x, y)$ , соответствующих решениям, инвариантным относительно оператора симметрии

$$X = (c_1 + c_4x + c_5x)\frac{\partial}{\partial x} + (c_2f(x) + c_4y)\frac{\partial}{\partial y} + (c_5u + c_3)\frac{\partial}{\partial u},$$

дает следующие соотношения:

$$\mu_1(x, y) = -\frac{c_4y + c_2f(x)}{c_1 + c_4x + c_5x}, \mu_2(x, y) = \frac{c_5}{c_1 + c_4x + c_5x}, \mu_3(x, y) = \frac{c_3}{c_1 + c_4x + c_5x}.$$

Эти функции  $\mu_1(x, y), \mu_2(x, y), \mu_3(x, y)$  соответствуют решению системы (7) для случая 1.

Таким образом, функции  $\mu_1(x, y), \mu_2(x, y), \mu_3(x, y)$  полученные из системы (7) для случая 2 дают редукции, отличные от редукций, получаемых с помощью симметрий.

Следует также отметить, что данный вид вспомогательных функций нельзя использовать, если  $z_y = 0$ , то есть, не ограничивая общности,  $z = x$ . В этом случае следует брать следующие соотношения на вспомогательные функции:

$$\begin{aligned} z_y - \mu_1(x, y)z_x &= 0, \\ \beta_y - \mu_1(x, y)\beta_x - \mu_2(x, y)\beta &= 0, \\ \alpha_y - \mu_1(x, y)\alpha_x - \mu_2(x, y)\alpha - \mu_3(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Как нетрудно проверить, в случае  $z = x$  уравнение вырождается, и на  $w(z)$  получается ОДУ меньшего порядка, чем исходное уравнение (2). Этот случай не представляет особого интереса и его подробное рассмотрение не приведено.

В заключение отметим, что предлагаемый метод, связанный с введением вспомогательных функций  $\mu_1(x, y)$ ,  $\mu_2(x, y)$ ,  $\mu_3(x, y)$  является общим и применим к уравнениям с частными производными с двумя независимыми переменными, для которых редукции имеют вид (4). В работе [1] было указано, что если исходное уравнение не имеет редукций вида (4), то его можно преобразовать таким образом, вводя новую зависимую переменную, что преобразованное уравнение имеет редукции вида (4).

### Библиографические ссылки

1. Clarkson P. A., Kruskal M. D. New similarity reductions of the Boussinesq equation // J. Math. Phys. 1989. Vol. 30. № 10. P. 2201–2213.
2. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М. : Наука, 1962.
3. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1978.

### References

1. Clarkson P. A., Kruskal M. D. New similarity reductions of the Boussinesq equation // J. Math. Phys. 1989. Vol. 30. № 10. P. 2201–2213.
2. Loytsyanskiy L. G. *Laminarnuyu pogranchnyy sloy* [Laminar boundary layer]. M. : Nauka, 1962 (In Russ.)
3. Ovsyannikov L. V. *Gruppovoy analiz differentsial'nykh uravneniy* [Group analysis of differential equations]. M. : Nauka, 1978 (In Russ.)

## **МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ НАДЕЖНЫХ СТРУКТУР ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ**

О. А. Антамошкин, В. В. Кукарцев

Сибирский государственный аэрокосмический университет  
имени академика М. Ф. Решетнева,  
Российская Федерация, 660014, г. Красноярск,  
просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31.  
E-mail: oleslav24@gmail.com, vlad\_saa\_2000@mail.ru

*Рассмотрены проблемы повышения надежности программного и аппаратного обеспечения систем управления. Представлен анализ методов оценки надежности информационных систем. Проведен анализ таких моделей оценки надежности информационных систем, как : дискретная модель, модель Милса, модель соотношений, модель Бернулли, обобщенно-теоретическая модель, экспоненциальная модель, модель Байеса, модель риска. Как инструмент для оценки надежности информационной системы предлагается использовать метод соотношений. Представлен математический аппарат, предназначенный для создания и оптимизации кластерных структур критичных по надежности систем управления. Рассмотрены различные типы кластеров, а также уровни избыточности при организации катастрофоустойчивого кластера и сценарии отказов кластерной инфраструктуры. Предложены инструменты оптимизации управления развитием структуры кластерной системы обработки информации на основе системы кластеров. Описана задача планирования развития структуры кластерной системы и этап формирования плана развития кластерной структуры информационной системы в составе общей структуры разработанной системы программной поддержки. Предложена программная реализация процедуры формирования оптимального плана развития кластерной инфраструктуры.*

*Ключевые слова: надежность, информационные системы, модели оценки надежности, оптимизация, кластерная структура.*

## **MODELS AND METHODS OF FORMING RELIABLE STRUCTURES OF INFORMATION SYSTEMS FOR INFORMATION PROCESSING**

O. A. Antamoshkin, V. V. Kukarcev

Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev,  
31, "Krasnoyarskiy Rabochiy" prosp., Krasnoyarsk, 660014, Russian Federation.  
E-mail: oleslav24@gmail.com, vlad\_saa\_2000@mail.ru

*The paper discusses the problem of improving the reliability of hardware and software control systems. The analysis of methods to assess the reliability of information systems. The analysis of such models assessing the reliability of information systems as a discrete model, the model of Mills, a model of relations, a model of Bernoulli, generalized theoretical model, the exponential model, the Bayes risk model. As a tool to assess the reliability of the information system is proposed to use the method of proportions. The mathematical apparatus for creating and optimizing cluster structures are critical for safety management systems. The different types of clusters, and so the same level of redundancy in the organization of disaster recovery cluster and cluster infrastructure failure scenarios. Proposed optimization tools development management structure of the cluster system of information processing based on cluster system. Describe the task of planning the development of the structure of the cluster system and the step of forming a plan for the development of the cluster structure of the information system as part of the general structure of the developed system software support. Propose a software implementation of the procedure of creating the optimal plan for the development of the cluster infrastructure.*

*Keywords: reliability, information systems, reliability assessment models, optimization, cluster structure.*

В различных областях применения вычислительной техники все чаще большое значение придается надежности программного обеспечения (ПО). Одним из самых распространенных подходов к реализации программной отказоустойчивости является методология избыточности. Методология мультиверсионного программирования, как один из подходов к реализации идеи введения избыточности в структуру системы программного обеспечения, на практике доказала свою эффективность. С использованием данной методологии были реализованы программные комплексы систем управления летательными аппаратами, атомными электростанциями и т. п. Однако такой метод ведет к увеличению стоимости системы, в которой он применяется.

Рациональное структурное построение программных комплексов гарантирует достаточно полное использование ресурсов ЭВМ. А технологические особенности проектирования программно-информационных технологий (ПИТ) критичных по надежности систем управления, дополняя проблему структурного программного и информационного проектирования, выводят ее в разряд общих проблем разработки методов и автоматизированных систем проектирования сложных программно-информационных комплексов.

Проблеме формирования программных комплексов, проектируемых на основе принципов программной избыточности, в настоящее время уделяется значительное внимание. Проблематика проектирования программных комплексов с использованием методологии мультиверсионного программирования рассматривается в работах многих отечественных

и зарубежных ученых и исследователей. Разрабатываются новые методы оптимизации версионного состава программного комплекса, новые системы формирования структуры программного комплекса, но до сих пор не достаточное внимание уделяется созданию методов и систем формирования структуры мультиверсионного программного комплекса с учетом временных и ресурсных ограничений [37; 38].

### **Метод оценки надежности информационных систем**

Методы оценки надежности ИС рассматриваются с позиции оценки параметров надежности на более ранних этапах проектирования, точности этих оценок, взаимосвязи и влияния оценок надежности и трудоемкости.

Для получения технико-экономических характеристик создания ИС применяют методы экспертных оценок, ретроспективного анализа и фактографический метод накопления и обработки реальных измеряемых данных.

Метод экспертных оценок заключается в сборе информации путем опроса специалистов, при этом достоверность данных полностью определяется уровнем знаний и справедливостью суждений опрашиваемых. Этот метод обычно используется для оценки отдельных стадий жизненного цикла ИС: проектирования, разработки, сопровождения.

Существует большое количество методов обеспечения надежности и связанных с ними методов оценки надежности на различных стадиях жизненного цикла ИС. Однако единого подхода к решению этой проблемы предложено не было и, по-видимому, в ближайшее время не предвидится. Тем не менее, при разработке сложных систем обработки информации их создатели стараются в той или иной степени получить оценку надежности. Очевидно, что наиболее правильный подход заключается в последовательном оценивании надежности системы на каждом этапе разработки. Основная сложность при использовании статистических методов заключается в отсутствии достаточного количества исходных данных, а ведь динамика выявления ошибок должна тщательно фиксироваться и обрабатываться. Важной проблемой является степень детализации элемента расчета надежности. Выявить все связи обработки информации (как это порой предлагается), даже для достаточно несложной технологии обработки данных, практически невозможно. Исходя из этого, детализация элементов расчета надежности (условно называемых модулями) должна ограничиваться законченными «образованиями», которые, взаимодействуя между собой, составляют более сложное объединение (комплекс), надежность которого нас интересует. Далее предпринимается попытка систематизировать и унифицировать существующие методологии. Разрабатываются новые модели и алгоритмы для использования на этапе разработки и планирования развития кластерных структур системы обработки информации [35; 36].

В данной работе анализируются следующие модели оценки надежности ИС:

- дискретная модель;
- модель Милса;
- модель соотношений;
- модель Бернулли;
- обобщенно-теоретическая модель;
- экспоненциальная модель;
- модель Байеса;
- модель риска.

### Дискретная модель

Данная модель применяется по аналогии с аппаратурой, где в качестве меры надежности программы среднего времени между двумя последовательными ошибочными срабатываниями.

Она построена исходя из предположения, что частота проявления ошибок линейно зависит от времени работы  $t_i$  между моментами обнаружения последовательных  $i$ -й и  $i-1$ -й ошибок:

$$\lambda(t_i) = K [N_0 - (i - 1)]t_i, \quad (1)$$

где  $K$  – коэффициент пропорциональности, обеспечивающий равенство единице площади по кривой вероятности.

Используя функцию максимального правдоподобия, можно получить оценки общего количества ошибок  $N_0$  и коэффициента  $K$ :

$$N_0 = \left[ \frac{2n}{K} + \sum_{i=1}^n (i-1)t_i^2 \right] \frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i^2}; \quad (2)$$

$$K = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{2}{N_0 - (i-1)} \right] \frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i^2}. \quad (3)$$

*Метод аналогий*, конечно, универсален, однако не следует забывать, что любая аналогия имеет границы применимости. В данном случае, поскольку речь идет о фундаментальном понятии (единице измерения), следует не просто переносить характеристики надежности аппаратуры на программы, а воспользоваться более фундаментальными аналогиями.

### Модель Миллса

Программа считается правильной, если она не содержит ошибок. Такая программа не дает неверных результатов, т. е. она абсолютно надежна.

Этот факт породил ложное представление о том, что число ошибок в программе можно считать наиболее естественной мерой надежности [1].

Данная модель строится исходя из предположения о введении в систему некоторого случайного количества известных ошибок. Эксплуатируя систему в течение некоторого времени и отсортировывая собственные и внесенные ошибки, можно оценить первоначальное количество ошибок в системе ( $N_0$ ).

При внесении в программу ошибок  $S'$ , обнаружении в процессе тестирования  $n' + u$  ошибок, где  $n'$  – собственные ошибки,  $u$  – найденные внесенные ошибки, первоначальное число в ИС оценивается соотношением

$$N_0 S' n' / u. \quad (4)$$

Понимая, что в системе имеется не более  $K'$  собственных ошибок, определяется уровень значимости  $C'$ :

$$C' = \begin{cases} 1, & \text{при } n' > K' \\ \left( \frac{S'}{i-1} \right) / \left( \frac{S'+K'+1}{K'+i} \right), & \text{при } n' \leq K', \end{cases} \quad (5)$$

Величина  $C'$  является мерой доверия к модели; это вероятность того, что модель будет правильно отклонять ложное предположение. Для оценки  $C'$ , после того как найдено  $i$  внесенных ошибок можно использовать формулу

$$C' = \begin{cases} 1, & \text{при } n' > K' \\ \frac{S'}{S'+K'+1}, & \text{при } n' \leq K', \end{cases} \quad (6)$$

Эта простая модель удобна на практике, однако количество ошибок в системе не имеет никакого отношения к ее надежности, о чем свидетельствует следующее:

1. Число ошибок в программе – величина «ненаблюдаемая», наблюдаются не сами ошибки, а результат их проявления.

2. Неверное срабатывание программы может быть следствием не одной, а сразу нескольких ошибок.

3. Ошибки могут компенсировать друг друга, так что после исправления какой-то одной ошибки программа может начать «работать хуже».

4. Надежность характеризует частоту проявления ошибок, но не их количество; в то же время хорошо известно, что ошибки проявляются с разной частотой: некоторые ошибки остаются не выявленными после многих месяцев и даже лет эксплуатации, но, с другой стороны, нетрудно привести примеры, когда одна единственная ошибка приводит к неверно-

му срабатыванию программы, при любых исходных данных, т. е. к нулевой надежности.

Следует также отметить, что если число ошибок рассматривать как меру надежности, то в терминологии теории вероятностей это число есть случайная величина, однако самый главный вопрос – на каком пространстве элементарных событий она задана – нигде не затрагивался.

Наконец, важно подчеркнуть, что, с точки зрения надежности, в результате исправления ошибки или любой другой коррекции получается новая программа с другим, чем до коррекции, показателем надежности.

Таким образом, число ошибок в программе характеризует скорее не программу, а ее изготовителей и используемый инструментарий.

### Метод соотношений

Надежность, в конечном счете, понятие статистическое, т. е. предполагается наличие некоторого (достаточно большого) количества одинаковых образцов, испытаний и т. д. Существенно также, что имеется элемент случайности. Изучению случайных явлений посвящен специальный раздел математики: теория вероятностей. Основное понятие этой теории – пространство элементарных событий (выборочное пространство, пространство исходов), на котором задается некоторая (вероятностная) мера. Случайная величина, согласно теории, есть функция, заданная на пространстве элементарных событий. Наконец, в качестве меры надежности используются некоторые характеристики случайной величины (как правило, математическое ожидание).

Суть метода [2] сводится к определению вероятности безотказного функционирования сложной информационно-вычислительной системы (ИВС). Структура системы показана на рис. 1, где буквами  $A_1, A_2$  обозначены устройства ввода информации в систему,  $B_1, B_2, B_3$  – процессоры обработки информации и буквами  $C_1, C_2$  – устройства вывода информации.

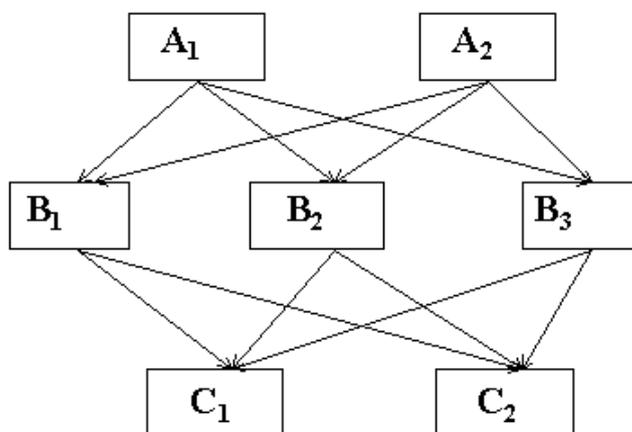


Рис. 1. Функциональная система структуры информационной системы

Процесс функционирования ИВС организован таким образом, что система успешно решает свои задачи при условии, если в исправном состоянии находится хотя бы одно устройство ввода информации, хотя бы одно устройство вывода информации и не менее двух процессоров. Данное условие выполнения целевой функции системы можно наглядно представить в форме логической функции:

$$F(\text{ИВС}) = [F_1(A_1) \vee F_1(A_2)] \vee [F_2(B_1 \vee B_2) \vee F_2(B_1 \vee B_3) \vee \vee F_2(B_2 \vee B_3)] \vee F_3(C_1 \vee C_2), \quad (7)$$

где выражение  $F(*)$  означает, что устройство, указанное в скобках, работает исправно. Представляет интерес также логическая зависимость, описывающая условия не выполнения системой своих целевых функций:

$$F(\text{ИВС}) = [F_1(A_1 \wedge A_2)] \vee \neg F_2(B_1 \wedge B_2) \vee \neg F_2(B_1 \wedge B_3) \vee \vee \neg F_2(B_2 \wedge B_3) \vee \neg F_3(C_1 \wedge C_2), \quad (8)$$

Последнее выражение может оказаться более удобным для решения поставленной проблемы с учетом того, что

$$P[F(*)] = 1 - P[\neg F(*)], \quad (9)$$

где  $P[F(*)]$  – вероятность истинности условия  $F(*)$ , а  $P[\neg F(*)]$  – вероятность истинности отрицания истинности данного условия. Перечисленные элементы ИВС имеют различное функциональное назначение и соединены так, что надежность каждого из них оказывает непосредственное влияние на работоспособность всей системы в целом. Поэтому в качестве факторов для оценки надежности функционирования ИВС следует взять вероятности  $P_i$  ( $i = 1, \dots, 7$ ) безотказного функционирования устройств в процессе решения системой поставленных задач. В общем случае вероятности  $P_i$  могут иметь различные значения. Вероятность  $P[F(\text{ИВС})]$  безотказного функционирования ИВС в целом есть функция от вероятностей безотказного функционирования всех ее элементов, вытекающая из условий (7) или (8). Следовательно, обобщенная схема математической модели, характеризующей безотказность функционирования ИВС, имеет вид, показанный на рис. 2.

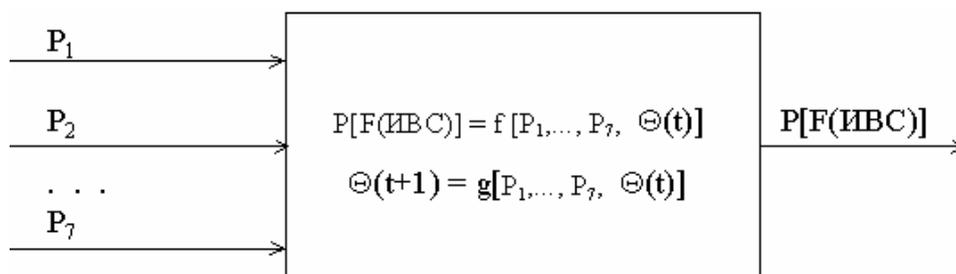


Рис. 2. Схема математической модели для оценки надежности функционирования информационной системы

Проблема состоит в том, как из логических условий (7) или (8) получить соответствующее выражение для количественного значения вероятности  $P [F(\text{ИВС})]$ . Дело в том, что вероятность  $P [F(\text{ИВС})]$  определяется на множестве состояний  $\text{ИВС}\Theta(t)$ . Число состояний в данном множестве равно  $2n = N$ , где  $n$  – число структурных элементов ИВС. В данном примере  $N = 128$ . Условия функционирования ИВС (7) определяют подмножество состояний системы, обеспечивающих выполнение системой заданных целевых функций, а условия (8) определяет подмножество состояний, в которых система оказывается не работоспособной.

Очевидно, для решения данной задачи таким способом придется осуществить полный перебор всех  $N$  состояний системы, или же придумать более эффективный способ определения работоспособных состояний, особенно если учесть, что число состояний системы находится в степенной зависимости от числа ее элементов. Проблема полного перебора состояний становится практически неразрешимой уже при увеличении числа элементов системы всего на один порядок. Для преодоления этого «проклятия размерности» можно предложить два способа. Первый основан на идее имитационного моделирования состояний сложных систем с учетом интенсивности отказов их элементов. В процессе моделирования осуществляется случайный выбор состояний системы и производится оценка вероятности ее исправного функционирования в данном состоянии. Работоспособность системы оценивается по соотношению работоспособных и не работоспособных состояний получаемых из серии опытов. Точность решения задачи данным способом зависит от числа проведенных опытов. Второй способ основан на идее формализованного перехода от логических функций, описывающих условия безотказной работы системы, к соответствующим формулам вероятности сложных событий. При этом для сокращения перебора используется операция ортогонализации форм представления логических функций. Применительно к данному примеру суть этого подхода состоит в следующем.

- В качестве исходной формы описания условий работоспособности ИВС выбираем выражение (8).

$$\begin{aligned} \neg F(\text{ИВС}) = & \neg F_1(A_1 \wedge A_2) \vee \neg F_2(B_1 \wedge B_2) \vee \neg F_2(B_1 \wedge B_3) \vee \\ & \vee \neg F_2(B_2 \wedge B_3) \vee F_3(C_1 \wedge C_2), \end{aligned}$$

- Преобразуем его в правильную сокращенную дизъюнктивную нормальную форму логической функции  $\cup F(\text{ИВС})$ :

$$\begin{aligned} \neg F(\text{ИВС}) = & \neg F_1(A_1) \wedge \neg F_2(A_2) \vee \neg F_3(B_1) \wedge \neg F_4(B_2) \vee \neg F_3(B_1) \wedge \\ & \wedge \neg F_5(B_3) \vee \neg F_4(B_2) \wedge \neg F_5(B_3) \vee \neg F_6(C_1) \wedge \neg F_7(C_2), \end{aligned}$$

где  $\neg F_i(*)$  – факт отказа устройства.

• Для упрощения записи заменим переменную  $\cup F_i(*)$  на переменную  $X_i$ :

Здесь  $X_i$  логическая переменная, соответствующая высказыванию “элемент №  $i$  исправен”, а  $\bar{X}_i$  логическая переменная, соответствующая высказыванию “элемент №  $i$  не исправен”.

• Преобразуем полученную дизъюнктивную нормальную форму, представленную в табл. 1.

Таблица 1

**Преобразование дизъюнктивной нормальной формы**

№ ОК	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$F(\text{ИВС})$
1	0	0	–	–	–	–	–	0
2	–	–	0	0	–	–	–	0
3	–	–	0	–	0	–	–	0
4	–	–	–	0	0	–	–	0
5	–	–	–	–	–	0	0	0

В этой таблице переменные  $X_i$  представлены значением «0» соответствующих переменных  $X_i$ , и каждая строка таблицы представляет собой обобщенный код определенного подмножества неработоспособных состояний ИВС. Легко заметить, что все обобщенные коды данной таблицы описывают пересекающиеся между собой подмножества состояний ИВС, т. е. обобщенные коды не ортогональны между собой.

• Применяя формулу  $K_i Q K_j = K_i Q (K_j / K_i)$ , проведем ортогонализацию всех обобщенных кодов. В результате получим табл. 2, которая не содержит повторяющихся ситуаций в описании всех возможных неработоспособных состояний системы.

Таблица 2

**Проведение ортогонализации обобщенных кодов**

№ ОК	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$F(\text{ИВС})$
1	0	0	–	–	–	–	–	0
2	1	–	0	0	–	–	–	0
3	0	1	0	0	–	–	–	0
4	1	–	0	1	0	–	–	0
5	0	1	0	1	0	–	–	0
6	1	–	1	0	0	–	–	0
7	0	1	1	0	0	–	–	0
8	1	–	1	1	–	0	0	0
9	1	–	0	1	1	0	0	0
10	0	1	1	1	–	0	0	0
11	1	–	1	0	1	0	0	0
12	0	1	0	1	1	0	0	0
13	0	1	1	0	1	0	0	0

Поэтому от данной таблицы можно перейти непосредственно к формуле вычисления вероятности отказа ИВС:

$$P[\bar{F}(\text{ИВС})] = \sum_{e=1}^m \prod_i^k P_i \prod_j^h Q_j,$$

где  $m$  – число ортогональных обобщенных кодов в табл. 2;  $k$  – число символов «1» в обобщенном коде №  $e$ ;  $h$  – число символов «0» в том же обобщенном коде;  $P_i$  – вероятность исправного состояния элемента №  $i$ , т. е.  $P_i = P(X_i = \langle 1 \rangle)$ ;  $Q_j$  – вероятность неисправного состояния элемента №  $j$ , т. е.

$$Q_j = P(X_j = \langle 0 \rangle) = 1 - P_j$$

Предлагаемый подход позволяет существенно уменьшить трудоемкость вычисления вероятностей сложных событий. Так в данном примере, оказалось, достаточно вычислить сумму из тринадцати произведений вероятностей  $P_i, Q_j$ . Каждое произведение вероятностей определяется одним обобщенным кодом табл. 2. При полном переборе неработоспособных состояний ИВС в данном примере необходимо было бы вычислить сумму из 92 полных произведений вероятностей, т. е. по 7 элементов в каждом произведении. Необходимым требованием для решения поставленной проблемы в любом случае является наличие априорных данных о значениях вероятностей  $P_i$  безотказной работы элементов сложной системы. При наличии статистических данных об отказах элементов ИВС математическая модель для оценки работоспособности заданного структурного варианта ИВС может быть сведена к строгому аналитическому виду, показанному на рис 3.

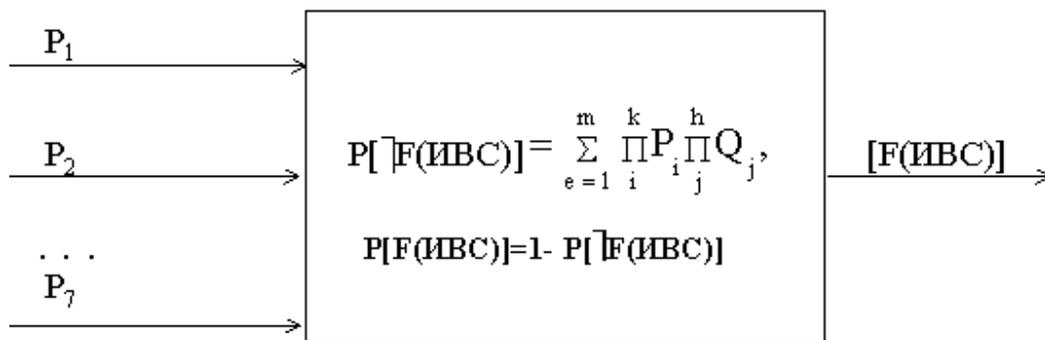


Рис. 3. Схема математической модели для оценки надежности функционирования информационно-вычислительной системы

В качестве технического и математического обеспечения для моделирования и решения данной проблемы достаточно иметь современную персональную ЭВМ со штатным (общим) математическим обеспечением. На этом концептуальное проектирование данной модели заканчивается.

Результаты обычно помещают в специальный отчет и используют на следующих этапах моделирования.

Таким образом, последовательный вероятностный подход при изучении надежности состоит в анализе исследуемого объекта (самолета, системы охраны, компьютерной программы и т. д.), построении, исходя из «физических» соображений о его природе, пространств элементарных событий, введении на них вероятностной меры и рассмотрении случайных величин.

К сожалению, первый этап исследований – анализ объекта и построение пространств элементарных событий – обычно опускают и сразу переходят к рассмотрению случайных величин, упуская из вида, что случайная величина есть на самом деле функция, заданная на пространстве элементарных событий.

### Модель последовательности испытаний Бернулли

Рассмотрим для простоты класс программ, имеющих единственный вход и выход, т. е. не содержащих бесконечных циклов. Фазу выполнения программы от начала до завершения будем называть запуском. Все возможные результаты запуска разобьем на два класса: правильные и неправильные (ошибочные). Будем считать, что любой результат всегда можно отнести к одному из этих классов. (Ясно, что по этому вопросу возможны разногласия между изготовителями программы и пользователями, однако будем предполагать, что имеется какой-то общий критерий, например, «клиент всегда прав».) Рассмотрим классическую вероятностную модель последовательности испытаний Бернулли. Пространство элементарных событий в этой модели содержит  $2n$  точек, где  $n$  – число испытаний (в данном случае под испытанием подразумевается запуск программы). Каждый запуск программы имеет два исхода: правильный и неправильный. Обозначим вероятность неправильного исхода  $p$ , а вероятность правильного –  $(1 - p)$ . Вероятность того, что из  $n$  запусков  $K$  приведут к неправильному результату, выражается хорошо известной формулой биномиального распределения [6; 33].

$$B(p, n, k) = C(n, k) \cdot p^k \cdot (1 - p)^{(n - k)}, \quad (10)$$

где  $C(n, k)$  – число сочетаний. Вероятность  $p$  априори неизвестна, но по результатам запусков известны  $n$  и  $k$ . Величина  $B$  как функция  $p$  имеет максимум при

$$p = k/n. \quad (11)$$

В качестве меры надежности программы можно принять величину

$$R = 1 - k/n = (n - k)/n, \quad (12)$$

значения которой (от 0 до 1) согласуются с общепринятым смыслом термина надежность: например, если все запуски окончились с ошибочным результатом ( $k = n$ ), то надежность – нулевая.

Наиболее существенное предположение в данной модели состоит в том, что запуски программы считаются независимыми. Это означает, что результаты предыдущих запусков не дают никакой информации о результатах следующего. Ясно, что это предположение на практике выполняется не всегда: например, повторный запуск с теми же входными данными даст, очевидно, тот же самый результат.

Следует отметить, что изготовитель программы и ее пользователь располагают разной информацией о ней. Например, изготовителю заведомо известна логика программы, так что по результатам запуска с некоторыми исходными данными он иногда может точно предсказать результаты запусков с другими исходными данными (на этом, в конечном счете, основана любая методика тестирования), и в этом смысле предположение о независимости испытаний не выполняется. Однако пользователя редко интересует устройство программы, для него важно лишь одно: выполняет ли она требуемые функции, поэтому у пользователя нет оснований считать запуски зависимыми. Если же имеется желание использовать информацию об устройстве программы при оценке ее надежности, то следует придумать какую-то более сложную вероятностную модель, которая бы ее учитывала.

#### *Некоторые следствия.*

Формула (12) позволяет оценить надежность программы по результатам ее запусков. Следует особо остановиться на двух предельных случаях:  $k = n$  (нулевая надежность) и  $k = 0$  (абсолютная надежность). В обоих случаях результаты не следует интерпретировать буквально: нет никаких гарантий того, что очередной запуск приведет к тому же результату, что и предыдущие. Однако с точки зрения пользователя эти случаи совершенно разные. Если нулевая надежность свидетельствует о том, что программа явно непригодна для эксплуатации, то показатель абсолютной надежности не должен вводить в заблуждение: такой вывод нельзя делать по результатам даже очень большого числа запусков. Следует подчеркнуть, что для оценки надежности в этом случае необходимо рассмотреть другие вероятностные модели.

Из формулы (12) следует, что оценка надежности программы растет с увеличением числа ее запусков по гиперболическому закону. Это подтверждает интуитивно ясное соображение о том, что программа тем надежнее, чем больше опыт ее эксплуатации, который зависит как от интенсивности использования программы, так и от тиража компьютера, на котором она запускается. Таким образом, надежность программ для персональных компьютеров типа IBM PC, общий тираж которых составляет в настоящее время около 100 миллионов, на несколько порядков выше аналогичных программ для специализированных процессоров (если, конечно, такие программы действительно существуют и эксплуатируются).

## Обобщенно-теоретическая модель надежности

Обобщенная модель надежности ИС базируется на следующих исходных положениях:

1. ИС  $C$  представляет множество  $X = \{x_n\}$  ( $n = \overline{1, n^*}$ ), в состав которого входят некоторые элементы. Множество описывает процесс преобразования входных данных  $A$  во множество результатов  $\Phi$ .

2. ИС  $C$  в  $q$ -реализации ( $q = \overline{1, q^*}$ ) функционирует в интервале времени  $(0, T_{qr})$ . Интервал разбит на  $r$  необязательно равных между собой тактовых интервалов  $\tau_{qi}$  ( $i = \overline{1, q^*}$ ). В начале тактового интервала  $\tau_{qi}$  на вход программы поступает вектор исходных сообщений  $\overline{a_{qr}^z}$ . Упорядоченная последовательность векторов входных сообщений в  $q$ -реализации вида  $\overline{a_{q1}^z}, \overline{a_{q2}^z} \dots \overline{a_{qr}^z}$  образует векторное подмножество входных сигналов  $A_q = \{\overline{a_{qr}^z}\}_{T_{qr}}$ . Результатом преобразования является вектор выходных сообщений  $\overline{\Phi_{qr}^z}$ . Упорядоченная последовательность векторов  $\overline{\Phi_{qr}^z}$  образует векторное подмножество выходных сообщений  $\Phi_q \subset \Phi$ .

3. Во время функционирования ИС в  $q$ -реализации каждый из элементов множества  $x_n \in X$  может находиться в одном из двух состояний  $y_n$ , описываемых значениями  $y_n = 1$ , когда элемент работоспособен, и  $y_n = 0$ , когда не работоспособен. Неработоспособным считается элемент, содержащий ошибку определенного класса.

Элементы  $x_n \in X$  образуют два подмножества работоспособных  $x^p$  ( $x_n^p \in X$ ) и неработоспособных  $x^h$  ( $x_n^h \in X$ ) элементов.

Цель функционирования системы при  $x_{T_{qr}} \cap x^p = 0$  будет достигнута, при  $x_{T_{qr}} \cap x^h \neq 0$  не будет достигнута или достигнута, но с худшими показателями.

Цель функционирования системы в  $q$ -реализации считается достигнутой, если

$$|\Phi'(A_q) - \Phi(A_q)| \leq \Delta q,$$

где  $\Phi'(A_q)$  – последовательность выходных сигналов в  $q$ -реализации,  $\Phi(A_q)$  – желаемая последовательность выходных сигналов в  $q$ -реализации.

Если обозначить  $ATq$  как множество элементов из  $X_{T_{qr}}$ , при которых  $X_{T1}(x_{T_{qr}} \cap x_1^p \neq 0)$ , а вектор из  $ATq$  через  $\overline{a_{qi}^k} \in \overline{A_{Tq}}$ , как число попарно различимых векторов, а через  $Sn$  – число попарно различимых векторов

$\bar{a}^{-k}_{qi}$  в произвольный момент времени, то вероятность недостижения цели функционирования ИС в  $q$ -реализации

$$P_q = \frac{r_q \cdot n_a}{S_n}. \quad (13)$$

Усредненная вероятность недостижения цели функционирования системы

$$\bar{P}_y = \frac{\bar{r} \cdot n_a}{S_n}. \quad (14)$$

Вероятность достижения цели функционирования ИС

$$P_{ц} = 1 - \bar{P}_{ц} = 1 - \frac{\bar{r} \cdot n_a}{S_n}. \quad (15)$$

### Экспоненциальная модель надежности

Данная модель основана на экспоненциальной модели распределения ошибок в системе. В ней устанавливается связь между интенсивностью обнаружения ошибок при отладке  $dn/d\tau$  с интенсивностью проявления ошибок с интенсивностью проявления ошибок при нормальном функционировании комплекса программ  $\lambda$  и числом первичных ошибок  $n$  ( $\tau$ -время работы при отладке или функционировании):

$$\frac{dn}{d\tau} = KN_o - Kn, \quad (16)$$

тогда  $n = N_o [1 - \exp(-K\tau)]$ .

Количество оставшихся первичных ошибок  $n_0$  выражается соотношением. Длительность отладки  $T$  в этой модели

$$T = \frac{N_o T_0}{K} \ln(T_2 / T_1), \quad (17)$$

где  $T_0$  – наработка на обнаружение ошибки в начале отладки;  $T_1, T_2$  – наработки текущая и желаемая соответственно.

На основе этих соотношений определяются коэффициенты готовности

$$K_{\Gamma} = 1 - \frac{T(1 - t_1 / t') - t' / 2}{T + (1 - t' / 2T)t_3} \quad (18)$$

и простоя  $K_{п} = 1 - K_{\Gamma}$ . Здесь  $t'$  – период проверок;  $t_1$  – время затрат ресурсов на проверки;  $t_3$  – длительность восстановления работоспособности системы.

Оптимальная длительность отладки в экспоненциальной модели определяется следующим соотношением:

$$\tau_0 = k^{-1} \ln \frac{Ht_3 K^2 N_0 (t^2 / 2 + t_3)}{\chi}, \quad (19)$$

где  $H$  – количество систем, в которых функционирует КП;  $t_3$  – длительность эксплуатации системы;  $\chi$  – коэффициент увеличения затрат ресурсов на единицу машинного времени.

### Байесовская модель

Данная модель надежности опирается на байесовскую интерпретацию вероятности. Интенсивность обнаружения ошибок в этой модели определяется как

$$\lambda(\tau) = \frac{n}{\psi(n)} \left[ \log \prod_{i=1}^n \frac{\psi(i) + \tau_i}{\psi(i)} \right]^{-1}, \quad (20)$$

где  $\tau_i$  – длительность функционирования системы после обнаружения и устранения  $i-1$  ошибки;  $\psi(i)$  величины являются свободными параметрами модели, определяемыми при аппроксимации экспериментальных данных.

Этот метод хорош, если есть серьезные основания для прогноза частоты ошибок в исходном кортеже. Однако теоретически использование этой оценки не вполне корректно [5], так как процесс, включающий коррекцию кортежа по каждой ошибке, не стационарен, а это предполагается в обосновании методов оценки вероятности.

### Модель риска

Самая известная модель надежности, разработанная Джелиински, Морандой и Шуманом.

Эта модель близка к экспоненциальной модели надежности и определяет функцию надежности  $R(t)$ , т. е. вероятность того, что ни одна ошибка не проявится в интервале от 0 до  $t$ , через функцию  $Z(t)$  – условную вероятность того, что ошибка проявится на интервале от  $t$  до  $t + \Delta t$  при условии, что до момента ошибок не было:

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t Z(x) dx\right), \quad (21)$$

где  $x = (t + \Delta t) - t$ .

При этом среднее время между отказами (СВМО) дается формулой

$$CBMO = \int_0^{\infty} R(t) dt. \quad (22)$$

Один из способов оценки СВМО – наблюдение за поведением системы в течение некоторого периода времени и нанесение на график значений времени между последовательными ошибками.

Экстраполируя эту кривую в будущее, можно предсказать СВМО в любой момент времени и предсказать полное количество ошибок (оценивая число ошибок, которые появятся раньше, чем СВМО станет бесконечным).

Такая экстраполяция, однако, в слишком большой степени основана на догадках и обычно уводит в сторону. Все предположения, на которых основывается модель, спорны.

Одно из первых предположений состоит в том, что все ошибки одинаково серьезны (например, отказ системы и орфографическая ошибка в сообщении одинаково серьезны).

Второе предположение – что ошибка исправляется немедленно. Предполагается также, что система не изменяется (за исключением исправления ошибок).

Из этого следует, что описанная выше модель кажется чересчур оптимистичной. Например, при  $n = 10$  (десять обнаруженных ошибок) с интервалами между отказами (в минутах),

9, 17, 31, 54, 32, 78, 82, 33, 57, 82.

Модель предсказывает, что осталось 3,3 ошибки. Интервалы времени оцениваются между 10, 11, 12 и 13 ошибками в 135, 245, 1265 минут.

### **Кластерные решения повышения надежности на этапе развития катастрофоустойчивой структуры**

Усложнение структуры различных систем, обусловленное ростом размеров и сложности производственных процессов и процессов управления, выдвигает ряд задач, связанных с научно-обоснованным построением их структуры [6–8]. Разумное развитие предполагает учёт множества различного рода ограничений. Автоматизация процесса отслеживания того, насколько удовлетворены эти ограничения, значительно помогает в решении такого рода задач. В таких случаях на помощь человеку приходят системы поддержки принятия решения [9].

Большое значение в настоящее время в связи с повсеместной автоматизацией рабочих процессов придается совершенствованию структуры автоматизированных систем управления [3; 10]. Компьютерные системы корпораций хранят сегодня основную информацию о работе предприятий и фирм, и их выход из строя способен остановить работу корпорации. Очевидно, что такие жизненно важные (ВСС – Business Critical Computing) системы должны обладать адекватным уровнем отказоустойчивости в рамках отведенных бюджетов [11]. Под отказоустойчивостью понимается

количество одновременных отказов компонентов системы, которые приводят к прекращению работы – чем больше узлов системы нужно вывести из строя для прекращения ее работы, тем более отказоустойчива такая система. Отказоустойчивость повышает общую надежность системы, собранной из недостаточно надежных компонентов. Требования по отказоустойчивости определяются по разности между требуемым уровнем надежности и реальной надежностью существующих компонентов. Надежность в свою очередь – это доля времени непрерывной работы вычислительной системы – чем больше эта величина, тем меньше система простаивает [12]. Для критически важных приложений нужно добиваться минимум 99,9 % надежности. Общим требованием сегодня стало «пять девяток» – 5 мин простоя в год. Однако такие же требования, нужно предъявлять и к сетевому оборудованию, каналам подключения и электропитанию. Естественно, что надежность серверов должна быть выше надежности рабочих станций и мобильных устройств [13].

Простое дублирование элементов системы зачастую не является эффективным решением проблем отказоустойчивости информационных технологий [3]. Существует ряд кластерных решений, но опять же возникает проблема развития системы в целом [14]. Усложнение структуры системы предъявляет повышенные требования к эффективности и качеству принимаемых решений на этапах развития систем.

В данной работе рассматривается проблема повышения устойчивости кластерных информационных технологий к сбоям в работе, на примере системы кластеров, путем управления развитием их инфраструктуры. Рассматривается формализация задачи планирования очередности и этапности создания сложных кластерных систем обработки информации, модели и методы, позволяющие определить моменты начала и окончания разработки взаимосвязанных объектов кластерных структур, распределение ресурсов между ними на этапе планирования. Разрабатываемый подход, модели и методы могут быть использованы для решения задач инвестиционного планирования создания крупномасштабных катастрофоустойчивых кластерных систем обработки информации на базе современных вычислительных сетей.

### **Кластерные решения как способ повышения надёжности**

Как указано в работах [15; 11], возможны два способа повышения доступности ресурсов программно-информационных технологий корпоративных структур: увеличение индивидуальной надежности серверов и улучшение общесистемной отказоустойчивости. В первом случае увеличивается надежность каждого элемента системы, что позволяет строить конфигурации высокой доступности из небольшого количества компонентов. Для построения надежной распределенной системы в рамках корпорации обычно используется большое количество не очень надежных компонен-

тов, а высокая надежность всей системы достигается многократным дублированием. Известны методы увеличения аппаратной надежности [17].

Используя резервирование, увеличивают отказоустойчивость компьютеров по отношению к сбоям внутренних компонентов: блоков питания, дисков, процессоров и т. п. При использовании резервирования главное вовремя заметить сбой и перевести систему на работу с резервным аналогом выходящего из строя компонента. При этом для резервирования, например, блоков питания не требуется программной поддержки, в то время как для памяти, жестких дисков и процессора часто приходится менять и ПО. В результате решение становится не универсальным, и его нельзя применить для других серверов.

Вместе с дублированием горячая замена позволяет выполнять ремонт серверов без прекращения их работы, что увеличивает доступность, но уменьшает отказоустойчивость и надежность компьютера во время смены блока. Наиболее сложно обеспечить горячую замену процессоров, памяти и жестких дисков, поскольку для этого нужно реализовать динамическую перестройку операционной системы. Кроме того, необходимо правильно спроектировать корпус сервера, который позволял бы менять внутренние элементы, не вынимая весь сервер из монтажной стойки.

Немаловажным элементом надежных систем является диагностика компонентов: перегрева процессора, памяти, системной платы, а также контроль возникновения ошибок. Диагностика позволяет предупредить аварию и вовремя заменить блок, который пока еще работает корректно, но уже «дышит на ладан». Если в системе предусмотрена горячая замена данного компонента, то это позволяет исправить поломку еще до ее возникновения.

Далее основное внимание уделяется кластеризации. Имеется две реализации кластеров, обеспечивающих совместную работу нескольких компьютеров: аппаратная и программная [14]. Аппаратный кластер предусматривает специальные компоненты для поддержки целостности кластера и обрабатываемых им данных. Программный позволяет реализовать кластер из универсальных серверов и сетевых технологий, но требует поддержки со стороны операционной системы: баланса загрузки, контроля работоспособности узлов, перераспределения ресурсов и решения других задач. Собственно аппаратные кластеры выпускаются уже давно, а сегодня начали появляться и программные кластеры.

В работе рассматривается решение проблемы увеличения аппаратной надёжности путем кластеризации. Причем кластеры будут рассматриваться на качественно более высоком уровне – с точки зрения катастрофоустойчивости. В [11] катастрофоустойчивость определяется как способность к восстановлению работы приложений и данных за минимально короткий период времени после катастрофы. Под катастрофами понимаются не только пожар, наводнение или землетрясение, но также возможные не-

предвиденные сбои в работе служб, разрушение данных или повреждение всего центра обработки (например, в результате аварий в ходе ремонтных работ, умышленной диверсии или саботажа). Развитие катастрофоустойчивой архитектуры (рис. 4) предполагает обеспечение защиты от незапланированных простоев во время, и после катастрофы в географически распределенных узлах кластера, при которой отказ одного узла не приводит к прекращению работы всей системы.

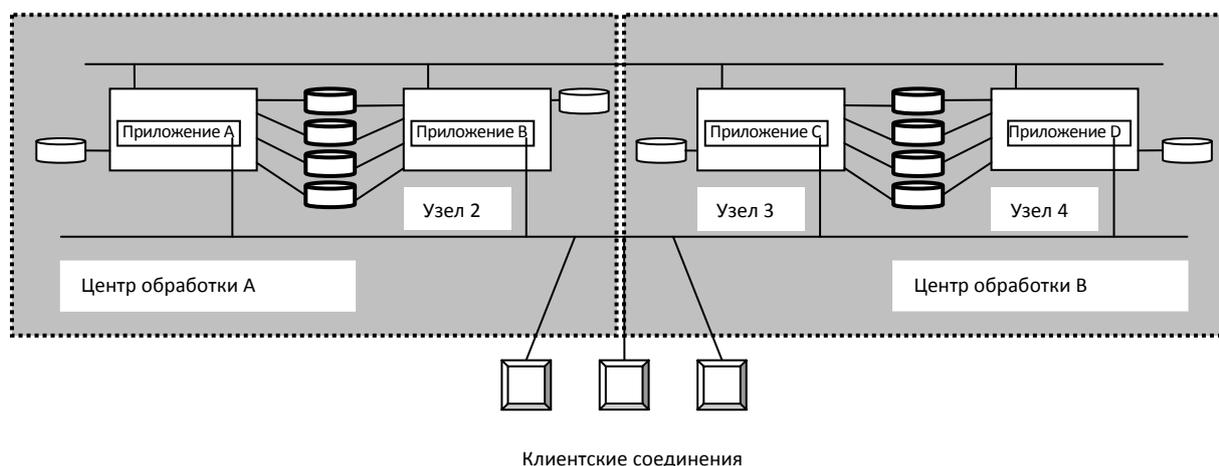


Рис. 4. Катастрофоустойчивая архитектура

Как правило, поддержка катастрофоустойчивой конфигурации не ограничивается развертыванием только аппаратно-программных решений (организация кластера, установка программных компонентов управления производительностью, ресурсами, инфраструктурой и др.), а должна включать специальные виды услуг, предоставляемые производителем, третьей компанией или выполняемые самим заказчиком (мониторинг работоспособности, резервное копирование и т. д.). Например, ряд решений, направленные на обеспечение катастрофоустойчивости и основанные на использовании технологий компании Hewlett-Packard, рассмотрен в работе.

### Типы кластеров

В данной работе рассматривается проблема управления развитием информационно-технической инфраструктуры корпорации, успешное решение которой обеспечит оптимальный план развития информационного пространства [17]. Управление развитием заключается в определении моментов ввода типов кластеров, структуру серверной сети в каждый период планирования и потоки мощностей между кластерами различных уровней иерархии (согласно выбранным степеням катастрофоустойчивости) с учетом динамики изменения потребностей абонентов каждого структурного компонента (сервера) в информационно-технологических работах и капитальных затрат на ее развитие [18–21].

Аппаратно-программные решения для корпоративных структур, обеспечивающие катастрофоустойчивость, соответствуют следующим типам кластеров. Для защиты от катастроф узлы кластера необходимо разнести на достаточное расстояние. Узлы размещаются в разных помещениях, на разных этажах здания, в разных районах города или даже в разных городах или странах. Расстояние между узлами определяется исходя из конкретной ситуации и в соответствии с используемой технологией репликации данных.

Рассмотрим типы кластеров, представленные в [14].

Начнем с локального кластера, в котором (рис. 5) все узлы расположены в одном центре. Это не обеспечивает катастрофоустойчивости, однако, поскольку большинство кластеров высокой готовности принадлежат именно к этому базовому типу, полезно сравнить его с другими кластерными архитектурами.

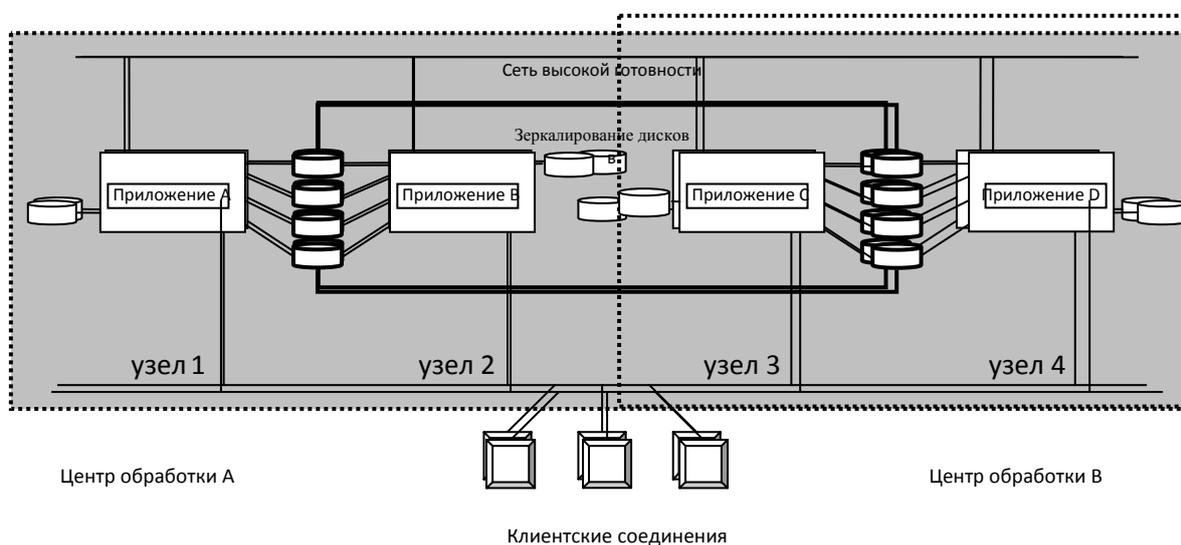


Рис. 5. Локальный кластер

Кампусный кластер (рис. 6). Используется как альтернативный способ размещения узлов обработки и хранения данных, которые распределяются по территории предприятия. Сбой в одном здании не приводит к простоя системы. Расстояния между узлами ограничены используемой технологией репликации данных. Для структурной организации кластеров этого типа обычно характерно следующее:

- избыточные диски со средствами репликации данных;
- избыточные сетевые кабели, проложенные по разным маршрутам;
- альтернативные источники питания каждого узла (питание может подаваться от разных подстанций, что защищает кластер от возможных перебоев с подачей электроэнергии).

*Метрокластер* (рис. 7) – это тип кластера класса города или района. В его архитектуре имеются дублирующие узлы, расположенные в разных частях города или в пригородах.

Разнесение узлов на большие расстояния уменьшает вероятность выхода из строя дублирующего узла в результате катастрофы. Архитектура метрокластера очень напоминает кампусный, с той разницей, что расстояния между узлами значительно больше. Для организации такого кластера требуется разрешение местных властей на прокладку сетевых кабелей и кабелей для репликации данных, что может усложнить его развертывание.

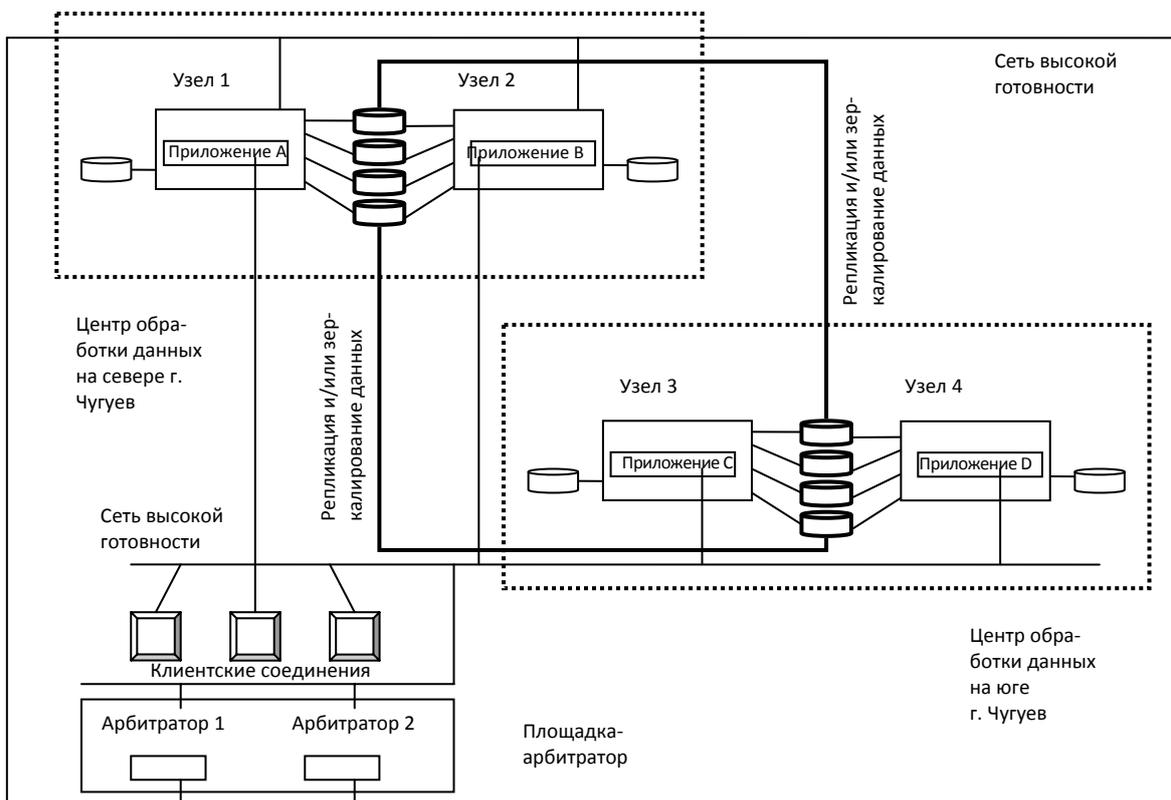


Рис. 7. Метрокластер

Метрокластер предполагает наличие средств синхронизации. Обычно для решения этой задачи используется площадка-арбитратор, содержащая дополнительный узел, который состоит из выделенного сервера и выполняет связующую и синхронизирующую роль для всех остальных узлов. **Арбитраторы** – полнофункциональные системы, являющиеся составными частями кластера, но не подсоединенные к дисковым массивам. В метрокластере поддерживаются конфигурации с одним или двумя арбитраторами, однако конфигурации с двумя арбитраторами более предпочтительны, так как они обеспечивают больший уровень готовности.

Основное различие между кампусным и метрокластером в технологии репликации данных. Кампусный кластер, как правило, использует для репликации соединение Fibre Channel [13] и средства операционной системы (скажем, MirrorDisk/UX [22]), что накладывает ограничение на расстояние между центрами обработки. Метрокластер использует репликацию, осно-

ванную на возможностях дисковых массивов (например, HP SureStore XP или EMC Sym-metrix [23]), которые допускают их разнесение на большие расстояния. В остальном метрокластер организован так же, как и кампусный. Архитектура метрокластера реализована в двух продуктах HP: MetroCluster with Continuous Access XP и MetroCluster with EMC SRDF [14].

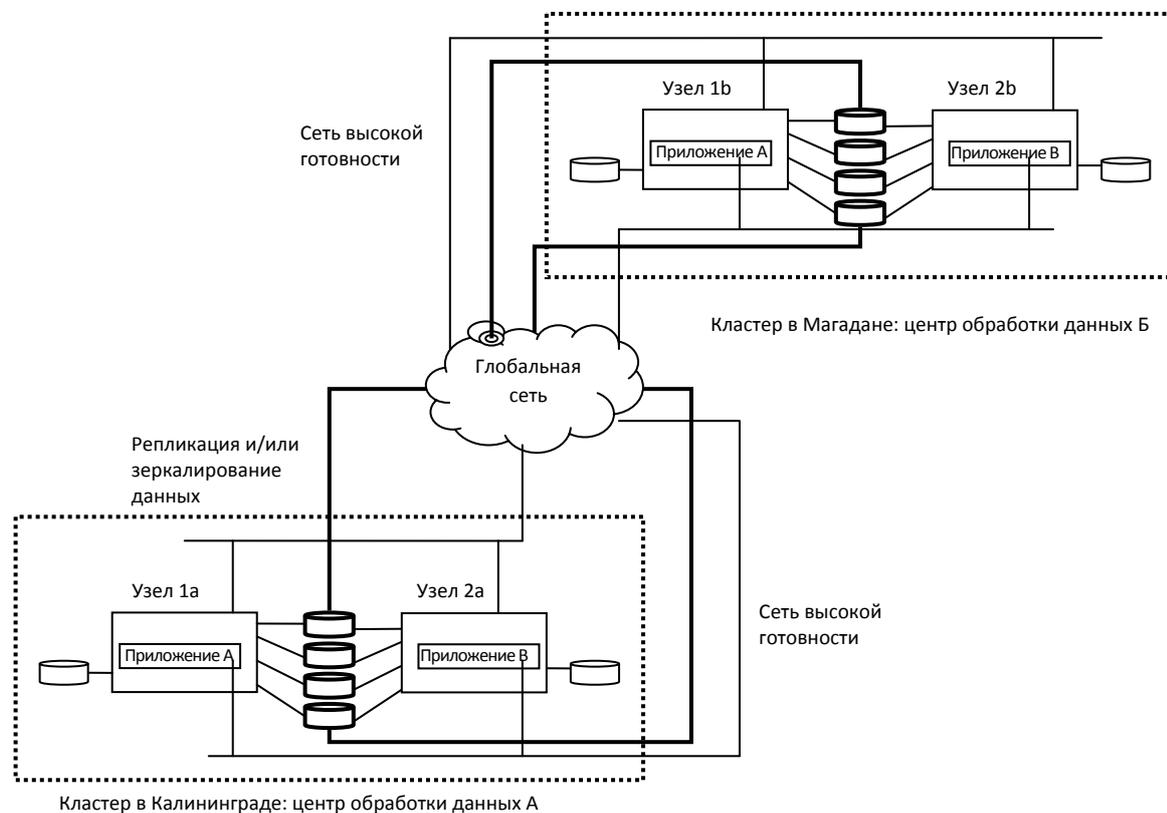


Рис. 8. Континентальный кластер

**Континентальный кластер.** Континентальный кластер (рис. 8) представляет собой совокупность дублированных кластеров, разнесенных на значительные расстояния, причем таким образом, чтобы между ними не использовались технологии локальных сетей. В архитектуре континентального кластера каждый входящий в него кластер является полностью правомочным, поэтому арбитратор не используется. Для соединения кластеров используются глобальные сети на базе TCP/IP, однако для репликации могут понадобиться и высокоскоростные выделенные или коммутируемые линии (например, T1/E1 или T3/E3 [24]).

### Уровни избыточности при организации катастрофоустойчивого кластера

Итак, все больше предприятий предъявляют повышенные требования к своей информационной инфраструктуре. Растет число организаций, для

которых «непрерывность бизнеса» становится уже не просто красивым словосочетанием. Есть они и в нашей стране.

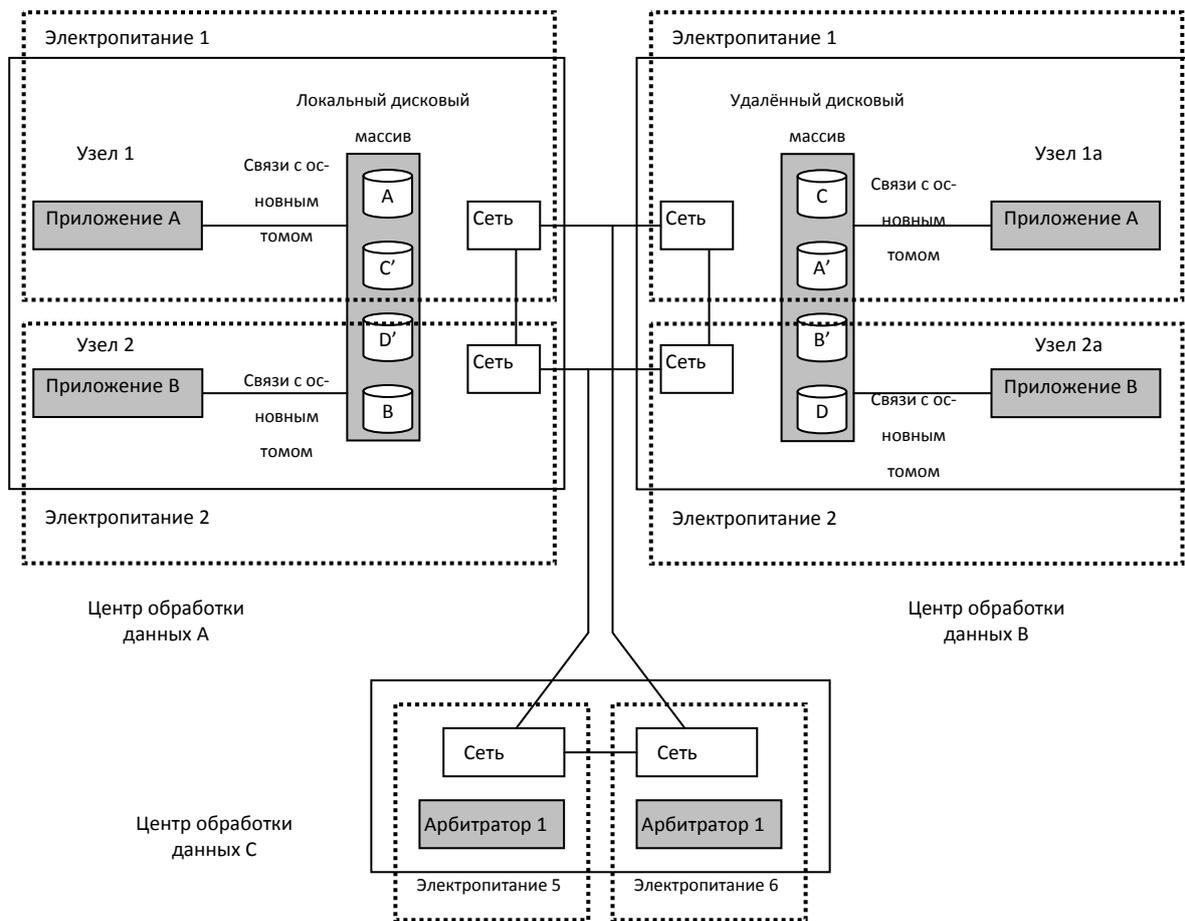


Рис. 9. Три центра (с площадкой-арбитратором)

Все более или менее серьезное оборудование подразумевает некоторую степень избыточности. Серверы и дисковые массивы оснащаются резервными источниками питания, вентиляторами, дублирующими контроллерами, процессорами, зеркалированной кэш-памятью, многими другими избыточными устройствами. Все эти усилия направлены на устранение единой точки отказа оборудования. Для построения отказоустойчивой системы это необходимо, для катастрофоустойчивой – недостаточно. Если отказоустойчивая система способна сохранять работоспособность в случае выхода из строя отдельных компонентов, то катастрофоустойчивая – в случае одновременного множественного выхода из строя составных частей или узлов в результате событий непредвиденного характера.

Работоспособность отказоустойчивой системы обеспечивают входящие в нее компоненты: данные со сбойного диска восстанавливаются по четности, микросхема памяти может локально отключаться, питание осуществляется с резервного источника и т. д. (см. [23; 25–27]) Функционирование катастрофоустойчивой системы достигается за счет разнесения ее

компонентов на значительные расстояния. Это позволяет подключать систему к разным подстанциям или электростанциям, исключая единую точку отказа по сбою в подаче питания, и обеспечивая непрерывность бизнеса при выходе из строя не только узла кластера, но и всей площадки. Однако одновременно растет роль каналов связи между узлами кластера; если риск повредить проводку внутри здания невелик, и можно применять дешевые решения (изначально полагая, что проводка надежнее компонентов), то в метрокластере канал связи становится важным элементом архитектуры. При построении катастрофоустойчивого кластера необходимо предусмотреть прокладку основного и резервного каналов связи по разным маршрутам.

При формировании оптимального плана развития кластерной инфраструктуры чрезвычайно важен этап выбора правильной архитектуры, когда требуется определить, насколько уязвим бизнес и каково максимальное время простоя ИТ-инфраструктуры, при котором бизнесу не будет нанесен непоправимый ущерб.

Для некоторых предприятий или подразделений корпорации это может быть день или два; для других даже минутный простой несет ощутимые потери. Одни приложения нуждаются лишь в защите от сбоя узла, а другие требуют еще и защиты от выхода из строя всей площадки.

Далее, важно определить, какую роль играет каждый конкретный сервер. Так, серверы, отвечающие за обслуживание сборочной линии, требуется восстановить быстрее. Однако если они расположены неподалеку от сборочной линии, то в случае землетрясения серверы выйдут из строя вместе с линией, поэтому запускать приложения, управляющие сборкой на удаленной площадке, не имеет смысла. С другой стороны, систему управления поставками можно запустить на другой площадке, обеспечив работу абонентских узлов отдела продаж и непрерывность поставок продукции.

Итак, катастрофоустойчивость системы в аппаратной части обеспечивается:

- географическим разнесением узлов;
- репликацией данных;
- несколькими независимыми источниками питания;
- высоконадежной сетевой инфраструктурой.

### **Сценарии отказов кластерной инфраструктуры**

Рассмотрим теперь несколько сценариев работы кластера, отвечающих разным уровням надежности и устойчивости к катастрофам. Динамическая характеристика, вычисляемая всякий раз, когда узел кластера выходит из строя, в [14] получила название «кластер-кворум» – целостность кластера.

Смысл этой характеристики поясним на следующем примере. Если система использует 10 узлов, и все они работают, то кластер-кворум равен 100 %. Если же, в некоторый момент, выходят из строя два узла, то кла-

стер-кворум становится равен 80 %. Анализ функционирования кластерных систем показывает, что кластер способен к реконфигурации только в том случае, если число одновременно вышедших из строя узлов строго меньше половины работающих.

Далее для различных архитектур при оценке последствий того или иного сценария отказов достаточно рассчитать значение кластер-кворума.

Архитектура с одним арбитратором. В рамках данной архитектуры имеется два центра обработки данных и одна площадка-арбитратор (рис. 10).

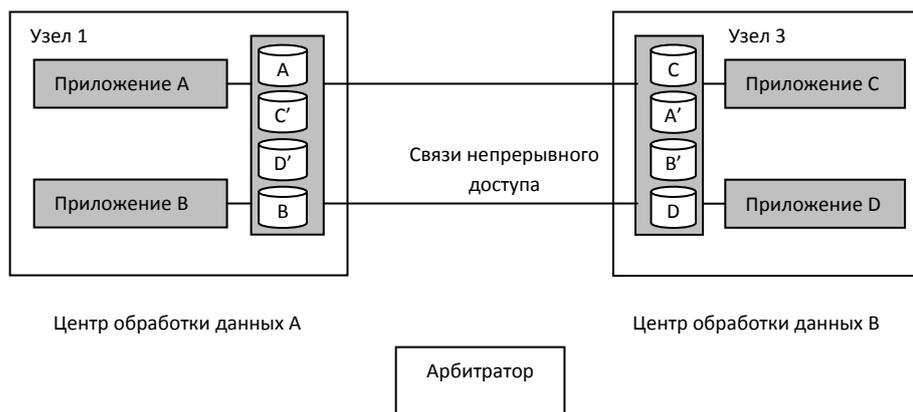


Рис. 10. Архитектура с одним арбитратором

На этом пространстве работает кластер из четырех узлов (узел 1 – приложение А; узел 2 – приложение В; узел 3 – приложение С; узел 4 – приложение D) и арбитратора (всего пять). Каждый центр обработки данных содержит два узла кластера и один массив Sure-Store XP. На каждом узле есть приложение, работающее с дисковым массивом.

Между дисковыми массивами установлены связи непрерывного доступа, так что данные приложения А, расположенные на дисках А массива центра А, реплицируются на диски А1 массива, расположенного в центре В. То же самое делается для приложений В, С и D, соответственно. Площадка-арбитратор содержит сервер-арбитратор.

В табл. 3 представлены сценарии, иллюстрирующие возможные последствия выхода из строя одного или нескольких узлов, а также центра обработки данных в конфигурации с одним арбитратором.

Таким образом, кластер будет остановлен только в случае выхода из строя третьего узла при уже недоступных двух узлах и арбитраторе. Во всех остальных случаях кластер будет способен произвести реконфигурацию. Понятно, что в обычном режиме приложение А работает на узле 1, присутствуя в «спящем» виде на других узлах кластера и будучи сконфигурировано так, что при остановке оно запускается на другом узле. Сценарии 7–14 иллюстрируют возможные последствия выхода из строя центра обработки данных в конфигурации с одним арбитратором.

## Сценарии отказов в конфигурации с одним арбитратором

Сценарии	Не работает	Отказ	Целостность кластера, %	Осталось	Последствия
1		Арбитратор	80	4 из 5	Нет
2		Узел 1	80	4 из 5	Приложение А запускается на другом узле кластера
3	Узел 1	узел 2	75	3 из 4	Приложение А и В запускается на другом узле кластера
4	Узел 1, узел 2	Арбитратор	67	2 из 3	Приложение А и В запускается на другом узле кластера
5	Узел 1, узел 2, арбитратор	Узел 3	50	1 из 2	Кластер остановлен*
6	Арбитратор	Узел 1	75	3 из 4	Приложение А запускается на другом узле кластера
7		Центр А	60	3 из 5	Приложение А и В запускается в центре В
8	Центр А	Арбитратор	67	2 из 3	Нет
9		Центр А Арбитратор	40	2 из 5	Кластер остановлен*
10	Центр А	Арбитратор; узел 3	50	1 из 2	Кластер остановлен*
11	Арбитратор	Центр А	50	2 из 4	Кластер остановлен*
12	Узел 3	Центр А	50	2 из 4	Кластер остановлен*
13		Центр В	60	3 из 5	Приложения С и D запускаются в центре А
14		Арбитратор	80	4 из 5	Нет

Примечание. \* – кластер можно перезапустить вручную на оставшихся узлах.

В конфигурации с одним арбитратором кластер подвергается опасности всякий раз, когда узел останавливается по причине сбоя или при проведении регламентных работ.

*Архитектура с двумя арбитраторами.* Наличие двух арбитраторов (рис. 11) обеспечивает повышенную защиту при остановке узлов и позволяет осуществлять планирование обслуживания арбитраторов без риска остановки кластера при обнаружении сбоя.

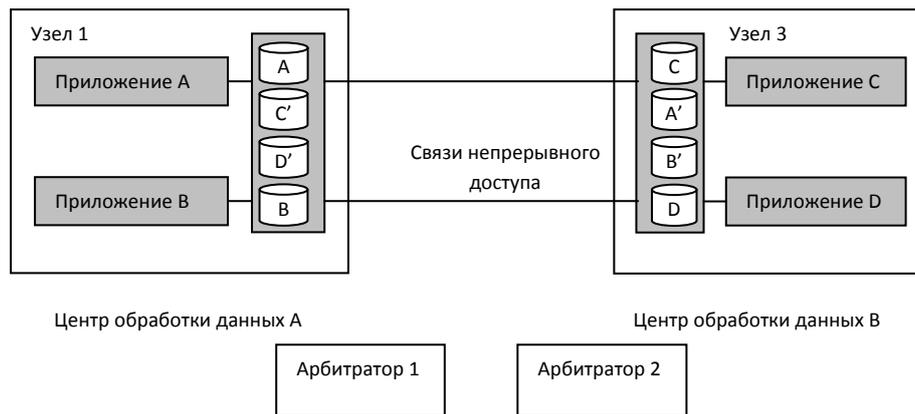


Рис. 11. Архитектура с двумя арбитражами

Таблица 4

**Сценарии отказов в конфигурации с двумя арбитражами**

Сценарии	Не работает	Отказ	Целостность кластера, %	Осталось	Последствия
1		Центр А	67	4 из 6	Приложение А и В запускается в центре В
2	Центр А	Арбитратор 1	75	3 из 4	Нет
3		Центр А, арбитратор 1	50	3 из 6	Кластер остановлен
4	Центр А	Арбитратор 1, узел 3	67	2 из 3	Приложение А, В и С запущены на другом узле кластера
5	Арбитратор 1	Центр А	60	3 из 5	Приложение А и В запускается в центре В
6	Узел 3	Центр А	60	3 из 5	Приложение А и В запускается в центре В
7		Центр В	67	4 из 6	Приложение С и D запускается в центре А
8		Площадка-арбитратор	67	4 из 6	Нет

В табл. 4 сценарии для архитектуры с двумя арбитражами иллюстрируют возможные последствия остановки центра обработки данных и одного или нескольких узлов в конфигурации с двумя арбитражами. Из анализа сценариев отказов в данной конфигурации видно, что некоторые сценарии, приводящие к остановке кластера с одним арбитражом, позволяют работать кластеру с двумя арбитражами.

Минимальный ущерб, при котором кластер становится недоступен, – это одновременный выход из строя одного из центров обработки данных и одного арбитра. Если одновременный ущерб больше, то кластер будет остановлен. Во всех остальных случаях будет произведена реконфигурация и система продолжит работу на оставшихся узлах. Введение второго арбитра существенно повышает уровень готовности системы.

Как видно по таблице, сценарий 10 и 11 в конфигурации с одним арбитром приведут к остановке системы, в то время как аналогичные сценарии в конфигурации с двумя арбитрами приведут лишь к реконфигурации кластера.

### **Оптимизация управление развитием структуры кластерной системы обработки информации. Система кластеров**

Рассматриваемые архитектурные решения для возможного развития кластерной инфраструктуры корпорации включают совокупность узлов в центрах обработки информации [28–30]. В свою очередь, узлы, включают ряд структурных подразделений, участвующих в информационном пространстве на равных правах (приложения, дисковые массивы, арбитры и т. д.), связанных между собой коммуникационными каналами, обеспечиваемыми сетью высокой готовности, а для дисковых массивов предоставляется связь непрерывного доступа. Каждый центр обработки информации характеризуется величинами потребностей своих узлов в информационно-технических ресурсах и категорией катастрофоустойчивости для кластерной архитектуры в каждый период планирования развития кластерной инфраструктуры корпорации [31].

Категория катастрофоустойчивости центра обработки информации характеризуется, в первую очередь, значением кластер-кворума, а также составом комплекса используемых аппаратно-программных средств в узлах. Тогда процесс развития кластерной инфраструктуры корпорации, обеспечивающий последовательное поэтапное повышение уровня катастрофоустойчивости, по аналогии с моделью в работе, представляется в виде набора путей на многодольном альтернативном графе, множество вершин которого отображает набор возможных категорий катастрофоустойчивости (тип кластера) каждого центра обработки информации в заданные периоды, а множество дуг – возможные переходы из одной категории в другую.

Задача планирования развития кластерной инфраструктуры состоит в поиске оптимального плана развития кластерного информационного пространства, который должен определить моменты ввода центров обработки информации, а также инфраструктуру кластерной сети в каждый период планирования. Необходимо также учитывать динамику изменения потребностей узлов системы и затраты на развитие кластерной сети корпорации.

В зависимости от конкретных особенностей постановки задачи формализуется критерий оптимальности для плана развития кластерной инфраструктуры корпорации [13]. В ряде случаев целесообразно ввести коэффициенты, учитывающие важность информационно-технических ресурсов, требуемых  $i$ -м подразделением (узлом кластера). Она зависит от приоритетности структурных подразделений системы корпоративного управления, обслуживаемых им и значения кластер-кворума для соответствующего сценария поведения системы при отказах компонентов. При этом накладываются общие ограничения на затраты по созданию аппаратно-программных средств инфраструктуры [32] (информационного пространства). Важными также являются ограничения на степень удовлетворения потребностей корпоративных пользователей в информационно-технических услугах по периодам планирования.

Рассматриваемая модель позволяет проводить оптимизацию и анализ вариантов развития кластерной инфраструктуры систем обработки информации.

### **Кластер-кворум**

В работе [14] кластер-кворум упоминался, как динамическая характеристика, значение которой представляет собой целостность кластера в текущий момент времени. Для нашей постановки задачи кластер-кворум определен, как минимальная целостность кластера, при которой он остаётся работоспособен. Это процентная характеристика, обозначающая минимальную часть кластера, способную справиться с возложенными на него задачами. Объясним на примере. Если значение кластер-кворума 40 %, то это означает, что при выходе из строя 60 % всего оборудования, кластер способен стабильно работать на оставшихся элементах. Таким образом, в идеале кластер-кворум должен стремиться к 0.

Для расчета значения кластер-кворума каждому узлу кластера экспертным путем проставляются веса. После этого соответственно весам рассчитывается процентный «эквивалент важности» для каждого узла. Далее составляются варианты нарушения целостности кластера с соответствующей оценкой работоспособности. Минимальное работоспособное значение целостности принимается за кластер-кворум.

### **Оптимизационная задача планирования развития структуры кластерной системы**

Имеется информационно-техническая система, представляющая собой совокупность  $I$  кластеров. Обозначим номер кластера  $i = \overline{1, I}$ . Каждый кластер характеризуется: катастрофоустойчивой категорией ( $k = \overline{1, K}$ ), районным коэффициентом  $\mu_i$  и потребностью в кластер-кворуме  $Q_{it}$  в момент

времени  $t$ . На интервале времени  $T$  каждый период планирования  $t$  ( $t = \overline{1, T}$ ), выделяются материальные средства в размере  $R_t$  на развитие инфраструктуры системы кластеров. А районный коэффициент  $\mu_i$ , учитывает увеличение капитальных затрат на строительство кластера в особых районах (северных, сейсмических и т. д.). Каждой категории  $k$  соответствует минимальное работоспособное значение целостности (кластер-кворум)  $Q_k$  и капитальные затраты (требуемые ресурсы) на развитие кластера  $R_k$ . Для формализации поставленной задачи введём следующие переменные величины:  $x_{ikt} = 1$ , если  $i$ -й кластер имеет  $k$ -ю категорию в  $t$ -й период планирования,  $x_{ikt} = 0$  в противном случае.

Обозначим через  $q_{ikt} = Q_{it} - Q_k$  разность между требуемой минимальной целостностью  $i$ -го кластера в  $t$ -й период и кластер-кворумом  $k$ -й категории.

Тогда выражение, характеризующее степень превышения потребностей в устойчивости к нарушению целостности выглядит следующим образом:

$$\tilde{q}_{ikt} = \begin{cases} -q_{ikt}, & \text{если } q_{ikt} < 0, \\ 0, & \text{если } q_{ikt} \geq 0, \end{cases} \quad (23)$$

$$\bar{q}_{ikt} = \begin{cases} q_{ikt}, & \text{если } q_{ikt} > 0, \\ 0, & \text{если } q_{ikt} \leq 0, \end{cases}$$

Условие выбора для каждого кластера одной категории из допустимого множества

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K \tilde{q}_{ikt} \cdot x_{ikt}. \quad (25)$$

формализуется в виде

$$\sum_{k=1}^K x_{ikt} = 1, \quad i = \overline{1, I}, \quad t = \overline{1, T}, \quad (26)$$

где  $I$  – общее количество кластеров.

Условие, ограничивающее набор возможных категорий  $i$ -го кластера в каждый  $t$ -й период, выглядит так:

$$\sum_{k=1}^K k \cdot x_{ikt} \leq K_{it}^*, \quad i = \overline{1, I}, \quad t = \overline{1, T}, \quad (27)$$

где  $K_{it}^* = \min_{Q_{it} \geq Q_k} k$  – минимальная категория, кластер-кворум которой полностью удовлетворяет потребности  $i$ -го кластера в  $t$ -й период планирования ( $k = \overline{1, K}$ ).

Учитывая районный коэффициент  $\mu_i$ , ограничение на капитальные затраты в период времени  $t$  формализуется в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^I \mu_i \sum_{k=1}^K x_{ikt} \cdot (R_k \cdot x_{ikt} - R_k \cdot x_{ik(t-1)}) \leq R_t. \quad (28)$$

В нашем случае важным условие является удовлетворение потребительских запросов, и поэтому в качестве критерия оптимальности плана развития используем выражение (25), взятое по минимуму:

$$\min \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K \tilde{q}_{ikt} \cdot x_{ikt}, \quad (29)$$

Таким образом, план, обеспечивающий минимум дефицита надежности, на всем интервале времени, выделенном на развитие системы, будет являться оптимальным.

Для решения рассмотренной задачи используется алгоритм, применяющий графовую формализацию, отражающую возможные варианты развития кластерной системы. Алгоритм основан на процедуре просмотра вариантов решения, использующей схему «ветвей и границ» (см. также [33]). Блок-схема алгоритма приведена в [28; 30]. Здесь рассмотрим только основные шаги алгоритма.

1. *Ветвление.* Для очередного  $i$ -го кластера просматривается множество возможных вариантов его развития. Для каждого вновь полученного варианта проводится расчет оценки критерия оптимальности (блок 4), и каждое вновь полученное решение помещается в массив частичных решений (МЧР), который упорядочивается по значению оценки критерия оптимальности (блок 5).

Ветвление осуществляется из решения, у которого зафиксированы варианты развития для наибольшего количества элементов кластерной инфраструктуры; если таких вариантов несколько, то ветвление осуществляется из решения с наилучшей оценкой критерия. Очередной индекс кластера выбирается из следующего соотношения  $i = JI * MAX + 1$ , где  $JIMAX$  – число единиц кластерной инфраструктуры, для которых зафиксированы варианты развития в выбранном частичном решении (блоки 9, 10).

2. *Исключение неперспективных решений.* Если на определенном шаге ветвления будет получено решение, в котором зафиксированы варианты развития для всех кластеров инфраструктуры, то из рассмотрения исключаются все частичные решения, имеющие худшие, чем у данного, оценки критерия оптимальности, т. е. исключаются все решения, следующие за данным в массиве частичных решений (блок 6).

3. *Вычисление оценки.* Для произвольной вершины  $j$ -го уровня модели с зафиксированными вариантами развития для  $j$ -го кластера, оценка вычисляется следующим образом:

$$F_{it} = F_{it}(x_{ikt}) + F_{it}^*(x_{ikt}), \quad (30)$$

где первое слагаемое есть значение критерия для зафиксированной части, второе – оценка критерия для незафиксированной части кластерной инфраструктуры плана развития. Для вычисления  $F_{it}^*(x_{ikt})$  выполняются следующие шаги процедуры:

*Шаг 3.1.* Вычисляется значение оставшейся части ресурсов  $R^{j+1} = R_t - R(x_{ikt}), i \leq j$ .

*Шаг 3.2.* Полагается  $i = j + 1$ ; для всех кластеров, вариант развития которых не зафиксирован, назначается высшая допустимая категория кластера (с учетом кластер-кворума), формируется массив категорий кластеров КМАС ( $i, t$ ), рассчитываются затраты ресурсов на создание такой сети  $RQ_t^i$  и проверяется ограничение

$$R^{j+1}_t \geq RQ_t^i. \quad (31)$$

Если ограничение выполнено, то  $F_{it} = F_{it}(x_{ikt})$ , если ограничение не выполнено, то для каждого  $i$ -го кластера ( $i > j$ ) вычисляется значение вносимой им добавки к критерию  $D(i, t)$  при уменьшении его категории на единицу, и сформированный таким образом массив МЕМ ( $n, t$ ) упорядочивается в порядке увеличения добавок к критерию оптимальности.

*Шаг 3.3.* Выбирается кластер, дающий наименьшую добавку к критерию оптимальности при уменьшении его категории  $il = \text{МЕМ}(n, t)$ , КМАС ( $il, t$ ) = КМАС ( $il, t$ ) – 1, вычисляется величина  $RQ_t^i = R_{\text{КМАС}(il, t) - 1} - R_{\text{КМАС}(il, t)}$  проверяется ограничение (31).

*Шаг 3.4.* Если ограничение (31) не осуществлено, то снова выполняется шаг 3.3. В противном случае на основе сформированного массива КМАС ( $il, t$ ) вычисляется  $F_{it}^*(x_{ikt}) = F_{it}(x_{i, (\text{КМАС}(il, t), t)})$ .

4. *Условие получения оптимального решения.* Если на первом месте в массиве частичных решений оказывается решение, в котором зафиксированы варианты развития для всех кластеров инфраструктуры, то получено оптимальное решение, и алгоритм работу заканчивает (блок 7).

Рассмотренные модели и алгоритмы используются в следующей главе для оптимизации плана развития кластерной структуры конкретной катастрофоустойчивой системы обработки информации на заданный период развития.

**Формирование плана развития кластерной структуры катастрофоустойчивого варианта системы обработки информации.** Данный раздел содержит описание этапа формирования плана развития кластерной структуры ИС в составе общей структуры разработанной системы программной поддержки.

Программная реализация решения задачи построена на базе алгоритма нахождения оптимального плана в каждый конкретный период развития системы. При этом были введены следующие допущения:

– перевод кластера в более высшую категорию производится без наращивания производительности;

– финансовые затраты на кластер ИС рассчитаны таким образом, чтобы переход кластера из одной категории в другую происходил за один период.

Решение поставленной задачи полным перебором вариантов, даже в рамках малой системы на коротком интервале времени, занимает длительное время и не всегда оканчивается успешно. В связи с этим обстоятельством в алгоритм программы введёна оптимизация поиска оптимального решения [16], построенная на «неявном» переборе вариантов. В основу оптимизации взята модификация метода «ветвей и границ». Алгоритм реализован итерационной процедурой: разделение всех возможных решений на подмножества, проверка возможности существования в подмножестве оптимального решения, отсев «плохих» подмножеств решений, возврат к первому этапу.

При программной реализации алгоритма был сделан переход от целевой функции, как суммы решений на всем интервале планирования, к сумме значений целевой функции на каждом этапе планирования. Тем самым была введена проверка на оптимальность решения на каждом конкретном этапе развития.

Таким образом, «оптимальное» решение, найденное для конкретного периода планирования, заносится в план без проверки на суммарное значение целевой функции на всем временном интервале развития кластерной системы.

Может возникнуть такой вариант, когда предъявленные экспертами запросы на развитие системы удовлетворены до момента окончания поступления денежных средств. Такая ситуация возникает при небольших первоначальных запросах и длительном временном интервале, определённом на развитие системы. Встает вопрос определения стратегии развития уже без опоры на потребности системы, выставленные экспертами. Не всегда имеет смысл, в таком случае, выделять средства на слаборазвитые элементы системы. Вполне возможно, что данное состояние элемента будет являться удовлетворительным для системы в целом еще долгий период времени. Соответственно подход с равномерным развитием системы в данном случае не подходит. И поэтому для целесообразного использования выделяемых ресурсов в системе предусмотрен блок прогнозирования развития запросов элементов системы (Блок «МОД-1»).

Прогнозирование строится на основе данных о первоначальном состоянии кластера и соответственно текущем, которое обусловлено кластер-кворумом, запрошенным экспертами для этого кластера. На основе этого подхода дальнейшее развитие системы будет планироваться пропорционально развитию до момента удовлетворения первоначальных потребностей системы.

Реализация оптимизационного подхода требует разработки компьютерных алгоритмов и программ, реализующих процедуры планирования разви-

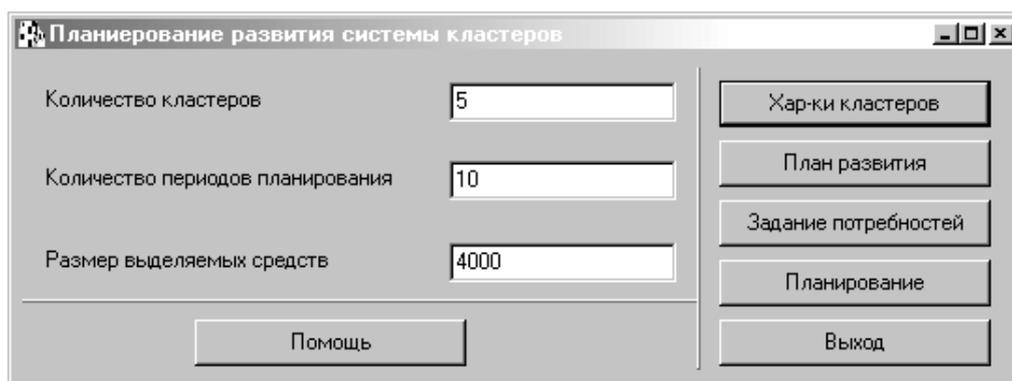
тия структуры системы кластеров. Конечный результат работы: программно-алгоритмическая поддержка компьютерной автоматизации процесса формирования плана развития (программная реализация данных алгоритмов).

Для функционирования разработанной программной системы необходима операционная система из линейки WINDOWS (9X/ME/2K/XP) и выше, так же необходимо присутствие ряда библиотек Borland C++ Builder.

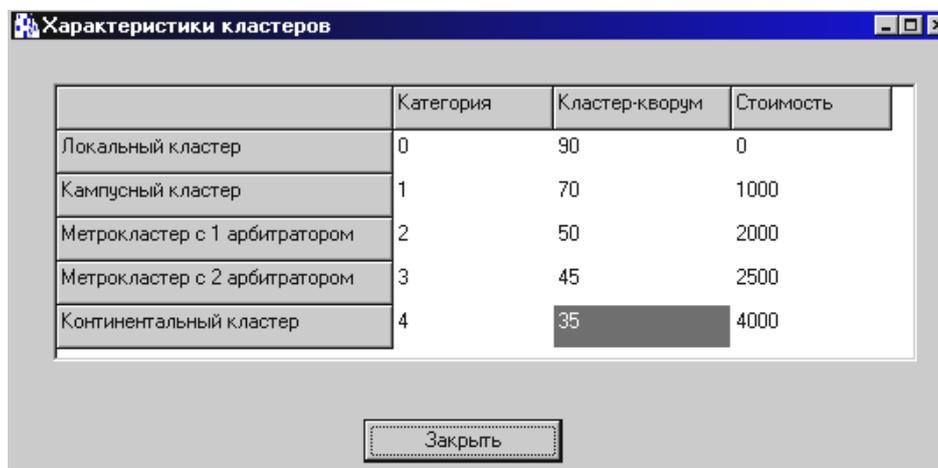
К аппаратному обеспечению нужно подходить из расчета, чем мощнее компьютер, тем быстрее будет работа системы. Рекомендуется использовать систему с процессором не ниже Pentium 200 МГц и оперативной памятью – 32 Mb.

**Процедура формирования оптимального плана развития кластерной инфраструктуры.** Алгоритм представлен на примере формирования плана развития системы из 5 кластеров, в течение 10 этапов на каждом из которых выделяются материальные средства в размере 4000.

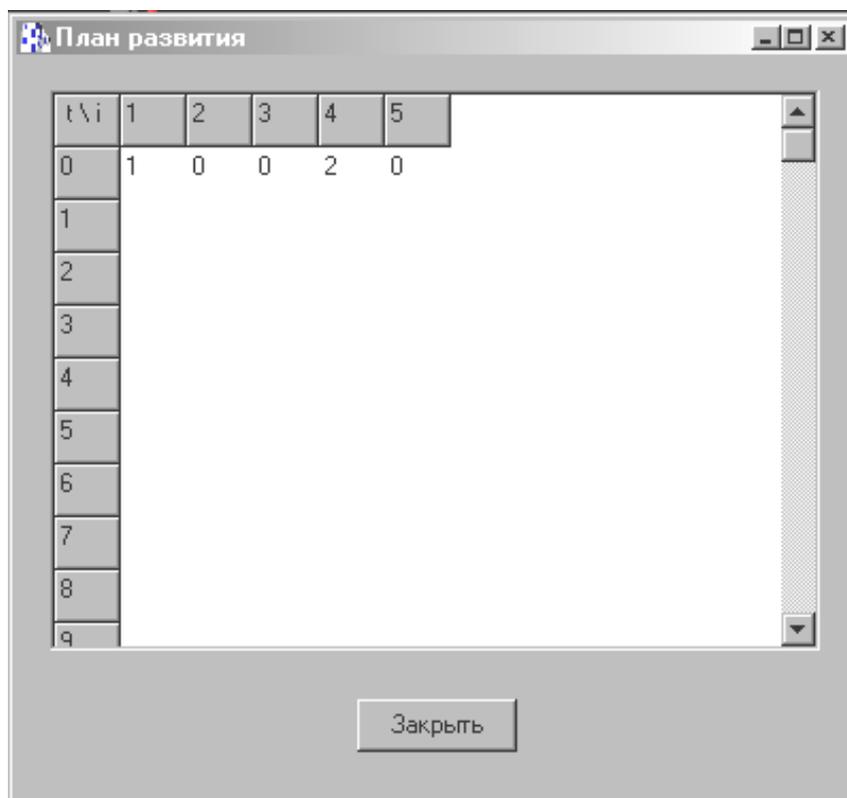
1. В появившемся при запуске программы окне изменим данные, стоящие по умолчанию на исходные данные выбранные нами.



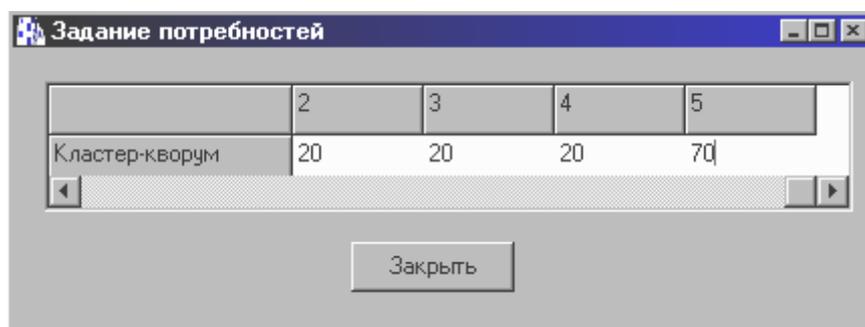
2. Вызовем окно характеристик кластеров и введём оценки кластер-кворума полученные на основе экспертного задания весов для узлов кластера: локальный – 90, кампусный – 70, метрокластер с одним арбитратором – 50, метрокластер с двумя арбитраторами – 45, континентальный – 35.



3. Через кнопку «План развития» для задания первоначальных категорий кластеров введем значения. Для примера: первый кластер – кампусный, четвертый – метрокластер с одним арбитратором, остальные – локальные.



4. Далее через кнопку «Задание потребностей» вызываем одноимённое окно. В этом окне заполняем оценки потребностей кластеров представленные в виде требуемых кластер-кворумов узлов нашей системы. 45 для первого кластера, 70 для пятого, остальным по 20.



5. По нажатию на кнопку «Планирование» программа формирует план развития заданной системы кластеров, о чем соответствует заполнение «прогрессбара». По его полному заполнению вновь через кнопку «План развития» мы можем просмотреть уже готовый план развития.

	1	2	3	4	5
0	1	0	0	2	0
1	1	0	0	3	0
2	2	1	0	3	0
3	3	1	0	3	0
4	3	2	1	3	0
5	3	3	1	3	0
6	3	3	2	3	1
7	3	3	3	3	1
8	3	3	3	3	2
9	3	3	3	3	3

Таким образом, мы получили конечный результат в виде рекомендательного плана развития кластерной системы.

**Моделирование структуры кластерной системы: Блок МОД-1.** Разработанный блок программного комплекса позволяет моделировать (в интерактивном режиме) структуру кластерной системы, представленной в виде взаимосвязанных центров обработки информации с изменяемым составом рабочих станций. Также в структуру системы могут быть включены платформы-арбитраторы – устройства отслеживающие работу системы и производящие реконфигурацию системы в случае различного рода аппаратных сбоев. Для суждения о состоянии системы используется характеристика целостности кластера – «кластер–кворум». В рассматриваемом ниже примере порог выхода из строя кластера по причине разрушения выбран в размере 50 % значения кластер–кворума.

При моделировании функционирования кластерной архитектуры предлагаемый программный продукт предоставляет широкие возможности по прогнозированию поведения системы при ее проектировании и исследовании конкретных кластеров. Удобный пользовательский интерфейс делает работу с программой более комфортной. В составе комплекса данное приложение «Блок МОД-1» сосредоточено в файле gro.exe.

На рис. 12 приведена главная форма приложения.

Меню «добавить» позволяет размещать на рабочем поле центры обработки информации и платформы с арбитражами. Количество рабочих станций в центрах обработки и количество арбитражей на платформах устанавливается с помощью пункта «настройка» (рис. 13).

При выборе пункта «разрушить» курсор принимает форму крестика, после этого можно указать рабочую станцию, которая должна выйти из строя. Пункт «разрушить» активен только при запущенном (рабочем) кластере.

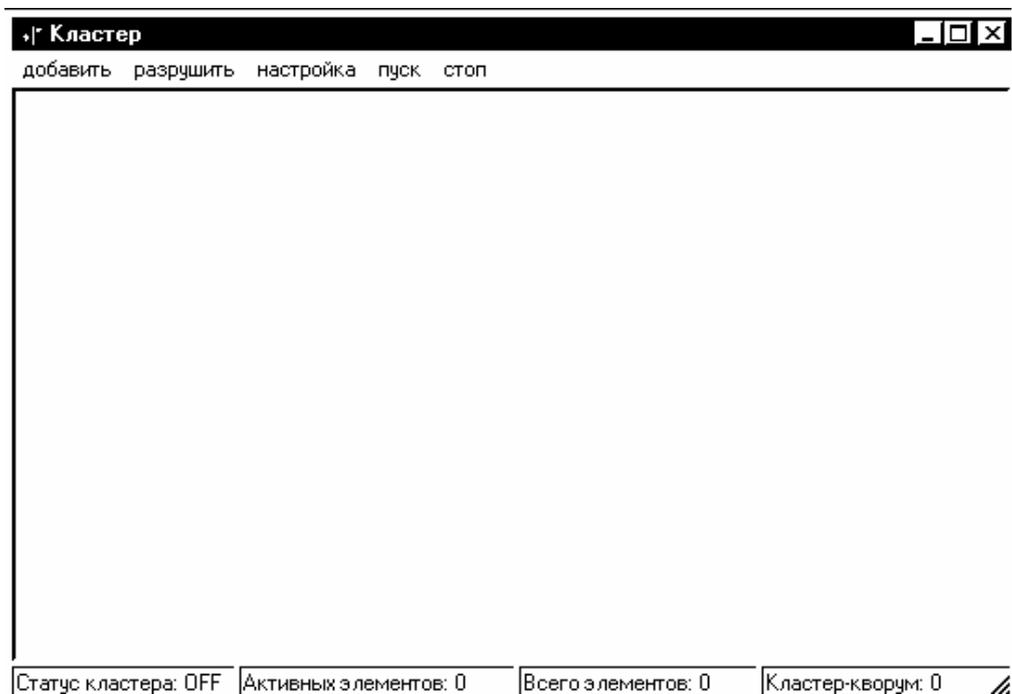


Рис. 12. Главная форма приложения «Блок МОД-1»

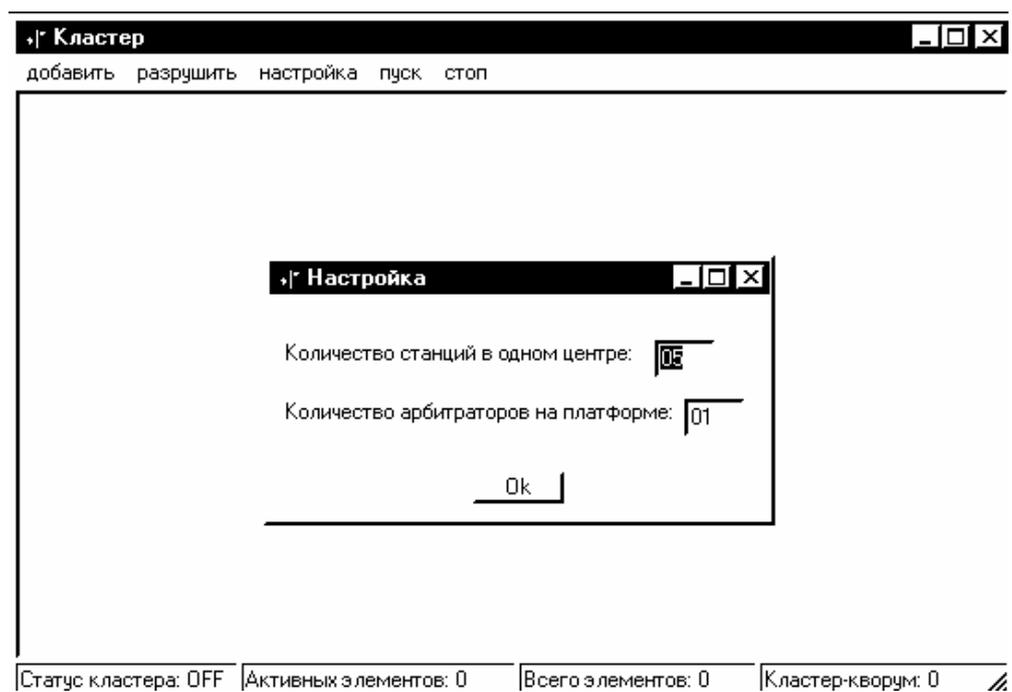


Рис. 13. Настройка рабочего поля

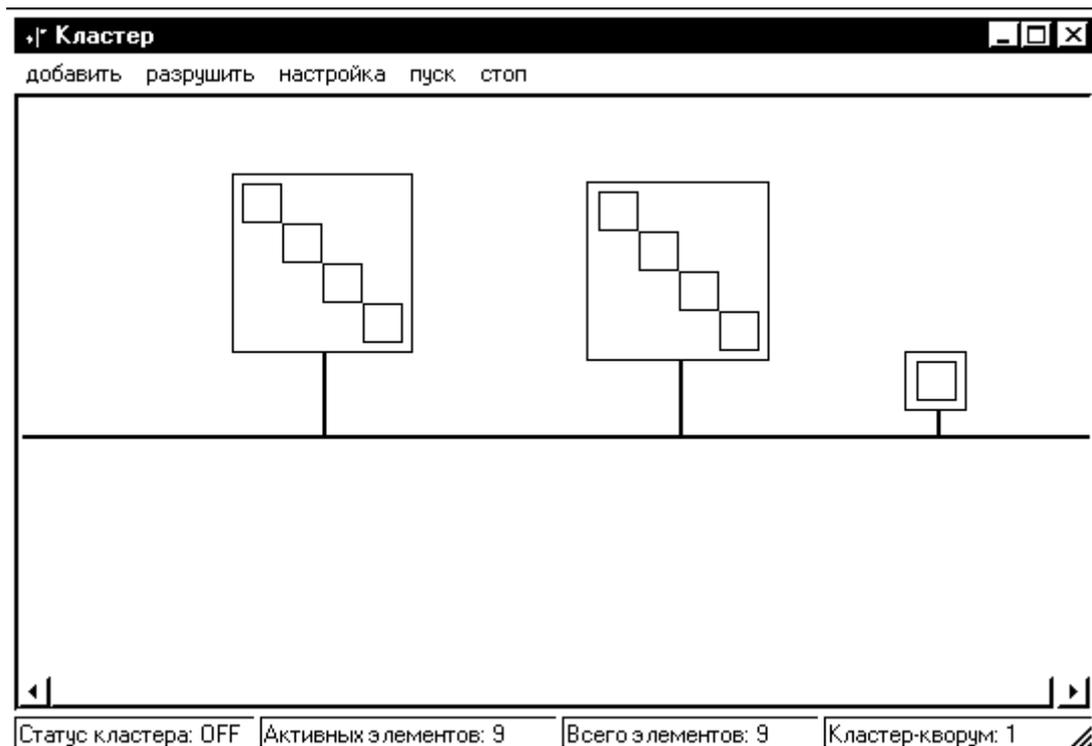


Рис. 14. Размещение компонентов кластера в рабочем поле

После размещения всех компонентов в рабочем поле (рис. 14) для активизации кластера следует нажать «пуск». В работающем режиме активные станции окрасятся в зеленый цвет. Неактивные станции всегда окрашены в черный цвет. Для останова кластера и внесения изменений следует нажать «стоп».

В строке статуса главной формы отображена текущая информация о состоянии кластера. Статус кластера информирует о работающем или остановившемся кластере. Количество активных элементов – это количество полностью работоспособных станций. Информация о достижении значения кластер-кворума 50 % (когда кластер останавливается) также представлена в строке статуса главной формы.

Модификация данного компонента системы поддержки «Блок МОД-2» использует графовую интерпретацию задачи (аналогично задаче планирования развития структуры) и применяется для определения структуры кластера – модуль Graf.exe и анализа состояния кластера в условиях выхода из строя узлов – модуль Cluster.exe. При экспорте кластера в формате программы обработчика структура кластера сохраняется в файл, однако перед экспортом необходимо назначить активным один из центров обработки информации, так как при экспорте активный узел в графе будет принят стартовым узлом кластера.

После запуска модуля можно увидеть следующие закладки на форме: «Структура кластера». Пользователю предоставляется возможность загрузить структуру кластера в формате, который создается предыдущей

программой. После загрузки структура кластера отображается в виде матрицы смежности и перечня элементов, которые присутствуют в кластере.

Следующая закладка: «Обработка кластера». В списке (если структура кластера загружена) отображаются элементы кластера, с указанием состояния каждого элемента: «работает» – «не работает». Также в списке отображается текущий активный центр обработки информации: «активный». В заголовке списка отображается текущее состояние кластера: «работает», «кластер остановлен – возможен ручной перезапуск», «полная остановка кластера – функционирование без замены элементов не возможно». Элементы, отказ которых произойдет на данном шаге, указываются в строке «элементы вышедшие из строя на данном шаге». Перечень элементов указывается в виде списка номеров.

После того, как указаны все элементы, можно произвести перерасчет состояния кластера (кнопка «Выполнить обработку»). Производится анализ структуры кластера с учетом вышедших из строя элементов. В случае выхода из строя центра, система попытается провести реконфигурацию кластера, если будет возможность перевести обработку на другой центр, то этот центр станет активным.

**Выводы.** Формирование критичных по надежности систем управления предъявляет высокие требования по надежности, как к техническим, так и программно-информационным средствам. Существует ряд критичных областей науки и промышленности, где невыполнение этого требования и, как следствие, сбой работы системы управления могут повлечь за собой значительные экономические потери в рамках, как предприятия, так и целого региона. Поэтому одной из основных задач разработчиков программно-информационного обеспечения становится создание таких алгоритмов или методов разработки, которые обеспечивали бы устойчивость системы к программным и аппаратным сбоям. В свою очередь, исследования надежности функционирования систем управления показали, что качество их работы напрямую зависит от надежности и безотказности программно-информационной составляющей.

Одним из подходов к созданию отказоустойчивых систем управления является методология избыточности. Мультиверсионное отказоустойчивое проектирование позволяет добиться оптимальной избыточности программных и информационных компонент, призванной предупредить случайные сбои. При этом работа системы управления застрахована также и от сбоев, вызванных ошибками, сгенерированными еще во время проектирования и разработки программно-информационного обеспечения. На этапе проектирования критичных по надежности систем управления, а также при его развитии и модификации основное внимание направлено на разработку спецификаций, что позволяет привлекать к разработке мультиверсионных компонент непосредственно специалистов по управлению. Использование систем поддержки принятия решений при мультиверсионном проектировании

позволяет уделять основное внимание качеству требований на этапе формирования надежного программно-информационного обеспечения.

На сегодняшний день для обеспечения надежности информационно-программного обеспечения систем управления предложено множество подходов, включая организационные методы разработки, различные технологии и технологические программные средства. Однако отсутствие общепризнанных критериев надежности не позволяет ответить на вопрос, насколько надежнее становится система при соблюдении предлагаемых процедур и технологий и в какой степени оправданы затраты. Таким образом, приоритет задачи оценки надежности должен быть не ниже приоритета задачи ее обеспечения. Рассмотренные в монографии методы оценки и повышения надежности информационно-программного обеспечения критичных по надежности систем управления, включая кластеризацию для обеспечения катастрофоустойчивости систем управления, имеют важное теоретическое значение и обладают большим потенциалом практического применения, как в науке, так и промышленности.

### **Библиографические ссылки**

1. Мамиконов А. Г. Проектирование АСУ. М. : Высш. шк., 1987. 304 с.
2. Антамошкин А. Н. Регулярная оптимизация псевдодобулевых функций. Красноярск : Изд-во Краснояр. ун-та, 1989. 160 с.
3. Ашимов А. А., Мамиконов А. Г., Кульба В. В. Оптимальные модульные системы обработки данных. Алма-Ата: Наука, 1981. 186 с.
4. Богатырев В. А. К повышению надежности вычислительных систем на основе динамического распределения функций // Изв. вузов. Приборостроение. 1981.
5. Вальков В. М., Никаноров Р. А. Вопросы стандартизации математического обеспечения АСУ ТП// Электронная промышленность. 1985. Вып. 12. С. 27–29.
6. Саркисян А. А. Повышение качества программ на основе автоматизированных методов. М. : Радио и связь, 1991. 160 с.
7. Системный анализ: Проектирование, оптимизация и приложения : в 2 т. / под общ. ред. А. Н. Антамошкина ; Сиб. аэрокосмич. акад. Красноярск, 1996. 206 с.
8. Oracle University. Enterprise DBA Part 1: Performance and tuning. Vol. 1: Students Guide, Production 1.0. 2000.
9. Антамошкин А. Н. Оптимизация функционалов с булевыми переменными. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1987. 104 с.
10. Евстигнеев В. Ф., Привалов А. С., Ступина А. А. Мультиверсионные модели формирования многофункциональных информационно-программных комплексов систем эксплуатации искусственных сооружений // Ресурсосберегающие технологии, перспективное оборудование и аспекты сис-

темы управления Красноярской железной дорогой : сб. ст. и материалов по 100-летию КЖД / НИИ СУВПТ и НИИ ИПУ. Красноярск, 1999. С. 283–295.

11. Липаев В. В., Серебровский Л. А. Технология проектирования комплексов программ АСУ. М. : Радио и связь, 1983. 264 с.

12. McFarlan F. W. Portfolio approach to information systems // Harvard Business Rev. 59. P. 142–150.

13. Гудман С., Хидетниemi С. Введение в разработку и анализ алгоритмов : пер. с англ. М. : Мир, 1981. 366 с.

14. Давыденко О. В., Ковалев И. В. Оценка надежности программного обеспечения бортового комплекса управления // Вестн. КГТУ : сб. науч. тр. / под ред. Б. П. Соустина. Вып. 5. Красноярск, 1996. С. 119–121.

15. Дилон Б., Сингх И. Инженерные методы обеспечения надежности систем. М. : Мир, 1984. 318 с.

16. Липаев В. В., Серебровский Л. А. Технология проектирования комплексов программ АСУ. М. : Радио и связь, 1983. 264 с.

17. Губанов В. А. и др. Введение в системный анализ // под ред. Л. А. Петросяна. Л. : ЛГУ, 1988. 232 с.

18. Silayeva T., Grosspietsch K.-E. An Innovative Method for Program Reliability Evaluation // Euromicro '95. Como (Italy), 1995.

19. Толковый словарь по вычислительным системам / под ред. В. Иллигуорта и др. / пер с англ. М. : Машиностроение, 1991. 560 с.

20. Хорошевский В. Г. Инженерный анализ функционирования вычислительных машин и систем. М. : Радио и связь, 1987. 256 с.

21. Чжу У. У., Лян Ц. К. Копирование и размещение программных модулей в системе распределенной обработки в реальном времени // ТИИЭР, 1987. Т. 75. № 5. С. 23–44.

22. Юдин Д. Б., Горяшко А. П., Немировский А. С. Математические методы оптимизации устройств и алгоритмов АСУ. М. : Радио и связь, 1982. 288 с.

23. Майерс Г. Надежность программного обеспечения : пер. с англ. / под ред. В. Ш. Кауфмана. М. : Мир, 1980. 360 с.

24. Мамиконов А. Г., Кульба В. В. Синтез оптимальных модульных систем обработки данных. М. : Наука, 1986.

25. Воеводин В. В. Математические модели и методы в параллельных процессах // М. : Наука, 1986. 328 с.

26. Мамиконов А. Г., Кульба В. В., Косяченко С. А. Типизация разработки модульных систем обработки данных. М. : Наука, 1989. 165 с.

27. Мамиконов А. Г., Кульба В. В. Синтез оптимальных модульных систем обработки данных. М. : Наука, 1986.

28. Мамиконов А. Г. Проектирование АСУ. М. : Высш. шк., 1987. 304 с.

29. Орлов С. А. Технологии разработки программного обеспечения. СПб. : Питер, 2002.

30. Johnson D. M. The systems engineer and the software crisis / ACM SIGSOFT: Software Engineering Notes. Vol. 21, no. 2, March 1996. P. 64–73.

31. Knight C. J., Levenson N. G. An experimental evaluation of the assumption of independence in Multiversion programming // IEEE Trans. Software Engineering. Vol. SE-12. 1986. P. 96–109.
32. Kovalev I. Software engineering of spacecraft control technological cycles // Modelling, Measurement and Control, B. Vol. 56. № 3. AMSE PRESS, 1994. P. 45–49.
33. Zahedi F., Ashrafi N. Software reliability allocation based on structure, utility, price, and cost // IEEE Trans. on Software Engineering, April, 1991. Vol. 17. No. 4. P. 345–356.
34. Oracle University. Enterprize DBA Part 2: Perfomance and tuning. Vol. 2: Students Guide, Production 1.0. 2000.
35. Антамошкин О. А., Зинченко М. А., Комбинированный метод формирования системы управления космическим аппаратом // Системы управления и информационные технологии. 2009. № 4.1. С. 114.
36. Антамошкин О. А., Нургалева Ю. А., Усачев А. В. Модели модульной декомпозиции программного обеспечения технологических циклов управления // Вестник СибГАУ. 2009. № 3. С. 66–69.
37. Кукарцев В. В., Шеенок Д. А. Оценка затрат на модернизацию программного обеспечения критических по надежности систем // Вестник СибГАУ. 2012. № 5. С. 62–65.
38. Прогнозирование стоимости разработки систем с программной избыточностью // Известия ВолгГТУ. 2013. Т. 17. № 14(117). С. 101–105.

### References

1. Mamikonov A. G. *Proektirovanie ASU* [ACS Design]. M. : Vyssh. Shk., 1987, 304 p.
2. Antamoshkin A. N. *Regulyarnaya optimizaciya psevdobulevyx funkcij* [Regular optimization of pseudo-functions]. Krasnoyarsk : Izd-vo Krasnoyar. un-ta, 1989. 160 p.
3. Ashimov A. A., Mamikonov A. G., Kulba V. V. *Optimalnye modulnye sistemy obrabotki dannyx* [Optimal modular data processing system]. Alma-Ata : Nauka, 1981. 186 p.
4. Bogatyrev V. A. *K povysheniyu nadezhnosti vychisli telnix sistem na osnove dinamicheskogo raspredeleniya funkcij* [To improve the reliability of computational systems based on dynamic allocation of functions]. Izv. vuzov. priborostroenie. 1981.
5. Valkov V. M., Nikanorov R. A. *Voprosy standartizacii matematicheskogo obespecheniya asu tp. elektronnaya promyshlennost* [Standardization of software APCS]. 1985. Vyp. 12. P. 27–29.
6. Sarkisyan A. A. *Povyshenie kachestva programm na osnove avtomatizirovannyx metodov* [Improving the quality of the programs on the basis of automated methods]. M. : Radio i svyaz, 1991. 160 p.
7. *Sistemnyj analiz: Proektirovanie, optimizaciya i prilozheniya* [System analysis, design, optimization and applications] : v 2 T. Pod obshh. red. Antamoshkina A. N. Krasnoyarsk : SAA, 1996. 206 p.

8. Oracle University. Enterprize DBA Part 1: Perfomance and tuning. Vol. 1: Students Guide, Production 1.0. 2000.
9. Antamoshkin A. N. *Optimizaciya funkcionalov s bulevnymi peremennymi* [Optimization of functionals with Boolean variables]. Tomsk : Izd-vo Tom. un-ta, 1987. 104 p.
10. Evstigneev V. F., Privalov A. S., Stupina A. A. *Multiversionnyye modeli formirovaniya mnogofunkcionalnyx informacionno-programmnyx kompleksov sistem ekspluatatsii iskusstvennyx sooruzhenij* [Multiversioning model forming multifunctional software complex systems operating artificial structures] // Sbornik statej i materialov po 100-letiyu KZHD “Resursosberegayushhie texnologii, perspektivnoe oborudovanie i aspekty sistemy upravleniya Krasnoyarskoj zheleznoj dorogoj”, NII SUVPT i NII IPU: Krasnoyarsk, 1999, p. 283–295.
11. Lipaev V. V., Serebrovskij L. A. *Texnologiya proektirovaniya kompleksov programm ASU* [Technology design software complexes ACS]. M. : Radio i svyaz, 1983. 264 p.
12. McFarlan F. W. Portfolio approach to information systems // Harvard Business Rev. 59. P. 142–150.
13. Gudman S., Xidetniemi S. *Vvedenie v razrabotku i analiz algoritmov* [Introduction to the design and analysis of algorithms]: per. s angl. M. : Mir, 1981. 366 p.
14. Davydenko O. V., Kovalev I. V. *Ocenka nadezhnosti programmogo obespecheniya bortovogo kompleksa upravleniya* [Evaluation of software reliability onboard control complex] // Vestn. KGTY : Sb. nauch. tr. / pod red. B. P. Soustina. Vyp. 5. Krasnoyarsk, 1996. P. 119–121.
15. Dilon B., Singx I. *Inzhenernyye metody obespecheniya nadezhnosti sistem* [Engineering methods to ensure system reliability]. M. : Mir, 1984. 318 p.
16. Lipaev V. V., Serebrovskij L. A. *Texnologiya proektirovaniya kompleksov programm ASU* [Technology design software complexes ACS]. M. : Radio i svyaz, 1983. 264 p.
17. Gubanov V. A. i dr. *Vvedenie v sistemnyj analiz* [Introduction to systems analysis] / pod red. L. A. Petrosyana. L. : LGU, 1988. 232 p.
18. Silayeva T., Grosspietsch K.-E. An Innovative Method for Program Reliability Evaluation // Euromicro '95. Como (Italy), 1995.
19. *Tolkovyj slovar po vychislitelnyx sistemam* [Dictionary of Computing Systems] / pod red. V. Illiguorta i dr. : per s angl. M. : Mashinostroenie, 1991. 560 p.
20. Xoroshevskij V. G. *Inzhenernyj analiz funkcionirovaniya vychislitelnyx mashin i sistem* [Engineering analysis of the functioning of computers and systems]. M. : Radio i svyaz, 1987. 256 p.
21. Chzhu U. U., Lyan C. K. *Kopirovanie i razmeshhenie programmnyx modulej v sisteme raspredelennoj obrabotki v realnom vremeni* [Copying and placement of software modules in a system of distributed real-time processing] // TIHER, 1987. T. 75. № 5. P. 23–44.
22. Yudin D. B., Goryashko A. P., Nemirovskij A. S. *Matematicheskie*

*metody optimizacii ustrojstv i algoritmov ASU* [Mathematical methods of optimization algorithms and automated devices] // M. : Radio i svyaz, 1982. 288 p.

23. Majers G. *Nadezhnost programmogo obespecheniya* [Software Reliability] / Per. s angl. / Pod red. V. Sh. Kaufmana. M. : Mir, 1980. 360 p.

24. Mamikonov A. G., Kulba V. V. *Sintez optimalnyx modulnyx sistem obrabotki dannyx* [Synthesis of optimal modular data processing systems]. M. : Nauka, 1986.

25. Voevodin V. V. *Matematicheskie modeli i metody v parallelnyx processax* [Mathematical models and methods in parallel processes] // M. : Nauka, 1986. 328 p.

26. Mamikonov A. G., Kulba V. V., Kosyachenko S. A. *Tipizaciya razrabotki modulnyx sistem obrabotki dannyx* [Typing modular design of data processing systems]. M. : Nauka, 1989. 165 p.

27. Mamikonov A. G., Kulba V. V. *Sintez optimalnyx modulnyx sistem obrabotki dannyx* [Synthesis of optimal modular data processing systems]. M. : Nauka, 1986.

28. Mamikonov A. G. *Proektirovanie ASU* [ACS Design]. M. : Vyssh. shk., 1987. 304 p.

29. Orlov S. A. *Texnologii razrabotki programmogo obespecheniya* [Software Engineering]. SPb. : Piter, 2002.

30. Johnson D. M. The systems engineer and the software crisis / ACM SIGSOFT: Software Engineering Notes, Vol. 21, no. 2, March 1996. P. 64–73.

31. Knight C. J., Levenson N. G. An experimental evaluation of the assumption of independence in Multiversion programming // IEEE Trans. Software Engineering. Vol. SE-12. 1986. P. 96–109.

32. Kovalev I. Software engineering of spacecraft control technological cycles // Modelling, Measurement and Control, B. Vol. 56. № 3. AMSE PRESS, 1994. P. 45–49.

33. Zahedi F., Ashrafi N. Software reliability allocation based on structure, utility, price, and cost // IEEE Trans. on Software Engineering, April 1991. Vol. 17. No. 4. P. 345–356.

34. Oracle University. Enterprize DBA Part 2: Perfomance and tuning. Vol. 2: Students Guide, Production 1.0. 2000.

35. Combined method of forming control system spacecraft//CSIT 2009. № 4.1(38). P. 114–119.

36. Modular decomposition models of technological control cycles software // Vestn. SibSAU 2009. № 3. P. 66–69.

37. Cost estimation for modernization of reliability systems software // Vestn. SibSAU 2012. № 5. P. 62–65.

38. Cost forecasting the development of systems with software redundancy // News VolgSTU. 2013. Vol. 17. № 14(117). P. 101–105.

## РЕШЕНИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

С. И. Сенашов, Е. В. Филюшина

Сибирский государственный аэрокосмический университет  
имени академика М. Ф. Решетнева,  
Российская Федерация, 660014, г. Красноярск,  
просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31.  
E-mail: sen@sibsau.ru, filyushina@sibsau.ru

*Решение упруго-пластических задач одна из сложнейших и актуальных проблем механики деформируемого твердого тела. Традиционно эти задачи решаются либо методами ТФКП, вариационного исчисления или полубратными методами. К сожалению, все эти методы могут быть применены лишь к ограниченному числу задач. В работе используется техника законов сохранения. Это позволяет построить аналитические формулы для нахождения упруго-пластической границы для широкого класса задач. В результате удалось построить упруго-пластические границы для скручиваемых прямолинейных стержней, сечение которых ограничено кусочно гладким контуром; для изгибаемых консолей постоянного сечения, а также для антиплоских задач. Разработанная методика позволила написать компьютерные программы для построения упруго – пластических границ для скручиваемых прямолинейных стержней. В предлагаемой работе построена упруго-пластическая граница, возникающая при кручении прямолинейного бруса произвольного сечения, которое ограничено кусочно-гладким контуром, а также упруго-пластическая границы в задачах об изгибе консоли и антиплоской деформации. План статьи следующий: в первом параграфе рассмотрены основные уравнения упругости и краевые задачи, в п. 2 основные уравнения теории идеальной пластичности Мизеса, в п. 3 сформулированы условия на границах упругих и пластических областей, в п. 4 рассмотрено кручение призматических упругих стержней, в п. 5 описан упругий изгиб брусьев, в п. 6 плоская задача теории упругости, в п. 7 – антиплоская задача теории упругости, в п. 8 построены законы сохранения для уравнений упругости, в п. 9 – законы сохранения двумерных уравнений пластичности, в п. 10 – найдена упруго-пластическая граница в скручиваемом прямолинейном стержне, в п. 11 – упруго-пластическая граница в изгибаемой консоли, в п. 12 – предложена методика для построения упруго-пластических границ для областей больших размеров. В заключительном п. 13 построены упруго-пластические границы для стержней различных прокатных профилей.*

*Ключевые слова: законы сохранения, упруго-пластическая граница, точное решение, упругость, пластичность, упруго-пластичность.*

## **SOLUTION OF ELASTIC-PLASTIC PROBLEMS WITH CONSERVATION LAWS**

S. I. Senashov, E. V. Filushina

Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev, 31, "Krasnoyarskiy Rabochiy" prosp., Krasnoyarsk, 660014, Russian Federation.

E-mail: sen@sibsau.ru, filyushina@sibsau.ru

*Solution of elastic-plastic problems is one of the most complex and urgent problems of solid mechanics. Traditionally, these problems are solved by the methods of complex analysis or calculus of variations or semi-inverse methods. Unfortunately, all of these methods can be applied only to a limited number of tasks. In this paper, we use a technique of conservation laws. This allows us to construct analytical formulas for finding the elastic-plastic boundary for a wide class of problems. As a result, we will construct the elastic-plastic boundaries: for twisted the rod straight, the cross section of which is limited piecewise smooth contour; for flexural consoles constant cross-section, as well as for anti-plane tasks. This technique allowed us to write a computer program for the construction of elastic-plastic borders for twisted the straight rods. In the present paper the elastic-plastic boundary arising torsional straight beam of arbitrary cross section, which is limited by a piecewise smooth contour, and the elastic-plastic boundary in the problems of the bending of the console and anti-plane deformation. Plan of the paper is as follows: in the first section the basic equations of elasticity and boundary value problems, in p. 2 basic equations of the theory of ideal plasticity von Mises, in p. 3 formulate conditions on the boundaries of the elastic and plastic domains, in p. 4 considered elastic torsion of prismatic bars, in p. 5 described elastic bending beams in p. 6 plane problem of elasticity theory, in p. 7 – anti plane problem of elasticity theory, in p. 8 constructed conservation laws for the equations of elasticity, in p. 9 – conservation laws of two-dimensional equations of plasticity, in p. 10 – found elastic-plastic boundary curl up in a straight rod, in p. 11 – elastic-plastic boundary in the bend, in the console, p. 12 – describes a method for the construction of elastic-plastic boundaries for large areas. In the final section p. 13 we demonstrated elastic-plastic boundary for rods rolled profiles.*

*Keywords: conservation laws, elastic-plastic boundary, exact solutions, elasticity, plasticity, elastic-plasticity.*

**Введение.** Решение упруго-пластических задач одна из сложнейших и актуальных проблем механики деформируемого твердого тела. Это связа-

но с тем, что упруго-пластическая граница заранее не известна и подлежит определению в процессе решения задачи. Решением упруго-пластических задач занимались многие известные механики. Хороший обзорный материал можно найти в книгах Б. Д. Аннина и Г. П. Черепанова [1], Л. А. Галина [2; 10]. Общего подхода для решения таких задач до настоящего времени не выработано. Имеются лишь отдельные решения для разных частных случаев. К классическим результатам здесь следует отнести точные решения задачи об упруго-пластическом кручении стержня овального сечения, построенное В. В. Соколовским, а также решение Л. А. Галина о растяжении плоскости с круговым отверстием.

Интересный теоретический результат получен Б. Д. Анниным [1]. Он доказал, что задача об упруго-пластическом кручении стержня овального сечения решение существует и единственно.

Для решения упруго-пластической задачи применялись методы ТФКП, вариационные методы и полуобратные методы. В этой работе для построения упруго-пластической границы использованы законы сохранения. Законы сохранения были использованы в работах [4; 5; 11] для решения задач идеальной пластичности в двумерном случае. Они позволили получить аналитические решения задач Коши и Римана. В последующих работах, одного из соавторов, законы сохранения были использованы для решения некоторых упруго-пластических задач [6; 16]. Данная методика позволила написать компьютерные программы для построения упруго-пластических границ для скручиваемых прямолинейных стержней. На эти программы получены свидетельства об их государственной регистрации [8; 9].

В предлагаемой работе построены упруго-пластические границы в задаче о кручении прямолинейного бруса произвольного сечения, которое ограничено кусочно-гладким контуром, а также в задачах об изгибе консоли и антиплоской деформации. Для удобства статья разбита на параграфы: в первом параграфе рассмотрены основные уравнения упругости и краевые задачи, в п. 2 основные уравнения теории пластичности Мизеса, в п. 3 сформулированы условия на границах упругих и пластических областей, в п. 4 рассмотрено кручение призматических упругих стержней, в п. 5 описан упругий изгиб брусьев, плоская задача теории упругости, в п. 7 – антиплоская задача теории упругости, в п. 8 законы сохранения для уравнений упругости, в п. 9 – законы сохранения двумерных уравнений пластичности, в п. 10 – строится упруго-пластическая граница в скручиваемом прямолинейном стержне, в п. 11 – построена упруго-пластическая граница в изгибаемой консоли, в п. 12 – предложена методика для построения упруго-пластической границы для областей больших размеров. В последнем параграфе с помощью программ [8; 9] построены упруго-пластические границы для различных прокатных профилей.

## 1. Основные уравнения упругости и краевые задачи

Рассмотрим стационарные уравнения линейной упругости в изотропном случае.

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  – компоненты тензора напряжений,  $X, Y, Z$  – компоненты внешней силы, отнесенной к единице объема. Компоненты тензора напряжений связаны с помощью закона Гука с компонентами тензора деформаций.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_x, \quad \sigma_y = \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_y, \quad \sigma_z = \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_z, \\ \tau_{xy} &= 2\mu \varepsilon_{xy}, \quad \tau_{xz} = 2\mu \varepsilon_{xz}, \quad \tau_{yz} = 2\mu \varepsilon_{yz},\end{aligned}\tag{1.2}$$

где  $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ ;  $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ;  $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ ;  $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ ;  $2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ ;  $2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$ ;  $2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$ , где  $\lambda, \mu$  – постоянные Ламе;  $u, v, w$  – компоненты вектора деформации;  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$  – компоненты тензора деформации.

С учетом (1.2) уравнения теории упругости можно записать в перемещениях:

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \mu \Delta u &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \mu \Delta v &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \mu \Delta w &= 0,\end{aligned}\tag{1.3}$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа.

В силу соотношений (1.2) компоненты тензора напряжений, помимо уравнений равновесия (1.1), удовлетворяют еще и уравнением совместно-

сти. Здесь условия совместности написаны в случае, когда внешние силы отсутствуют.

$$\begin{aligned}
 (1+\nu)\Delta\sigma_x + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} &= 0, \quad (1+\nu)\Delta\sigma_y + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0, \\
 (1+\nu)\Delta\sigma_z + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} &= 0, \quad (1+\nu)\Delta\tau_{xy} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} = 0, \\
 (1+\nu)\Delta\tau_{xz} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z} &= 0, \quad (1+\nu)\Delta\tau_{yz} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} = 0,
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

где  $\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ ,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Задачи для уравнений упругости ставятся либо в перемещениях, тогда надо решать уравнения (1.3), либо в напряжениях, тогда надо решать уравнения (1.1)–(1.3).

Если задача решается в напряжениях, то к уравнениям (1.1), (1.3) необходимо добавить граничные условия.

$$\begin{aligned}
 \bar{X} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\
 \bar{Y} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\
 \bar{Z} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n,
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

где  $l, m, n$  – направляющие косинусы внешней нормали к граничной поверхности в рассматриваемой точке,  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  – компоненты вектора поверхностных сил, действующих на единицу площади.

Если задача решается в перемещениях, то на границе  $S$  задаются перемещения

$$u|_S = \bar{u}, \quad v|_S = \bar{v}, \quad w|_S = \bar{w}, \tag{1.6}$$

где  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  некоторые функции определенные на  $S$ .

*Замечание.* В теории упругости рассматриваются и иные задачи, но в статье мы их касаться не будем, поэтому о них здесь не упоминаем.

## 2. Основные уравнения теории пластичности Мизеса

Для стационарных уравнений теории пластичности Мизеса необходимо к уравнениям равновесия (1.1) добавить закон пластичности Мизеса, который имеет вид

$$\left(\sigma_x - \frac{1}{3}\theta\right)^2 + \left(\sigma_y - \frac{1}{3}\theta\right)^2 + \left(\sigma_z - \frac{1}{3}\theta\right)^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xz}^2 + 2\tau_{yz}^2 = 2k^2, \tag{2.1}$$

где  $k$  – предел текучести при чистом сдвиге.

В случае плоской деформации закон пластичности (2.1) можно привести к виду

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2, \quad (2.2)$$

В пластической области, компоненты девизатора тензора деформации связаны с компонентами тензора скоростей деформации соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_x - \frac{1}{3}\theta = S_x = \Lambda e_x, \quad \sigma_y - \frac{1}{3}\theta = S_y = \Lambda e_y, \quad \sigma_z - \frac{1}{3}\theta = S_z = \Lambda e_z, \\ \tau_{xy} = \Lambda e_{xy}, \quad \tau_{yz} = \Lambda e_{yz}, \quad \tau_{xz} = \Lambda e_{xz}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\Lambda$  – неотрицательная функция, определяемая из соотношения (2.1).

$$\begin{aligned} e_x = \frac{\partial u^1}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial u^2}{\partial y}, \quad e_z = \frac{\partial u^3}{\partial z}, \quad 2e_{xy} = \frac{\partial u^1}{\partial y} + \frac{\partial u^2}{\partial x}, \\ 2e_{xz} = \frac{\partial u^1}{\partial z} + \frac{\partial u^3}{\partial x}, \quad 2e_{yz} = \frac{\partial u^2}{\partial z} + \frac{\partial u^3}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $u^1, u^2, u^3$  – компоненты вектора скорости.

### 3. Условия на границах упругих и пластических областей

Определение границы между упругой и пластической областями одна из сложнейших задач механики деформируемого твердого тела. Эта граница заранее не известна и определяется в процессе решения упруго-пластической задачи. В ряде случаев ее форму можно угадать из общих соображений.

Предполагается, что состояние упругости непрерывно переходит в состояние текучести, в этом случае вблизи упруго-пластической границы по обе ее стороны выполняется закон Гука. Это приводит к тому, что все компоненты тензора напряжений и тензора деформаций непрерывны на упруго-пластической границе.

### 4. Кручение призматических упругих стержней

Рассмотрим упругий призматический стержень с поперечным сечением произвольной формы. Боковая поверхность свободна от напряжений, а к торцам приложены силы, эквивалентны крутящему моменту  $M$ .

Пусть начало координат находится в некоторой произвольной точке торцевого сечения, а ось  $z$  параллельна образующей стержня. Граничные условия (1.3.) примут вид

$$\begin{aligned}
\sigma_x l + \tau_{xy} m &= 0, \\
\tau_{xy} l + \sigma_y m &= 0, \\
\tau_{xz} l + \tau_{yz} m &= 0,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

а на торцах стержня ( $z = 0, z = l$ )

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} \tau_{xz} dx dy &= 0, \quad \iint_{\Omega} \tau_{yz} dx dy = 0, \\
\iint_{\Omega} \sigma_z dx dy &= 0, \quad \iint_{\Omega} x \sigma_z dx dy = 0,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\iint_{\Omega} y \sigma_z dx dy = 0,$$

$$\iint_{\Omega} (x \tau_{yz} - y \tau_{xz}) dx dy = M, \tag{4.3}$$

где  $\Omega$  – площадь поперечного сечения. Как обычно принято в теории кручения считаем, что

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \tag{4.4}$$

а остальные компоненты тензора напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия (1.1), которые при предположениях (4.4) примут вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Уравнения совместности (1.4) запишутся в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = 0, \\
(1 + \nu) \Delta \tau_{xz} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} &= 0, \\
(1 + \nu) \Delta \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Из уравнений (4.6) следует, что

$$\sigma_z = Azy + Bzx + Dx + Ey + Fz + H, \tag{4.7}$$

где  $A, B, D, E, F, H$  – произвольные постоянные.

Подставляя (4.7) в соотношении (4.3) получаем, что  $\sigma_z = 0$  во всех поперечных сечениях стержня. Поэтому уравнения (4.5), (4.6) сведутся к следующим:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad (4.8)$$

$$\Delta \tau_{xz} = 0, \quad \Delta \tau_{yz} = 0. \quad (4.9)$$

Преобразуем уравнения (4.8)–(4.9). Для этого дифференцируем уравнение (4.8) по  $x$  и вычитаем из него первое уравнения (4.9).

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) = 0. \quad (4.10)$$

Теперь дифференцируем уравнение (4.8) по  $y$  и вычитаем из него второе уравнение (4.9).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) = 0. \quad (4.11)$$

Из уравнений (4.9) и (4.10) следует

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = C, \quad (4.12)$$

где  $C$  – произвольная постоянная.

Система (4.8)–(4.9) может быть заменена уравнениями (4.8) и (4.12).

Поскольку из (1.2) следует

$$\tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (4.13)$$

Тогда

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (4.14)$$

Известно, что  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$  – есть третья компонента вектора

$rot(u, v, w)$ . Имеем

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = -2\mu \frac{\partial \omega_z}{\partial z}, \quad (4.15)$$

где  $\frac{\partial \omega_z}{\partial z}$  – угол закручивания на единицу длины волокна стержня. Этот угол называется круткой и обозначается  $\theta$ . Из (4.15) и (4.12) получаем

$$C = -2\mu \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = -2\mu\theta. \quad (4.16)$$

Окончательно получаем, что задача кручения упругого призматического стержня сводится к интегрированию уравнений.

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = -2\mu\theta, \quad (4.17)$$

С граничными условиями

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0. \quad (4.18)$$

Поскольку уравнения (4.17) сводятся к уравнению Пуассона, то на этом основаны многочисленные примеры решения задачи о кручении упругих призматических стержней.

Этот же факт привел к аналогиям, которые позволяли свести задачу (4.17), (4.18) к другим механическим задачам, решение которых описывается этими же уравнениями. Перечислим некоторые: мембранная аналогия, несколько гидродинамических аналогий, электродинамические аналогии. Можно ввести понятия крутильной жесткости  $C = M / \theta$ .

Принято считать, что чем больше крутильная жесткость, тем лучше данный ей стержень сопротивляется кручению.

Было показано, что среди всех призматических стержней, имеющих одинаковую площадь поперечного сечения, наибольшую крутильную жесткость имеет стержень с круговым сечением.

Более того доказано, что из всех призматических стержней с многосвязным поперечным сечением с данной площадью и с данной общей площадью отверстий стержень с кольцеобразным сечением, ограниченный двумя концентрическими окружностями, имеет максимальную жесткость при кручении. Об этих и других задачах, возникающих в теории кручения упругих тел можно прочесть в [3].

Сен-Венаном был отмечен интересный факт: максимальное касательное напряжение, как правило, достигается на боковой поверхности стержня в точках наиболее близких к центру тяжести поперечного сечения.

## 5. Упругий изгиб брусев

Рассмотрим призматический стержень, изгибаемый в одной из главных плоскостей двумя равными и противоположными моментами  $M$  (рис. 1).

Начало координат возьмем в центре тяжести поперечного сечения, а плоскость  $xz$  – в главной плоскости изгиба. Получаем следующее элементарное решение уравнений (1.1), при отсутствии массовых сил

$$\sigma_z = \frac{Ex}{R}, \quad \sigma_y = \sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad (5.1)$$

где  $R$  – радиус кривизны стержня после изгиба;  $E$  – модуль упругости при растяжении и сжатии.

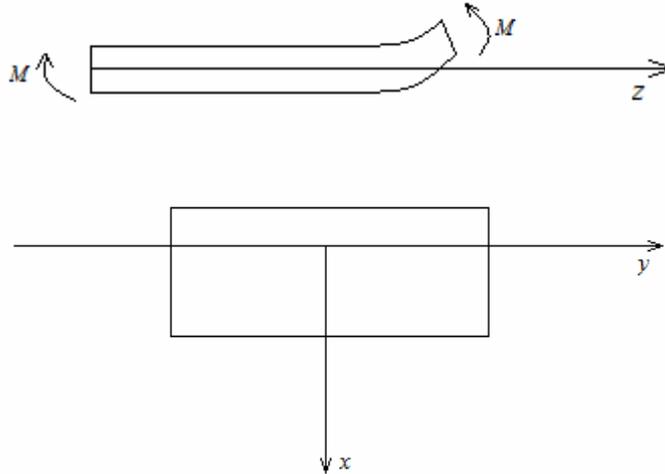


Рис. 1. Изгиб бруса

Рассмотрим теперь более общий случай изгиба консоли постоянного поперечного сечения, которая находится под действием силы  $P$ , приложенной на конце и параллельной одной из главных осей поперечного сечения (рис. 2).

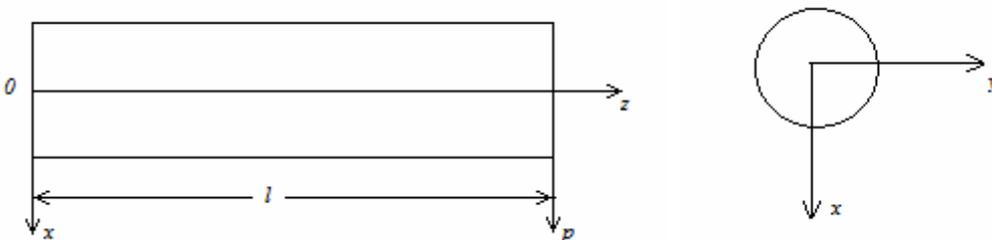


Рис. 2. Изгиб консоли

Предположим, что в случае консоли напряжения на некотором расстоянии  $z$  от заделанного конца распределяются так же, как в (5.1), а именно

$$\sigma_z = \frac{P(l-z)x}{l}. \quad (5.2)$$

Предположим, что в каждой точке поперечных сечений действуют касательные напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ , а остальные компоненты тензора напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  равны нулю.

При сделанных предположениях, в случае отсутствия объемных сил получаем из уравнений (1.1)

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{Px}{l}. \quad (5.3)$$

Из (5.3) следует, что касательные напряжения не зависят от  $z$  и для каждого поперечного сечения будут одинаковы.

Уравнения совместности сводятся к двум

$$\Delta \tau_{xz} = -\frac{P}{l(1+\nu)}, \quad \Delta \tau_{yz} = 0. \quad (5.4)$$

Аналогично выкладкам из предыдущего параграфа получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) &= \frac{P}{l(1+\nu)}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Из формул (5.5) получаем

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = -\frac{Py}{l(1+\nu)} + C, \quad (5.6)$$

где  $C$  – постоянная. Можно показать, см. например [3], что  $C = 0$ . Тогда уравнения изгиба консоли имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{Px}{l}, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = -\frac{Py}{l(1+\nu)}. \end{cases} \quad (5.6)$$

К этим уравнениям необходимо добавить граничное условие, которое имеет вид  $\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0$  на границе контура.

## 6. Плоская задача теории упругости

В этом параграфе выпишем уравнения плоской теории упругости в перемещениях и поставим для этих уравнений некоторые краевые задачи.

Для плоской задачи выполняются следующие условия

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0.$$

Тогда из (1.3) имеем

$$\begin{aligned} F_1 &= (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \\ F_2 &= (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Граничные условия (1.5) запишутся так

$$\begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{xy} m &= \left[ (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] l + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) m = \bar{X}, \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) l + \left[ (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] m = \bar{Y}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

## 7. Антиплоская задача теории упругости

Рассмотрим уравнения (1.1), (1.2) в случае, когда  $u = v = 0$ ,  $w = \omega(x, y)$ . Этот случай соответствует т.н. антиплоскому упругому состоянию.

Уравнения (1.1) сведется к

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0, \quad X = Y = 0,$$

а условия совместимости деформаций к соотношению

$$\partial_y \tau_{xz} - \partial_x \tau_{yz} = 0.$$

Пусть на упругое тело действует только его собственный вес, тогда, если ось  $oz$  направлена вверх, получаем  $z = -\rho g$ , где  $\rho$  – плотность, которая предполагается постоянной.

Окончательно получаем уравнения, описывающие упругое состояние в условиях антиплоской деформации

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \rho g &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xz} - \frac{\partial}{\partial x} \tau_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

## 8. Законы сохранения для уравнений упругости

Законы сохранения – фундаментальные законы природы были сформулированы к началу XX века. Понятие законов сохранения для дифференциальных уравнений появилось позднее, после работ Э. Нетер и ее последователей. Широкое их применение к решению и исследованию некоторых дифференциальных уравнений относится к последней четверти XX века. Но важность и полезность этого понятия не понята большинством исследователей до конца и сейчас.

В этой работе мы введем простейшее определение законов сохранения. Более подробно с этими важными понятиями и их приложениями можно ознакомиться в [3] и цитируемой там литературе.

Пусть  $F_1 = 0$ ,  $F_2 = 0$ , система двух дифференциальных уравнений на две искомые функции  $u = u(x, y)$ ,

Определение. Сохраняющимся током для системы  $F_1 = 0$ ,  $F_2 = 0$ , назовем вектор  $(A, B)$  такой, что

$$\frac{\partial}{\partial x} A + \frac{\partial}{\partial y} B = \Pi_1 F_1 + \Pi_2 F_2, \quad (8.1)$$

где  $\Pi_i$  – некоторые дифференциальные операторы. Предполагается, что они оба одновременно не являются тождественно равными нулю.

Найдем законы сохранения для уравнений из п. 4, 5, 6, 7.

1. Уравнения, описывающие упругое кручение имеют вид (4.17) в более удобных обозначениях

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = u_x + v_y = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = u_y - v_x = \alpha, \end{aligned} \quad (8.2)$$

где  $u = \tau_{xz}$ ,  $v = \tau_{yz}$ ,  $\alpha = -2\mu\theta$ .

Пусть

$$A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, \quad B = \alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^2, \quad (8.3)$$

где  $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$  – некоторые функции только от  $x, y$ .

Из (8.1) с учетом (8.3) и (8.2) получаем

$$\begin{aligned} \alpha_x^1 u + \alpha^1 u_x + \beta_x^1 v + \beta^1 v_x + \gamma_x^1 + \alpha_y^2 u + \alpha^2 u_y + \beta_y^2 v + \beta^2 v_y + \gamma_y^2 = \\ = \alpha^1 (u_x + v_y) + \alpha^2 (u_y - v_x - \alpha). \end{aligned}$$

Здесь и далее индекс внизу, когда это не вызывает недоразумений, будет означать производную по соответствующей переменной.

Отсюда получаем

$$\alpha^1 = \beta^2, \beta^1 = -\alpha^2, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -\alpha^2 \alpha, \alpha_x^1 + \alpha_y^2 = 0, \beta_x^1 + \beta_y^2 = 0.$$

Или, после несложных преобразований

$$\alpha^2 = -\beta^1, \beta^2 = \alpha^1, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -\alpha^2 \alpha, \alpha_x^1 - \beta_y^1 = 0, \beta_x^1 + \alpha_y^1 = 0. \quad (8.4)$$

Следовательно, сохраняющийся ток имеет вид

$$\begin{aligned} A &= \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, \\ B &= -\beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma^2, \end{aligned} \quad (8.5)$$

где  $(\alpha^1, \beta^1)$  есть решение системы Коши-Римана,  $\gamma^1, \gamma^2$  определяются из уравнения (8.4).

С учетом (8.5) закон сохранения можно записать в виде

$$\int_{\Gamma} (\alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1) dy - (-\beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma^2) dx = 0 \quad (8.6)$$

где  $\Gamma$  – произвольный кусочно-гладкий замкнутый контур.

Пусть  $(x_0, y_0)$  некоторая точка, лежащая внутри области ограниченной контуром  $\Gamma$ . Возьмем

$$\alpha^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta^1 = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (8.7)$$

Пусть  $\Gamma_1$  – окружность  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$  (рис. 3).

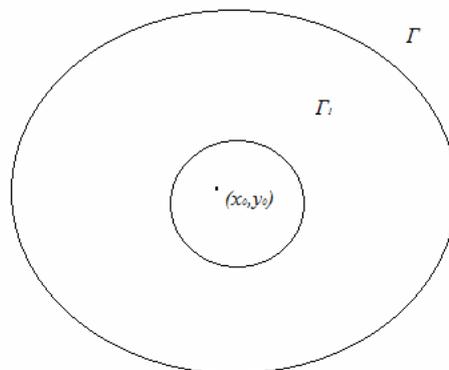


Рис. 3

Нетрудно показать что интеграл (8.6)

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (\alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1) dy - (-\beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma^2) dx = \\ & = - \int_{\Gamma_1} (\alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1) dy - (-\beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma^2) dx. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Вычислим интеграл по  $\Gamma_1$ , переходя к полярным координатам  $x - x_0 = R \cos \theta$ ,  $y - y_0 = R \sin \theta$ .

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} (\alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1) dy - (-\beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma^2) dx = \\ & = \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{\cos \theta}{R} u - \frac{\sin \theta}{R} v + \gamma^1 \right) R \cos \theta + \left( \frac{\sin \theta}{R} u + \frac{\cos \theta}{R} v + \gamma^2 \right) R \sin \theta \right] d\theta = \\ & = \int_0^{2\pi} \left[ u + \gamma^1 R \cos \theta + \gamma^2 R \sin \theta \right] d\theta = \int_0^{2\pi} u d\theta + R \int_0^{2\pi} (\gamma^1 \cos \theta + \gamma^2 \sin \theta) d\theta. \end{aligned}$$

В последнем выражении устремим  $R \rightarrow 0$  и используя теорему о среднем получаем

$$\int_{\Gamma_1} (\alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1) dy - (-\beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma^2) dx = 2\pi u(x_0, y_0).$$

Теперь из (8.8) имеем

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (\alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1) dy - (-\beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma^2) dx. \quad (8.9)$$

Пусть теперь

$$\alpha^1 = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = a^2, \quad \beta^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \beta^2. \quad (8.10)$$

Для этого случая вычислим интеграл по  $\Gamma_1$ . Имеем в полярных координатах  $x - x_0 = R \cos \theta$ ,  $y - y_0 = R \sin \theta$ .

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} & = \int_0^{2\pi} \left\{ \left[ \frac{\sin \theta}{R} u + \frac{\cos \theta}{R} v + \gamma^1 \right] R \cos \theta + \left[ -\frac{\cos \theta}{R} u + \frac{\sin \theta}{R} v + \gamma^2 \right] R \sin \theta \right\} d\theta = \\ & = \int_0^{2\pi} \left[ v + R(\gamma^1 \cos \theta + \gamma^2 \sin \theta) \right] d\theta. \end{aligned}$$

Устремляя  $R \rightarrow 0$  из последней формулы и (8.8) получим

$$v(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (\alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^1) dy - (-\beta^2 u + \alpha^2 v + \gamma^2) dx \quad (8.11)$$

Выражения (8.10) и (8.11) позволяют вычислить значения  $u, v$  в любой внутренней точке области окруженной контуром  $\Gamma$ , если нам известны значения  $u, v$  на контуре  $\Gamma$ . Но  $u = \tau_{xz}, v = \tau_{yz}$ , поэтому на контуре  $\Gamma$  нам эти две величины не известны, а известна только величина  $\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0$ . поэтому формулы (8.10), (8.11) не позволяют вычислить значение компонент тензора напряжений внутри области, а значит решить задачу о кручении упругого стержня. Зато, как это будет показано далее, эти формулы дадут нам возможность решить более сложную упруго-пластическую задачу.

*Замечание.* Аналогичные формулы без труда получаются для уравнений антиплоской теории упругости, приведенные в п. 7.

2. Уравнения, описывающие изгиб бруска имеют вид (5.6). Положим в них  $u = \tau_{xz}, v = \tau_{yz}$ ,

$$-Px/l = \omega_1, -Py/l(1+\nu) = \omega_2,$$

тогда имеем

$$u_x + v_y = \omega_1, u_x - v_y = \omega_2. \quad (8.12)$$

Будем искать сохраняющийся ток для этой системы в виде

$$\begin{aligned} A &= \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, \\ B &= \alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^2, \end{aligned} \quad (8.13)$$

где  $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$  – функции только от  $x, y$ .

Аналогично предыдущему пункту имеем

$$\begin{aligned} A_x + B_y &= \alpha_x^1 u + \alpha^1 u_x + \beta_x^1 v + \beta^1 v_x + \gamma_x^1 + \alpha_y^2 u + \alpha^2 u_y + \beta_y^2 v + \beta^2 v_y + \gamma_y^2 = \\ &= \alpha^1 (u_x + v_y - \omega_1) + \alpha^2 (u_y - v_x - \omega_2). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\alpha^1 = \beta^2, \beta^1 = -\alpha^2, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -\alpha^1 \omega_1 - \alpha^2 \omega_2, \alpha_x^1 + \alpha_y^2 = 0, \beta_x^1 + \beta_y^2 = 0.$$

После несложных вычислений имеем

$$\alpha^2 = -\beta^1, \beta^2 = \alpha^1, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -\alpha^1 \omega_1 - \alpha^2 \omega_2, \alpha_x^1 - \beta_y^1 = 0, \beta_x^1 + \alpha_y^1 = 0. \quad (8.14)$$

Следовательно, сохраняющийся ток имеет вид

$$\begin{aligned} A &= \alpha u + \beta v + \gamma^1, \\ B &= -\beta u + \alpha v + \gamma^2, \end{aligned} \quad (8.15)$$

где  $(\alpha, \beta)$  – произвольное решение уравнений Коши-Римана,  $\gamma^1, \gamma^2$  определяются из уравнения (8.14).

Для тока (8.15) закон сохранения можно записать в виде

$$\int_{\Gamma} (\alpha u + \beta v + \gamma^1) dy - (-\beta u + \alpha v + \gamma^2) dx = 0.$$

Поступая полностью аналогично с предыдущим пунктом, окончательно получаем

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (\alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1) dy - (-\beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma^2) dx \\ v(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (\alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^1) dy - (-\beta^2 u + \alpha^2 v + \gamma^2) dx \end{aligned}$$

Для этой задачи справедливы замечания предыдущего пункта.

### 3. Законы сохранения плоской теории упругости.

Найдем некоторые законы сохранения для уравнений, описывающих двумерные деформации упругих тел (6.1), здесь будем следовать работе [7]. Ищем сохраняющийся ток в виде

$$\begin{aligned} A &= \alpha_1(\lambda + 2\mu)u_x + \beta_1\mu u_y + \gamma_1\mu v_x + (\lambda + 2\mu)\delta_1 v_y, \\ B &= \alpha_2 u_x + \beta_2 u_y + \gamma_2 v_x + \delta_2 v_y, \end{aligned}$$

где  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ , некоторые функции от  $x, y$ .

Из соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x} A + \frac{\partial}{\partial y} B = \alpha_1 F_1 + \gamma_1 F_2. \quad (8.16)$$

Из (8.16) получаем

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -\beta_1 + (\lambda + \mu)\gamma_1, \quad \beta_2 = \alpha_1\mu, \\ \gamma_2 &= -\delta_1 + (\lambda + \mu)\alpha_1, \quad \delta_2 = (\lambda + 2\mu)\gamma_1, \end{aligned} \quad (8.17)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial x} + \frac{\partial \beta_2}{\partial y} = 0, \quad (8.18)$$

$$\mu \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \delta_1}{\partial x} + \frac{\partial \delta_2}{\partial y} = 0.$$

Подставляя (8.17) в (8.18) получаем

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x \partial y} (\lambda + \mu) + \mu \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial y^2} = 0,$$

$$\mu \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x \partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial y^2} = 0,$$

или

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta_1}{\partial x \partial y} (\lambda + \mu) + \mu \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial y^2} = 0,$$

$$\mu \frac{\partial^2 \delta_1}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial x \partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \delta_1}{\partial y^2} = 0.$$

Это означает, что  $(\alpha_1, \gamma_1)$  и  $(\beta_1, \delta_1)$  есть произвольные решения уравнений (6.1), которые связаны между собой соотношениями (8.18). Это позволяет, на основе точных решений уравнений упругости, выписать бесконечную систему законов сохранения.

## 9. Законы сохранения двумерных уравнений пластичности

Рассмотрим следующие уравнения двумерной плоской теории пластичности, которые несложно получить из уравнений п. 2.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos 2\theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin 2\theta \right) = 0, \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin 2\theta - \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos 2\theta \right) = 0. \quad (9.2)$$

Здесь  $\sigma$  – гидростатическое давление;  $\theta = (1, x) - \frac{\pi}{4}$ , где  $(1, x)$  – угол между главным направлением тензора напряжений и осью  $ox$ .

Будем искать законы сохранения системы (9.1), (9.2) в виде функций  $C = C(\sigma, \theta)$ ,  $D = D(\sigma, \theta)$ , для которых равенство

$$\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} = 0 \quad \text{или в силу формулы Грина} \quad \oint_{\Gamma} D dx - C dy = 0 \quad (9.3)$$

выполняется в силу системы, т. е. соотношение:

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (9.4)$$

должно выполняться для всех ее решений в некоторой области ограниченной гладким контуром  $\Gamma$ .

Запишем систему пластичности в нормальной матричной форме [5]:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} & -\frac{2k}{\sin 2\theta} \\ 1 & \cos 2\theta \\ -\frac{1}{2k \sin 2\theta} & -\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = 0. \quad (9.5)$$

Умножая эту систему слева на вектор  $\left( \frac{\partial C}{\partial \sigma}, \frac{\partial C}{\partial \theta} \right)$ , получим уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \left( \frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} + \frac{\partial C}{\partial \theta} \frac{1}{2k \sin 2\theta} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial y} - \\ - \left( \frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{2k}{\sin 2\theta} + \frac{\partial C}{\partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Сравнивая уравнение (9.5) с (9.6), получим два уравнения для определения функций  $C$  и  $D$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial \sigma} &= -\frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} - \frac{\partial C}{\partial \theta} \frac{1}{2k \sin 2\theta}, \\ \frac{\partial D}{\partial \theta} &= -\frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{2k}{\sin 2\theta} - \frac{\partial C}{\partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Выразим компоненты  $\frac{\partial C}{\partial \theta}, \frac{\partial D}{\partial \theta}$  линейной системы (9.7) в явном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \theta} + 2k \left( \frac{\partial D}{\partial \sigma} \sin 2\theta + \frac{\partial C}{\partial \sigma} \cos 2\theta \right) &= 0, \\ \frac{\partial D}{\partial \theta} - 2k \left( \frac{\partial D}{\partial \sigma} \cos 2\theta - \frac{\partial C}{\partial \sigma} \sin 2\theta \right) &= 0. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Можно заметить, что если положить  $C = -y(\sigma, \theta)$ ,  $D = x(\sigma, \theta)$ , то система (9.8) совпадает с линеаризованной системой пластичности

$$\begin{aligned} y_\theta - 2k(-y_\sigma \cos 2\theta + x_\sigma \sin 2\theta) &= 0, \\ x_\theta - 2k(y_\sigma \sin 2\theta + x_\sigma \cos 2\theta) &= 0. \end{aligned}$$

Это позволяет использовать все свойства этой системы при построении законов сохранения.

Таким образом, линейризация системы пластичности достигается без необходимости требовать неравенства нулю якобиана

Далее, используя замену

$$\xi = \sigma + 2k\theta, \quad \eta = \sigma - 2k\theta,$$

сведем систему (9.8) к уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial \xi} - \frac{\partial C}{\partial \xi} \operatorname{tg} \theta &= 0, \\ \frac{\partial D}{\partial \eta} + \frac{\partial C}{\partial \eta} \operatorname{ctg} \theta &= 0. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Вводя новые зависимые функции  $\varphi, \psi$ :

$$\begin{aligned} \varphi &= D - \operatorname{tg} \theta C, \\ \psi &= D + \operatorname{ctg} \theta C, \end{aligned} \tag{9.11}$$

получим систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta (\psi - \varphi) &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta (\psi - \varphi) &= 0. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Окончательно, полагая  $\rho = \varphi \cos \theta$ , приходим к уравнению:

$$\rho_{\xi\eta} - \frac{\rho}{4} = 0. \tag{9.13}$$

А это есть известное телеграфное уравнение.

Тем самым построение законов сохранения для уравнений пластичности свелось к решению линейных уравнений, для которых разработано очень много хороших методов решения, как уравнений, так и краевых задач.

## **10. Упруго-пластическая граница в скручиваемом прямолинейном стержне**

Рассмотрим упруго-пластическое кручение прямого стержня, поперечное сечение которого ограничено выпуклым контуром  $\Gamma$ .

При достаточно большом значении крутящего момента в стержне образуется пластическая область  $P$ . Она начинает образовываться на внешнем контуре  $\Gamma$ . Предположим, что пластическая область полностью охватила контур. Тогда в поперечном сечении возникают две области – пластическая  $P$  и упругая  $F$ ,  $L$  – граница раздела областей.

Решению задачи о напряженном состоянии упруго-пластического стержня посвящено много работ, но большинство из них основываются на некоторых предположениях о форме границы  $L$ , которая, вообще говоря, заранее не известна. Оригинальный метод по определению неизвестной границы предложен Б. Д. Анниным [1]. Этот метод основан на контактных преобразованиях и позволяет определить границу раздела между упругой и пластической областью в стержнях овального поперечного сечения. Постановку задачи и подробный обзор результатов можно найти в [1] и цитируемой там литературе.

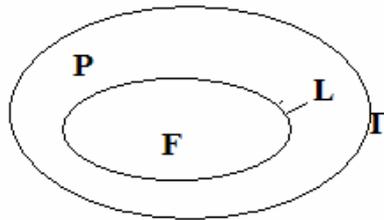


Рис. 4. Поперечное сечение скручиваемого стержня

В предлагаемой работе с помощью законов сохранения определяется напряженное состояние во всех внутренних точках стержня, и предлагаются формулы для аналитических вычислений этих напряжений для случая кусочно-гладкой ориентированной границы поперечного сечения. Законы сохранения уже давно и плодотворно используются для решения многих задач математики и механики. Краткий обзор результатов и решенных задач из разных областей механики можно найти в [4–6].

Постановка задачи

Пусть  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  – единственные ненулевые компоненты тензора напряжений. В упругой зоне они удовлетворяют уравнению равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (10.1)$$

и уравнениям

$$\tau_{xz} = G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \quad \tau_{yz} = G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right). \quad (10.2)$$

Здесь функция  $\theta\psi(x, y)$  определяет деформацию поперечного сечения,  $\theta$  – постоянная;  $G$  – модуль упругости при сдвиге.

Введем функцию напряжения  $\varphi$  по формуле

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (10.3)$$

тогда для определения  $\varphi$  в упругой области получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = a, \quad (10.4)$$

где  $a = -2G\theta$ , – постоянная, не равная нулю.

В пластической области компоненты  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  помимо уравнения равновесия удовлетворяют условию пластичности

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = 1. \quad (10.5)$$

Здесь, для простоты дальнейших вычислений, постоянную пластичности считаем равной единице.

Вводя в это уравнение функцию напряжения, получаем

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 1. \quad (10.6)$$

Граничные условия. Предположим, что боковая поверхность свободна от напряжений. Это означает, что  $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 0$  – на контуре  $\Gamma$ . Здесь  $\vec{l} = (l_1, l_2)$  – касательная к контуру  $\Gamma$ . Отсюда получаем, что  $\varphi = \text{const}$  вдоль контура  $\Gamma$ . Поскольку  $\Gamma$  односвязный контур, то полагаем, что  $\varphi = 0$  на  $\Gamma$ .

Окончательно получаем следующую задачу:

В области ограниченной кривой  $L$  необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = a. \quad (10.7)$$

В области ограниченной кривыми  $L$  и  $\Gamma$  (т. е. в области пластичности  $P$ ) функция  $\varphi$  удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 1. \quad (10.8)$$

На  $\Gamma$  для функции выполняются условия

$$\varphi = 0 \quad (10.9)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} l_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_2 = 0 \quad (10.10)$$

на границе раздела  $L$  функция непрерывна.

Требуется найти в упругой и пластической областях, а также найти границу раздела  $L$ .

Введем обозначения  $\varphi_x = u$ ,  $\varphi_y = v$ . Тогда уравнения (10.7)–(10.8) примут вид

$$F_1 = u_x + v_y - a = 0. \quad (10.11)$$

$$u^2 + v^2 = 1. \quad (10.12)$$

В силу введенных обозначений будет выполняться равенство

$$F_2 = u_y - v_x = 0. \quad (10.13)$$

Определение. Назовем вектор  $(A, B)$  сохраняющимся током, для системы уравнений (10.11), (10.13), если выполнено соотношение

$$\partial_x A + \partial_y B = \Delta_1 F_1 + \Delta_2 F_2 = 0. \quad (10.14)$$

Здесь  $\Delta_1, \Delta_2$  некоторые линейные дифференциальные операторы.

Это означает, что для функций  $A$  и  $B$  справедлив закон сохранения на всех решениях системы (10.11), (10.13)

$$\partial_x A + \partial_y B = 0. \quad (10.15)$$

Закон сохранения (10.15) в силу уравнений (10.9), (10.11) имеет вид

$$A_x + A_u u_x + A_v v_x + B_y + B_u u_y + B_v v_y = 0$$

или, учитывая, что  $u_x = a - v_y$  и  $u_y = v_x$ ,

$$A_x + A_u a + A_v v_x + B_y + B_u v_x + B_v v_y = 0.$$

Из последнего равенства следует, что функции  $A$  и  $B$  удовлетворяют уравнениям

$$A_x + A_u a + B_y = 0, \quad (10.16)$$

$$B_v - A_u = 0, \quad A_v + B_u = 0. \quad (10.17)$$

(10.16)–(10.17) – уравнения Коши-Римана.

Рассмотрим область  $D$  с границей  $\Gamma$ , при условии, что область пластичности  $P$  полностью охватывает упругую зону  $F$ . Пусть  $\Gamma$  – гладкая ориентированная кривая, т. е. непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек.

Из закона сохранения (10.15) следует, что

$$\iint_D (\partial_x A + \partial_y B) dx dy = 0. \quad (10.18)$$

Из (10.18), используя формулу Грина, получаем

$$\oint_{\Gamma} A dy - B dx = 0 \quad (10.19)$$

Наша задача найти такую область  $F$  принадлежащую, вместе с ее границей  $L$  области  $D$ , в которой выполняется неравенство  $u^2 + v^2 < 1$ .

Пусть  $A = \alpha u + \beta v$ ,  $B = \alpha v - \beta u + \gamma$ , тогда

$$A_x = \alpha_x u + \beta_x v + \beta v_x \quad (10.20)$$

$$B_y = \alpha_y v + \alpha v_y - \beta_y u - \beta u_y + \gamma_y. \quad (10.21)$$

Согласно закону сохранения (10.15) получаем равенство

$$A_x + B_y = \alpha_x u + \alpha u_x + \beta_x v + \beta v_x + \alpha_y v + \alpha v_y - \beta_y u - \beta u_y + \gamma_y = 0, \quad (10.21)$$

из которого следуют условия на функции  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ .

$$\begin{cases} \alpha_x - \beta_y = 0, \\ \beta_x + \alpha_y = 0, \\ a\alpha + \gamma_y = 0. \end{cases} \quad (10.22)$$

Рассмотрим два решения системы уравнений (10.22).

Первое имеет вид

$$\alpha_1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta_1 = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (10.23)$$

$$\gamma_{1y} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

тогда

$$\gamma_1 = -a \cdot \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0}. \quad (10.24)$$

Соответственно второе возьмем в виде

$$\alpha_2 = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta_2 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (10.25)$$

$$\gamma_{2y} = -a \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

тогда  $\gamma_2 = -\frac{a}{2} \cdot \ln\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right)$ .

Перепишем уравнение (10.19) для функций  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned}
 \oint_{\Gamma} A dy - B dx &= \oint_{\Gamma} (\alpha u + \beta v) dy - (\alpha v - \beta u + \gamma) dx = \\
 &= \oint_{\Gamma} \left(-\alpha \frac{l_2}{l_1} + \beta\right) v dy - \left(\alpha \frac{l_1}{l_2} - \beta\right) u dx - \oint_{\Gamma} \gamma dx = \\
 &= \oint_{\Gamma} \left(-\alpha \frac{l_2}{l_1} + \beta\right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy - \left(\alpha \frac{l_1}{l_2} - \beta\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx - \oint_{\Gamma} \gamma dx = \\
 &= \oint_{\Gamma} \left(-\alpha \frac{l_2}{l_1}\right) v dy - \left(\alpha \frac{l_1}{l_2}\right) dx - \oint_{\Gamma} \gamma dx + \oint_{\Gamma} \beta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx\right) = \\
 &= \oint_{\Gamma} \alpha u dy - (\alpha v + \gamma) dx = 0.
 \end{aligned} \tag{10.26}$$

Разобьем границу  $\Gamma$  на части, т. е.  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ , где  $\Gamma_3$  – окр- ружность  $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ .

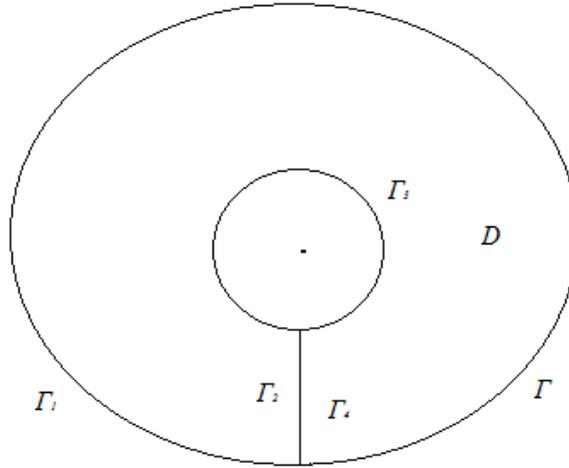


Рис. 5

Тогда

$$\begin{aligned}
 \oint_{\Gamma} A dy - B dx &= \oint_{\Gamma} \alpha u dy - (\alpha v + \gamma) dx = \oint_{\Gamma_1} \alpha u dy - (\alpha v + \gamma) dx + \oint_{\Gamma_2} \alpha u dy - \\
 &- (\alpha v + \gamma) dx + \oint_{\Gamma_3} \alpha u dy - (\alpha v + \gamma) dx + \oint_{\Gamma_4} \alpha u dy - (\alpha v + \gamma) dx = 0.
 \end{aligned} \tag{10.27}$$

Очевидно, что  $\oint_{\Gamma_2} \alpha u dy - (\alpha v + \gamma) dx + \oint_{\Gamma_4} \alpha u dy - (\alpha v + \gamma) dx = 0$ . С учетом этого условия уравнение (10.25) примет вид

$$\oint_{\Gamma_3} \alpha u dy - (\alpha v + \gamma) dx = -\oint_{\Gamma_1} \alpha u dy - (\alpha v + \gamma) dx \quad (10.28)$$

Вычислим интеграл  $\oint_{\Gamma_1}$ , где  $\Gamma_1$  – окружность радиуса  $R$ .

Пусть

$$\alpha = \alpha_1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta = \beta_1 = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (10.29)$$

$$\gamma = \gamma_1 = -a \cdot \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

Введем полярную систему координат

$$\begin{cases} x - x_0 = R \cos \varphi, \\ y - y_0 = R \sin \varphi, \end{cases} \quad (10.30)$$

тогда

$$\begin{cases} dx = R \sin \varphi d\varphi, \\ dy = R \cos \varphi d\varphi, \end{cases} \quad \alpha = \frac{\cos \varphi}{R}, \quad \beta = \frac{\sin \varphi}{R}, \quad \gamma = -a\varphi. \quad (10.31)$$

В результате вычислений при  $R \rightarrow 0$  получим

$$\oint_{\Gamma_1} \alpha u dy - (\alpha v + \gamma) dx = \pi u(x_0, y_0). \quad (10.32)$$

Аналогично при  $\alpha = \alpha_2, \beta = \beta_2, \gamma = \gamma_2$

$$\oint_{\Gamma_1} \alpha u dy - (\alpha v + \gamma) dx = \pi u(x_0, y_0). \quad (10.33)$$

В результате из (10.14) имеем

$$\oint_{\Gamma_3} \alpha_1 u dy - (\alpha_1 v + \gamma_1) dx = \pi u(x_0, y_0), \quad (10.34)$$

$$\oint_{\Gamma_3} \alpha_2 u dy - (\alpha_2 v + \gamma_2) dx = \pi u(x_0, y_0). \quad (10.35)$$

Зададим кривую  $\Gamma_3$  в параметрическом виде:

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (10.36)$$

$f'(t)$ ,  $\varphi'(t)$  соответственно производные функций  $f(t)$  и  $\varphi(t)$ .

Тогда функции  $u(x_0, y_0)$ ,  $v(x_0, y_0)$ , из (10.28), (10.34) будут вычисляться по следующим формулам

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^T \left( \frac{(f(t) - x_0) \sqrt{(f'(t))^2 + (\varphi'(t))^2}}{\sqrt{(f(t) - x_0)^2 + (\varphi(t) - y_0)^2}} + \right. \\ \left. + a f'(t) \operatorname{arctg} \frac{\varphi(t) - y_0}{f(t) - x_0} \right) dt, \quad (10.37)$$

$$v(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^T \left( \frac{(\varphi(t) - y_0) \sqrt{(f'(t))^2 + (\varphi'(t))^2}}{\sqrt{(f(t) - x_0)^2 + (\varphi(t) - y_0)^2}} + \right. \\ \left. + \frac{a}{2} f'(t) \ln \left( (f(t) - x_0)^2 + (\varphi(t) - y_0)^2 \right) \right) dt.$$

Для получения этих соотношений использованы решения (10.34) и (10.35) соответственно.

Теперь вычисляем значение выражения

$$u^2 + v^2 \quad (10.38)$$

в точке  $(x_0, y_0)$ . Те точки, в которых (10.38) больше или равно единице принадлежат пластической области, а те в которых выражение (10.38) меньше единицы – упругой.

На основе формул (10.34), (10.35) созданы программы, которые позволяют с любой точностью строить пластические и упругие области в скручиваемом стержне.

Решение тестовых задач показало хорошее совпадение с известными решениями.

В качестве примера приведем некоторые упруго – пластические границы для разных контуров. Эти результаты принадлежат А. В. Кондрину и авторам статьи.

## 11. Упруго-пластическая граница в изгибаемой консоли

Рассмотрим консоль постоянного сечения, ограниченного контуром  $\Gamma$ . Консоль находится под действием сосредоточенной силы  $P$  на свободном конце параллельно главным осям.

Пусть компонента тензора напряжений  $\sigma_z$  распределена вдоль оси консоли как и в случае чистого изгиба

$$\sigma_z = -\frac{p(i-z)x}{l}.$$

Пусть компоненты тензора напряжений таковы

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_{xy} = 0.$$

Тогда оставшиеся компоненты тензора напряжений удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = -\frac{px}{l}. \quad (11.1)$$

Обычно уравнения (11.1) заменяют двумя уравнениями совместности

$$\Delta \tau_{xz} = -\frac{p}{l(1+\nu)}, \quad \Delta \tau_{yz} = 0,$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Эта система обычно решается полубратным методом Сен-Венана.

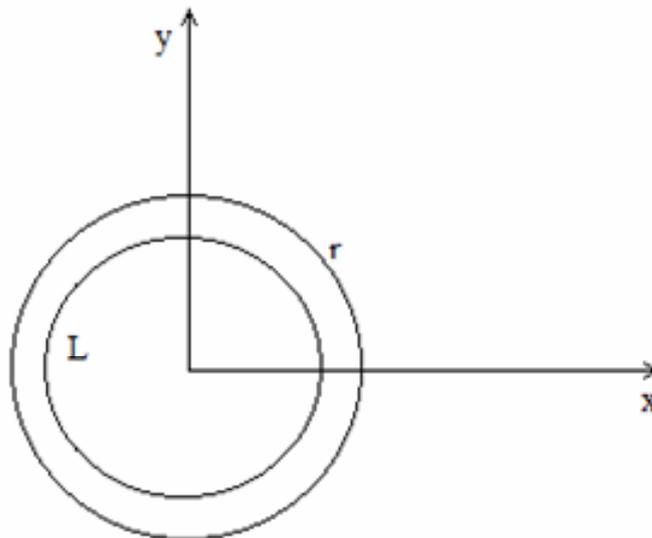


Рис. 6. Упруго пластическая граница в сечении консоли

Запишем систему (11.1) в терминах вектора деформаций  $(u, v, w)$ . Для полученной системы будет поставлена краевая задача, и она будет решена с помощью законов сохранения.

Используя формулы (1.2) связывающие компоненты тензора напряжений и тензора деформаций имеем

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda e + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \sigma_y = \lambda e + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \sigma_z &= \lambda e + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{p(l-z)}{l} = \sigma,\end{aligned}\tag{11.2}$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0, \quad \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \tau_1, \quad \tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \tau_2,$$

где  $\lambda, \mu$  – коэффициенты Ламе,  $e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ ,  $\tau_1, \tau_2$  искомые функции от  $x, y$ .

Из первых трех уравнений (11.2) мы получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A_1 xz + B_1 x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = A_2 xz + B_2 x, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = A_3 xz + B_3 x,\tag{11.3}$$

где постоянные  $A_i, B_i$  могут быть легко выражены через  $\lambda, \mu, p, l$ .

Из уравнений (11.3) мы получаем

$$\begin{aligned}w &= \frac{A_3 xz^2}{2} + B_3 xz + \omega(x, y), \quad u = -\frac{A_3 z^3}{\sigma} - \frac{B_3 z^3}{2} + (\tau_1 / \mu - \omega_x)z + U(x, y), \\ v &= (\tau_2 / \mu - \omega_y)z + V(x, y),\end{aligned}$$

где  $\omega, U, V$  искомые функции.

Из соотношения  $\tau_{xy} = 0$  находим

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = (\tau_1 y / \mu - \omega_{xy})z + U_y + (\tau_2 x / \mu - \omega_{xy}) + V_x = 0.$$

Соотношения

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -(\partial \tau_{1x} / \mu - \omega_{xx})z + U_x = A_1 xz + B_1 x, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= (\partial \tau_{2y} / \mu - \omega_{yy})z + U_y = A_2 xz + B_2 x.\end{aligned}$$

подставляем в предыдущее уравнение, в результате получаем

$$\mu(\omega_{xx} + A_1 x) + \mu(\omega_{yy} + A_2 x) = -\frac{Px}{l}.$$

Предположим, что боковая поверхность бруса свободна от напряжений. Это означает, что

$$\tau_{xz}n_2 - \tau_{yz}n_1 = 0, \quad (11.4)$$

где  $(n_1, n_2)$  – внешняя нормаль к контуру  $\Gamma$ . Мы предполагаем, что пластическое течение начинается с внешней стороны боковой поверхности бруса. Условие пластичности Мизеса в этом случае имеет вид

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2, \quad (11.5)$$

где  $k$  – постоянная пластичности. Решая систему (11.4), (11.5) получаем

$$\tau_{xz} = \pm n_1 k, \quad \tau_{yz} = \pm n_2 k.$$

Выбирая в этих соотношениях верхний знак, мы получаем следующую задачу. Необходимо решить уравнение

$$\omega_{xx} + \omega_{yy} = ax, \quad (11.6)$$

При следующих условиях на  $\Gamma$ :

$$\omega_x = \frac{\left( n_1 k - \frac{A_1 x^2}{2} \right)}{\mu}, \quad \omega_y = -\frac{(n_2 k - A_2 xy)}{\mu}. \quad (11.7)$$

*Замечание.* В сечении бруса есть две зоны пластическая и упругая. Если в некоторой точке выполнено условие

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 < 1,$$

Она попадает в упругую зону. Остальные точки, включая границу контура  $\Gamma$ , принадлежат пластической зоне.

Соотношение в форме

$$\partial_x A + \partial_y B = 0, \quad (11.8)$$

Назовем законом сохранения (11.8) для уравнения (11.6) если уравнение (11.8) верно для всех решений уравнения (11.6). Пусть сохраняющийся ток имеет вид

$$A = \alpha(x, y)\omega_x + \beta(x, y)\omega_y + \gamma(x, y),$$

$$B = \alpha^1(x, y)\omega_x + \beta^1(x, y)\omega_y + \gamma^1(x, y).$$

Из (11.6) и (11.8) мы получаем

$$\begin{aligned} \alpha(a - \omega_{yy}) + \alpha_x \omega_x + \beta \omega_{xy} + \beta_x \omega_y + \gamma_x + \alpha^1 \omega_{xy} + \\ + \alpha_y^1 \omega_x + \beta^1 \omega_{yy} + \beta_y^1 \omega_y + \gamma_y^1 = 0. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Соотношение (11.9) верно для всех решений уравнения (11.6), поэтому из (11.9) мы имеем

$$\alpha_x - \beta_y = 0, \quad \beta_x + \alpha_y = 0, \quad \alpha a + \gamma_x + \gamma_y^1 = 0. \quad (11.10)$$

Закон сохранения (11.8) может быть записан с помощью формулы Грина следующим образом

$$\int -(\alpha\omega_x + \beta\omega_y + \gamma)dy + (-\beta\omega_x + \alpha\omega_y + \gamma^1)dx = 0.$$

Рассмотрим два решения уравнений (11.10).

Первое решение возьмем в виде

$$\alpha^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta^1 = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$\gamma_x = 0, \quad \alpha^1 x a = -\gamma_y^1, \quad \gamma^1 = -ax \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right).$$

Второе решение пусть будет таким

$$\alpha^1 = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta^1 = -\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \gamma_y^1 = 0, \quad \alpha^2 x a = -\gamma_x.$$

Используя закон сохранения и применяя его к контуру изображенному на рис. 6, аналогично предыдущему параграфу, мы получаем

$$\int (\alpha\omega_x + \beta\omega_y + \gamma)dy - (-\beta\omega_x + \alpha\omega_y + \gamma^1)dx =$$

$$= - \int_{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2} (\alpha\omega_x + \beta\omega_y + \gamma)dy - (-\beta\omega_x + \alpha\omega_y + \gamma^1)dx.$$

Вычислим второй интеграл для первого и второго решений уравнения (11.10), в результате получим формулы для нахождения  $\omega_x(x_0, y_0)$ ,  $\omega_y(x_0, y_0)$ .

Формулы для  $\omega_x(x_0, y_0)$ ,  $\omega_y(x_0, y_0)$  позволяют найти напряженное состояние в произвольной точке  $(x_0, y_0)$ . Это означает, что мы можем для каждой точки области определить в пластической или упругой зоне она находится. Изложенный здесь метод позволяет построить границу между упругой и пластической зонами с любой степенью точности на компьютере. Предварительные вычисления подтверждают этот вывод.

## 12. Упруго-пластическая граница для областей больших размеров

В этом параграфе мы ограничимся областями, граница которых гладкая выпуклая кривая.

Рассмотрим область ограниченную контуром  $\Gamma$



Рис. 7

Пусть на  $\Gamma$  заданы граничные условия вида (1.5). Здесь они запишутся так

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m = \bar{X}, \quad \tau_{xy} l + \sigma_y m = \bar{Y}, \quad (12.1)$$

Кроме того предположим, что нагрузки (12.1) на границе таковы, что вся граница и близлежащие точки области находятся в пластическом состоянии. Тогда можно ввести переменные  $\sigma, \theta$  по следующим формулам

$$\sigma_x = \sigma - k \cos 2\theta, \quad \sigma_y = \sigma + k \cos 2\theta, \quad \tau_{xy} = k \sin 2\theta. \quad (12.2)$$

В этом случае условия (12.1) запишутся так

$$(\sigma - k \cos 2\theta)l + k \sin 2\theta m = \bar{X}, \quad k \sin 2\theta l + (\sigma + k \cos 2\theta)m = \bar{Y}.$$

Эти условия можно записать в следующем виде

$$\sigma = \bar{X}', \quad \theta = \bar{Y}'. \quad (12.3)$$

Тем самым на границе  $\Gamma$  мы имеем задачу Коши в пластической области. Решая эту задачу по формулам п. 9 вдоль  $\Gamma$  получаем два семейства характеристик.

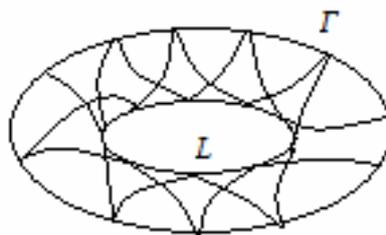


Рис. 8

Для этих характеристик строим огибающую  $L$  (линию возврата). Эта огибающая (линия возврата) и будет искомой упруго-пластической границей. Теперь достаточно решить упругую задачу внутри области ограниченной кривой  $L$  и упруго-пластическая задача будет полностью решена.

Теперь можно поставить задачу Коши для системы пластичности (9.1)–(9.2).

Пусть на части граничной линии  $\Gamma$ , которую обозначим  $SP$  заданы начальные данные:

$$\sigma|_{SP} = \sigma_0', \quad \theta|_{SP} = \theta_0', \quad (12.4)$$

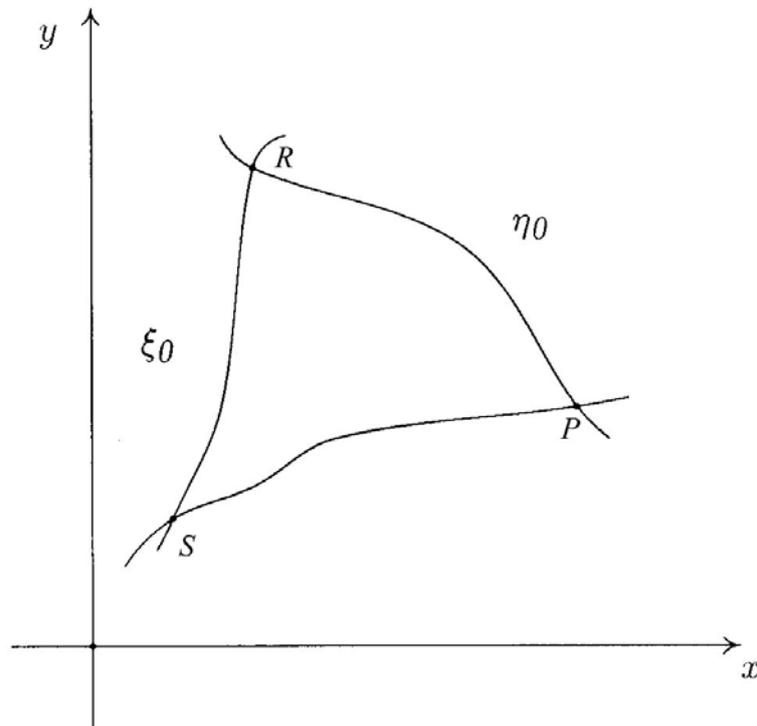


Рис. 9. Задача Коши

Выпустим характеристику  $PR: \eta_0 = const$  из точки  $P$  и характеристику  $RS: \xi_0 = const$  из некоторой точки  $S$ . Тогда решение задачи Коши определено в криволинейном треугольнике  $\Delta SPR$  (рис. 9).

Таким образом, необходимо определить координаты точки  $R$  пересечения характеристик. Зная координаты точки  $R(x_R, y_R)$  и значения  $\xi_0, \eta_0$  определим в ней значение функций  $\sigma, \theta$ .

Запишем интеграл по замкнутому контуру  $SPR$ . Используя соотношение (9.3) в теореме Стокса для плоскости [3], заключаем, что этот интеграл равен нулю:

$$\int_{SPR} Ddx - Cdy = \int_{SP} + \int_{PR: \eta = \eta_0} + \int_{RS: \xi = \xi_0} = 0.$$

1. Для координаты  $x_R$  имеем:

$$\int_{SPR} Ddx - Cdy = \int_{SPR} \left( D - C \frac{dy}{dx} \right) dx.$$

Интегралы  $\int_{PR:\eta=\eta_0}$  и  $\int_{RS:\xi=\xi_0}$  берутся по частям:

$$\int_{PR} \left( D - C \frac{dy}{dx} \right) dx = \int_{PR} (D + Cctg\theta) dx = \int_{PR} \psi dx = x\psi \Big|_{x=x_P}^{x=x_R} - \int_{PR} x \frac{\partial \psi}{\partial \xi} d\xi,$$

$$\int_{RS} \left( D - C \frac{dy}{dx} \right) dx = \int_{RS} (D - Cctg\theta) dx = \int_{RS} \varphi dx = x\varphi \Big|_{x=x_R}^{x=x_S} - \int_{RS} x \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\eta.$$

Полагая  $\varphi = 1$ ,  $\psi = 0$ , получим граничные условия для системы (9.10) вида:

$$\varphi|_{RS} = 1', \quad \psi|_{PR} = 0'. \quad (12.5)$$

При таких граничных условиях, окончательное выражение для координаты  $x_R$  принимает вид:

$$\int_{SPR} Ddx - Cdy = \int_{SP} (Ddx - Cdy) + x\psi \Big|_{x=x_P}^{x=x_R} + x\varphi \Big|_{x=x_R}^{x=x_S} = 0, \quad (12.6)$$

$$x_R = \int_{SP} (Ddx - Cdy) + x_S'.$$

2. Аналогично, для координаты  $y_R$  имеем:

$$\int_{SPR} Ddx - Cdy = \int_{SPR} \left( D \frac{dx}{dy} - C \right) dy.$$

Интегралы  $\int_{PR:\eta=\eta_0}$  и  $\int_{RS:\xi=\xi_0}$  берутся по частям:

$$\int_{PR} \left( D \frac{dx}{dy} - C \right) dy =$$

$$= \int_{PR} \frac{D - C \frac{dy}{dx}}{\frac{dy}{dx}} dy = \int_{PR} \frac{D + Cctg\theta}{-ctg\theta} dy = \int_{PR} \frac{\psi}{-ctg\theta} dy = - \frac{y\psi}{ctg\theta} \Big|_{y=y_P}^{y=y_R} + \int_{PR} y \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\psi}{ctg\theta} \right) d\xi,$$

$$\int_{RS} \left( D \frac{dx}{dy} - C \right) dy = \int_{RS} \frac{D - Ctg\theta}{tg\theta} dy = \int_{RS} \frac{\varphi}{tg\theta} dy = \frac{y\varphi}{tg\theta} \Big|_{x=x_R}^{x=x_S} - \int_{RS} y \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\varphi}{tg\theta} \right) d\eta.$$

Полагая  $\varphi = \operatorname{tg}\theta$ ,  $\psi = 0$ , получим граничные условия для системы (9.10) вида

$$\varphi|_{RS} = \operatorname{tg} \frac{\eta - \xi_0'}{2}, \quad \psi|_{PR} = 0'. \quad (12.7)$$

При таких граничных условиях, окончательное выражение для координаты  $y_R$  принимает вид

$$\int_{SPR} Ddx - Cdy = \int_{SP} (Ddx - Cdy) + \frac{x\psi}{\operatorname{ctg}\theta} \Big|_{y=y_P}^{y=y_R} + \frac{y\varphi}{\operatorname{tg}\theta} \Big|_{y=y_R}^{y=y_S} = 0, \quad (12.8)$$

$$y_R = \int_{SP} (Ddx - Cdy) + y_S'.$$

Остается только решить задачи (9.10), (12.5) и (9.10), (12.7). Эти задачи для системы можно свести к следующим задачам для одного уравнения (9.11). А именно, учитывая, что  $\varphi, \psi$  связаны с функцией  $\rho$  так:

$$\varphi = \frac{\rho'}{\cos\theta}, \quad \psi = \frac{2}{\sin\theta} \frac{\partial \rho'}{\partial \xi}, \quad (12.9)$$

получим задачи:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\rho}{4} = 0', \quad (12.10)$$

$$\rho|_{\xi=\xi_0} = \cos \frac{\eta - \xi_0'}{2}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \Big|_{\eta=\eta_0} = 0$$

и

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\rho}{4} = 0', \quad (12.11)$$

$$\rho|_{\xi=\xi_0} = \sin \frac{\eta - \xi_0'}{2}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \Big|_{\eta=\eta_0} = 0.$$

Общим решением первой задачи (12.11) (для координаты  $x_R$ ) является функция

$$\rho = \rho_1(\xi, \eta) = I_0 \left( \sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)} \right) \cos \frac{\eta_0 - \xi_0}{2} - \frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\eta} I_0 \left( \sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \tau)} \right) \sin \frac{\tau - \xi_0}{2} d\tau, \quad (12.12)$$

причем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} = & \frac{1}{2} \cos \frac{\eta_0 - \xi_0}{2} I_1 \left( \sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)} \right) \sqrt{\frac{\eta - \eta_0}{\xi - \xi_0}} - \\ & - \frac{1}{4} \int_{\eta_0}^{\eta} I_1 \left( \sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \tau)} \right) \sqrt{\frac{\eta - \tau_0}{\xi - \xi_0}} \sin \frac{\tau - \xi_0}{2} d\tau. \end{aligned} \quad (12.13)$$

Решением второй задачи (12.11) (для координаты  $y_R$ ) является функция:

$$\begin{aligned} \rho = \rho_2(\xi, \eta) = & I_0 \left( \sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)} \right) \sin \frac{\eta_0 - \xi_0}{2} + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\eta} I_0 \left( \sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \tau)} \right) \cos \frac{\tau - \xi_0}{2} d\tau, \end{aligned} \quad (12.14)$$

причем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} = & \frac{1}{2} \sin \frac{\eta_0 - \xi_0}{2} I_1 \left( \sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)} \right) \sqrt{\frac{\eta - \eta_0}{\xi - \xi_0}} + \\ & + \frac{1}{4} \int_{\eta_0}^{\eta} I_1 \left( \sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \tau)} \right) \sqrt{\frac{\eta - \tau_0}{\xi - \xi_0}} \cos \frac{\tau - \xi_0}{2} d\tau. \end{aligned} \quad (12.15)$$

Во всех решениях функция  $I_0$  является функцией Бесселя первого типа мнимого аргумента,  $I_0(0) = 1$ ,  $I_0'(0) = 0$ .

Функции  $\varphi, \psi$  восстанавливаются по формулам (4.16). Из соотношений (9.11) определим компоненты законов сохранения:

$$\begin{aligned} D = & \frac{\psi \operatorname{tg} \theta + \varphi \operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{tg} \theta + \operatorname{ctg} \theta} = \psi \sin^2 \theta + \varphi \cos^2 \theta, \\ C = & \frac{\psi - \varphi}{\operatorname{tg} \theta + \operatorname{ctg} \theta} = (\psi - \varphi) \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (12.16)$$

Подставляя найденные  $C$  и  $D$  в (12.6) и в (12.7), определим координаты точки  $R$ . Таким образом, задача Коши для системы пластичности (9.1), (9.26) с начальными данными (12.4) полностью и конструктивно решена.

### 13. Построение упруго-пластической границы для стержней прокатных профилей

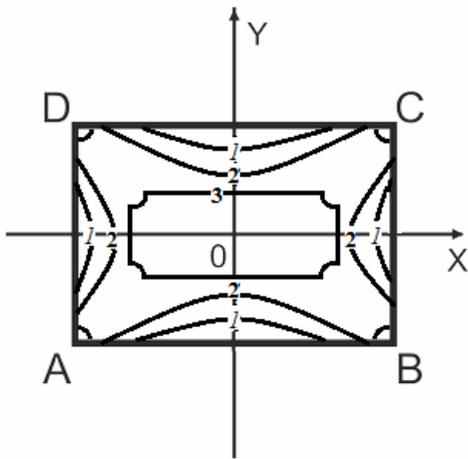


Рис. 10. Упруго-пластические границы для стержня прямоугольного поперечного сечения:  
1)  $a=1.6$ ; 2)  $a=1.8$ ; 3)  $a=2$

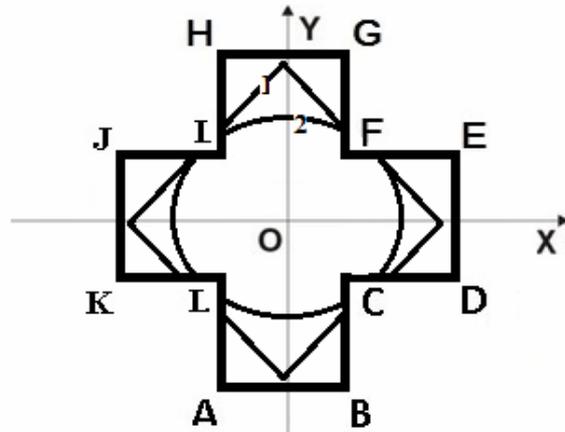


Рис. 11. Упруго-пластические границы для стержня крестообразного поперечного сечения:  
1)  $a=0.6$ ; 2)  $a=0.7$

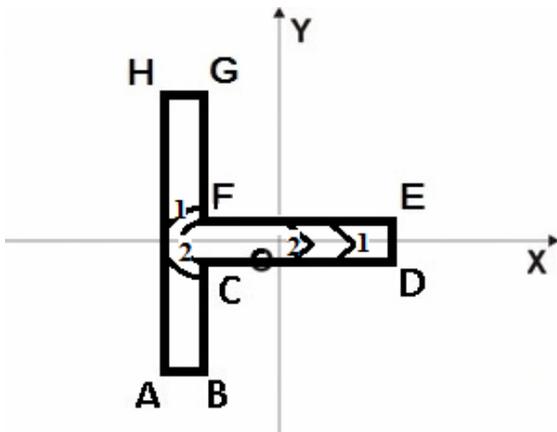


Рис. 12. Упруго-пластические границы для стержня сечения типа тавр:  
1)  $a=1$ ; 2)  $a=1.3$

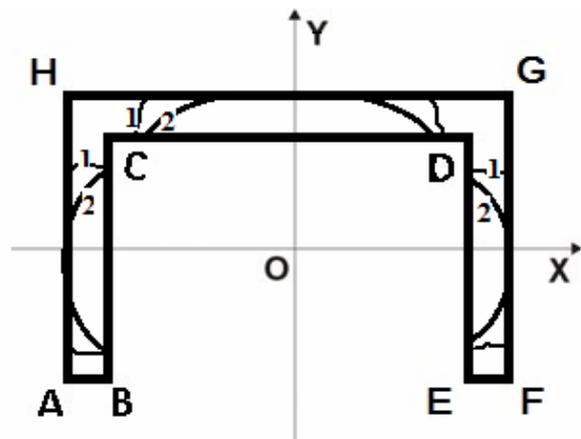


Рис. 13. Упруго-пластические границы для стержня сечения типа швеллер:  
1)  $a=0.5$ ; 2)  $a=0.7$

### Библиографические ссылки

1. Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упруго-пластическая задача. Новосибирск : Наука, 1983. 238 с.
2. Галин Л. А. Плоская упруго-пластическая задача. ПММ, 1946. Т. 10, в. 3. С. 367–386.

3. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М. : Физматгиз, 1963.
4. Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий изаконов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. 190 с.
5. Сенашов С. И., Гомонова О. В., Яхно А. Н. Математические вопросы двумерных уравнений идеальной пластичности / Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2012. 137 с.
6. Сенашов С. И. Черепанова О. Н., Кондрин А. В. Elastoplastic Bending of Beam J. Siberian Federal Univ., Math. & Physics. 2014. № 7(2). P. 203–208.
7. Сенашов С. И., Филюшина Е. В. Законы сохранения плоской теории упругости // Вестник СибГАУ. 2014. Вып. 1(53). С. 79–81.
8. Сенашов С. И., Черепанова О. Н., Кондрин А. В., Филюшина Е. В. Расчет напряженного состояния во внутренних точках упругопластического стержня постоянного сечения : Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013618484.
9. Сенашов С. И., Черепанова О. Н., Кондрин А. В., Яхно А. Н., Филюшина Е. В. Построение упругопластической границы, возникающей при кручении прямолинейного стержня с сечением прямоугольной формы : Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 20146616472.
10. Галин Л. А. Упругопластические задачи. М. : Наука, 1984. 232 с.
11. Senashov S. I., Yakhno A. N. Some symmetry group aspects of a perfect plane plasticity system // J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013) 355202.
12. Senashov S. I., Yakhno A. N. Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity SIGMA 8 (2012), 071, 16 pages, <http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2012.071>. Special Issue “Geometrical Methods in Mathematical Physics”.
13. Senashov S. I., Yakhno A. N. Group analysis of solutions of 2-dimensional differential equations. Lie Groups: New research. Nova science publishers. New York, 2009. P. 123–138.
14. Senashov S. I., Yakhno A. N. Deformation of characteristic curves of the plane ideal plasticity equations by point symmetries Nonlinear analysis. 71(2009). P. 1274–1284.
15. Сенашов С. И. Законы сохранения в задаче о продольной плоской волне нагрузки в упругопластическом стержне // Вестник СибГАУ. 2011. Вып. 3(36). С. 82–85.
16. Сенашов С. И. Черепанова О. Н., Кондрин А. В. Об упругопластическом кручении стержня // Вестник СибГАУ. 2013. Вып. 3(49). С. 100–103.

## References

1. Annin B. D., Cherepanov G. P. *Uprugo – plasticheskaya zadacha* [Elastic – plastic problem]. Novosibirsk : Nauka, 1983. 238 s. (In Russ.)
2. Galin L. A. *Ploskaya uprugo-plasticheskaya zadacha. PMM* [Flat elastic-plastic problem]. 1946, t. 10, v. 3, s. 367–386. (In Russ.)
3. Arutyunyan N. H., Abramyan B. L. *Kruchenie uprugih tel* [Torsion elastic bodies]. M. : Fizmatgiz, 1963. (In Russ.)
4. Kiryakov P. P., Senashov S. I., Yahno A. N. *Prilozhenie simmetriy izakonov sohraneniya k resheniyu differentsialnykh uravneniy* [Application of symmetries and conservation laws for the solution of differential equations]. Novosibirsk, Izd-vo SO RAN, 2001. 190 s. (In Russ.)
5. Senashov S. I., Gomonova O. V., Yahno A. N. *Matematicheskie voprosy dvumernykh uravneniy idealnoy plastichnosti* [Mathematical problems in the two-dimensional equations of ideal plasticity]. Krasnoyarsk. SibGAU, 2012. 137 s. (In Russ.)
6. Senashov S. I. Cherepanova O. N., Kondrin A. V. [Elastoplastic Bending of Beam] // *J. Siberian Federal Univ., Math. & Physics.*, 2014, 7(2), p. 203–208.
7. Senashov S. I., Filyushina E. V. [Conservation laws of the plane theory of elasticity] // *Vestnik SibGAU*, 2014, v. 1(53), s. 79–81. (In Russ.)
8. Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V., Filyushina E. V. *Raschet napryazhennogo sostoyaniya vo vnutrennih tochkah uprugoplasticheskogo sterzhnya postoyannogo secheniya* [The calculation of the stress state in the interior of elastic-plastic rod of constant cross section] : Svidetelstvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM № 2013618484 (In Russ.)
9. Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V., Yahno A. N., Filyushina E. V. *Postroenie uprugoplasticheskoy granitsyi, vznikayushey pri kruchenii pryamolineynogo sterzhnya s secheniem pryamougolnoy formy* [Construction of the elastoplastic boundary arising torsional straight rod with a cross section of rectangular shape] : Svidetelstvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM № 20146616472 (In Russ.)
10. Galin L. A. *Uprugoplasticheskie zadachi* [Elastoplastic problems]. M. : Nauka, 1984. 232 s. (In Russ.)
11. Senashov S. I., Yakhno A. N. [Some symmetry group aspects of a perfect plane plasticity system] // *J. Phys. A: Math. Theor.* 46 (2013) 355202.
12. Senashov S. I., Yakhno A. N. [Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity] *SIGMA* 8 (2012), 071, 16 pages, <http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2012.071>. Special Issue “Geometrical Methods in Mathematical Physics”.
13. Senashov S. I., Yakhno A. N. [Group analysis of solutions of 2-dimensional differential equations. Lie Groups: New research.]. *Nova science publishers, New York*, 2009, p. 123–138.

14. Senashov S. I., Yakhno A. N. [Deformation of characteristic curves of the plane ideal plasticity equations by point symmetries] *Nonlinear analysis* 71(2009), p. 1274–1284.

15. Senashov S. I. [Conservation laws in the problem of the longitudinal plane wave load in the elastic-plastic rod] // *Vestnik SibGAU*, 2011, v. 3(36), s. 82–85 (In Russ.).

16. Senashov S. I. Cherepanova O. N., Kondrin A. V. [An elastic-plastic torsion rod] // *Vestnik SibGAU*, 2013, v. 3(49), s. 100–103 (In Russ.).

© Сенашов С. И., Филюшина Е. В., 2014

**ТОЧНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ  
ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ «МЕЛКОЙ ВОДЫ»  
И ИХ ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ**

В. А. Чугунов

Институт математики и механики имени Н. И. Лобачевского  
Казанского федерального университета,  
Российская Федерация, 420008, Казань, ул. Кремлевская, д. 35  
E-mail: Vladimir.Chugunov@ksu.ru

*Многие важные физические процессы, связанные с движением сплошной среды и характеризующиеся малостью отношения характерного вертикального масштаба к характерному размеру по горизонтали моделируются уравнениями «мелкой воды» (МВ).. Например, такие явления как сход лавин, движение тонких слоев гранулированных материалов описываются, чаще всего, моделью Хуттера-Саваджа. Система уравнений, лежащая в основе этой модели, представляет модификацию уравнений МВ. Другим важным природным явлением, с точки зрения обеспечения жизнедеятельности населенных пунктов, расположенных в прибрежных зонах, является распространение по поверхности водоемов длинноволновых волн. Действительно среди стихийных бедствий одно из первых мест в мире занимают наводнения. Морские наводнения вызываются различными причинами: прохождением глубоких циклонов, подводными землетрясениями, извержениями подводных вулканов. Последние, на поверхности океанов и морей, вызывают образование волн, длина которых намного больше глубины соответствующих водоемов. Такие волны получили название «Цунами», от японских слов цу – гавань и нами – волна. Амплитуда волн «Цунами» в открытом океане невелика от 1 метра до 20–30 метров, а их длина достигает сотни километров и значительно превышает глубину океана, которая имеет порядок 4 км. При подходе такой волны к берегу скорость ее движения падает, а амплитуда резко возрастает, что в конечном итоге приводит к разрушению различного рода сооружений в береговой зоне и к ее затоплению. Следовательно, с точки зрения нормальной жизнедеятельностью приморских городов, портов и безотказной работы гидротехнических сооружений важно уметь прогнозировать степень воздействия волн «Цунами» на прибрежную зону. Такой прогноз может быть осуществлен методами математического моделирования процессов распространения и наката волн «Цунами» на берег. Выше описанные особенности данного явления приводят к тому, что в качестве математической модели используются уравнения МВ.*

*Следует отметить, что уравнения МВ относятся к классу нелинейных уравнений в частных производных и их решение в общем виде возможно лишь на основе численных методов. Однако интерес к аналитическим методам не ослабевает. Это связано с тем, что аналитические методы позволяют оценить качественное поведение изучаемого объекта, вскрыть его основные особенности, не прибегая к многочисленным вычислениям. Кроме того, аналитические решения часто служат единственным обоснованием применимости того или иного численного алгоритма.*

*Основной целью настоящей работы является получение точных и приближенно-аналитических решений уравнений МВ применительно к вышеописанным природным явлениям.*

*Ключевые слова: уравнениями мелкой воды, точных и приближенно-аналитические решения, физическая интерпретация решений.*

## **EXACT AND APPROXIMATE SOLUTIONS OF ONE-DIMENSIONAL EQUATION OF THE “SHALLOW WATER” AND THEIR PHYSICAL INTERPRETATION**

V. A. Chugunov

Institute of Mathematics and Mechanics named after N. I. Lobachevsky  
Kazan Federal University,  
35, Kremlin str., Kazan, 420008, Russian Federation.  
E-mail: Vladimir.Chugunov@ksu.ru

*Many important physical processes associated with the motion of a continuous medium, and characterized by the smallness of the ratio of the characteristic vertical scale to the characteristic size of the horizontal modeling equations “shallow water” (CF). For example, phenomena such as avalanches, the movement of thin layers of granular materials are described, often modeled Hutter-Savage. The system of equations underlying the model, a modification of the equations of CF. Another important natural phenomenon from the perspective of the life support of the settlements located in coastal areas, is spread over the surface waters of long-wavelength waves. Indeed of natural disasters is one of the first places in the world occupy the flood. Sea floods caused by various factors: the passage of deep cyclones, underwater earthquakes, eruptions of underwater volcanoes. The latter, on the surface of oceans and seas, cause the formation of waves whose length is much greater than the depth of the water body. Such waves are called “Tsunami”, from the Japanese words tsu – harbor and us – wave. The amplitude of the waves “Tsunami” in the open ocean is small from 1 meter up to 20–30 meters, and their length is hundreds of kilometers and significantly greater than the depth of*

the ocean, which is of the order of 4 km. With the approach of such a wave to the shore its velocity decreases and the amplitude increases dramatically, which ultimately leads to the destruction of various types of structures in the coastal zone and its flooding. Therefore, from the point of view of normal life activity of coastal cities, ports, and reliable operation of hydraulic structures it is important to be able to predict the impact of the waves "Tsunami" on the coastal zone. This forecast can be done by means of mathematical modeling of the propagation of waves rolling and "Tsunami" on the shore. The above described features of this phenomenon leads to the fact that as a mathematical model equations are used CF.

It should be noted that the equation MV belong to a class of nonlinear partial differential equations and their solution in the general form is possible only on the basis of numerical methods. However, interest in analytical methods unabated. This is due to the fact that analytical methods allow us to estimate the qualitative behavior of the object under study, to reveal its main features without resorting to numerous calculations. In addition, analytical solutions are often the only justification for the applicability of a numerical algorithm.

The main purpose of this paper is to provide exact and approximate analytical solutions of CF in relation to the above natural events.

*Keywords:* shallow water equations, exact and approximate analytical solutions, physical interpretation of the solutions.

## 1. Симметрии одномерных уравнений МВ

Рассмотрим одномерную систему уравнений МВ, записанную в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(\hat{u}h)}{\partial \hat{x}} &= 0; \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \beta \frac{\partial h}{\partial \hat{x}} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Как правило,  $h$  – толщина движущегося слоя;  $\hat{u}$  – средняя по сечению слоя скорость;  $t$  – время;  $\hat{x}$  – пространственная координата.

Методами классического группового анализа [7; 8] было доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.** Система дифференциальных уравнений (1) допускает бесконечномерную алгебру Ли инфинитезимальных операторов, соответствующих группам преобразований, структура которой определяется формулой  $L_5 \oplus L_\infty$ , где алгебра  $L_5$  задается базисом

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, X_2 = \frac{\partial}{\partial \hat{x}}, X_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + \hat{x} \frac{\partial}{\partial \hat{x}}, \quad (2)$$

$$X_4 = \hat{x} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + 2h \frac{\partial}{\partial h} + \hat{u} \frac{\partial}{\partial \hat{u}}, \quad X_5 = t \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + h \frac{\partial}{\partial \hat{u}}, \quad (3)$$

а алгебра  $L_\infty$  определяется одним базисным оператором вида

$$X_\infty = Z(\hat{u}, h) \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + T(\hat{u}, h) \frac{\partial}{\partial t}. \quad (4)$$

Здесь функции  $Z(\hat{u}, h)$ ,  $T(\hat{u}, h)$  определяются линейными уравнениями:

$$\begin{aligned} Z_{\hat{u}} - \hat{u} T_{\hat{u}} + h T_h &= 0; \\ Z_h - \hat{u} T_h + \beta T_{\hat{u}} &= 0. \end{aligned}$$

Отметим, что неполная система базисных операторов для уравнений (1) была ранее приведена в работе [9].

В работах [10; 11] были подробно исследованы различные типы инвариантных решений системы (1), с помощью которых решен ряд физически интересных задач. Так, например, показано [10], решение задачи о распаде разрыва для системы (1) описывается частично инвариантным решением относительно оператора  $X_2$  и имеет вид

$$\begin{cases} h = \frac{1}{9\beta} \left( 2\sqrt{\beta h_0} - \frac{\hat{x} - \ell}{t} \right)^2, \\ \hat{x}_* < \hat{x} < \hat{x}_0, \\ \hat{u} = 2\sqrt{\beta} (\sqrt{h_0} - \sqrt{h}), \\ h = h_0, \hat{u} = 0, \quad \hat{x} \leq \hat{x}_*, \end{cases} \quad (5)$$

где  $h_0, \ell$  – начальная толщина слоя, начальное положение разрыва соответственно, а подвижные границы  $\hat{x}_*, \hat{x}_0$  определяются равенствами

$$\hat{x}_* = \ell - \sqrt{\beta h_0} t, \quad (6)$$

$$\hat{x}_0 = \ell + 2\sqrt{\beta h_0} t. \quad (7)$$

Полученное решение можно трактовать как рассыпание слоя гранулированного материала без учета трения. На практике, при исследовании процесса движения сыпучих материалов (схода лавин в том числе) наличие трения играет существенную роль и необходимо в модели учитывать этот эффект, что и делает модель Хуттера–Саваджа [2]. Как уже отмечалось, при определенных условиях [10; 11], эта модель, путем невырожденной замены переменных, сводится к системе (1). Если к решению (5)–(7) применить обратное преобразование, то свойство быть решением соответствующей системы уравнений сохраняется, а условие на границе  $\hat{x}_*$  наруша-

ется, то есть преобразованное решение (5)–(7) перестает быть решением задачи о распаде разрыва для модели Хуттера–Саваджа.

Для построения решения задачи вышеуказанной задачи воспользуемся тем фактом, вытекающим из теоремы 1, что система (1) допускает бесконечномерную алгебру Ли, за счет оператора  $X_\infty$ , а следовательно, может быть линеаризована. Очевидно, это будет справедливо и для вышеупомянутой модели. Следует отметить, что процесс натекания длинноволновой волны на берег водоема моделируется системой уравнений, которая при определенных условиях подобна модели Хуттера–Саваджа, а следовательно, может быть линеаризована.

Построению решения задачи о распаде разрыва с учетом трения посвящен второй параграф, а решения, описывающие процесс наката длинноволновых волн на берег водоема, рассматриваются в третьем параграфе данной работы.

## 2. Задача о распаде разрыва модели Хуттера–Саваджа

Вывод уравнений Хуттера–Саваджа можно найти в работах [2; 3]. В одномерном (по пространству) случае эти уравнения приобретают следующий вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + K \cos \zeta g \frac{\partial h}{\partial x} = \cos \zeta \left( \tan \zeta - \lambda \frac{u}{|u|} \right) g, \quad (8)$$

где  $\lambda = \tan \delta$ ,  $g$  – ускорение свободного падения;  $K = K(\delta, \varphi)$  – коэффициент, зависящий от внутреннего трения среды и от трения о подстилающую поверхность,  $\delta, \varphi, \zeta$  – угол сухого трения, угол внутреннего трения, угол наклона подстилающей поверхности. Для классической задачи о распаде разрыва  $\zeta = 0$ . В дальнейшем для простоты рассуждений будет рассмотрен именно этот случай.

Переходя к безразмерным величинам, введем вертикальный параметр масштабирования  $h_0$ , характеризующий начальную толщину слоя, запишем

$$x = \frac{h_0 K}{\lambda} X, \quad t = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{h_0 K}{g}} \tau, \quad u = \sqrt{g h_0 K} U, \quad h = h_0 H. \quad (9)$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \tau} + \frac{\partial(UH)}{\partial X} &= 0; & \tau > 0, \quad -\infty < X < \infty, \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial X} &= -\frac{U}{|U|}, & \tau > 0, \quad -\infty < X < \infty. \end{aligned} \quad (10)$$

Очевидно, что для рассматриваемой задачи начальными условиями для системы (10) будут

$$\begin{aligned} H(X,0) &= 1, \quad X \in (-\infty, 0], \quad H(X,0) = 0, \quad X \in (0, \infty], \\ U(X,0) &= 0, \quad X \in (-\infty, \infty). \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что качественное поведение решения рассматриваемой задачи, особенно в начальные моменты времени, должно совпадать с аналогичной задачей без учета трения и рассмотренной в первом параграфе. Поэтому можно предполагать, что и в этом случае возникают два фронта: правый фронт нулевой толщины –  $X_0$  и левый фронт нулевой скорости –  $X_*$ . Ясно, что для решения поставленной задачи достаточно найти функции  $H$  и  $U$  в интервале  $X \in [X_*, X_0]$ , а также величины  $X_*$  и  $X_0$ . Из физических соображений ясно, что  $U \geq 0$ . Следовательно, правая часть второго уравнения системы (10) будет равна  $-1$ . В этом случае, как уже отмечалось в первом параграфе, замена  $\hat{U} = U + \tau$ ,  $\hat{X} = X - 0.5\tau^2$  приводит систему (10) к уравнениям (1). Таким образом, становится очевидным возможность использования результатов первого параграфа и для линеаризации системы (10) можно воспользоваться преобразованием, которое приведено в работе [10] и следует из теоремы 1. Однако в этом случае, в новых переменных, довольно трудно сформулировать условия, в которые перейдут начальные данные (11). С этой точки зрения более эффективными оказываются преобразования, предложенные в работе [12] для линеаризации уравнений, составляющих математическую модель процесса наката длинноволновых волн на берег водоема. Итак, в рассматриваемой системе уравнений (10) произведем замену

$$H = -X + \eta. \quad (12)$$

При этом система (10) приводится к виду, в котором правые части обоих уравнений равны 0:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{\partial(U(\eta - X))}{\partial X} &= 0; & \tau > 0, \quad -\infty < X < \infty, \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial \eta}{\partial X} &= 0, & \tau > 0, \quad -\infty < X < \infty. \end{aligned} \quad (13)$$

Дальнейшие преобразования проводятся при помощи введения новых координат вида:

$$\hat{t} = t + U, \quad q = \eta - X. \quad (14)$$

Далее произведем замену

$$\psi = \eta + 0,5U^2, \quad \sigma = \sqrt{q}. \quad (15)$$

Следует заметить, что с учетом (12), (14) и (15) можно записать  $\sigma^2 = H$ . Далее, поскольку  $H \geq 0$ ,  $\sigma$  является вещественным параметром и из условий (11) вытекает, что  $0 \leq \sigma \leq 1$ . Очевидно, что  $\sigma = 0$  соответствует правому фронту, а  $\sigma = 1$  – левому фронту. Преобразования (14), (15) приводят к системе

$$-U_{\hat{t}} + \frac{\Psi_{\sigma}}{2\sigma} = 0, \quad -(\sigma^2 U)_{\sigma} + 2\sigma \Psi_{\hat{t}} = 0.$$

Исключение  $U$  из этой системы позволяет сформулировать следующее уравнение

$$4\Psi_{\hat{t}\hat{t}}\sigma - (\sigma\Psi_{\sigma})_{\sigma} = 0, \quad \hat{t} > 0, \quad 0 < \sigma < 1.$$

Далее можно записать [12]:

$$\psi = \eta + 0,5U^2 = \varphi_{\hat{t}}, \quad U = \frac{\varphi_{\sigma}}{2\sigma}, \quad \eta = \varphi_{\hat{t}} - \frac{\varphi_{\sigma}^2}{8\sigma^2}. \quad (16)$$

Путем простой подстановки нетрудно убедиться, что функция  $\varphi$  удовлетворяет тому же уравнению, что и функция  $\psi$ :

$$4\varphi_{\hat{t}\hat{t}}\sigma - (\sigma\varphi_{\sigma})_{\sigma} = 0, \quad \hat{t} > 0, \quad 0 < \sigma < 1. \quad (17)$$

Уравнение (17) представляет собой уравнение в частных производных второго порядка, и для нахождения единственного решения необходимо ввести начальные условия при  $\hat{t} = 0$  и граничные условия при  $\sigma = 0$  и  $\sigma = 1$ . С учетом (16), начальные условия можно записать так:

$$\varphi(\sigma, 0) = P(\sigma), \quad \varphi_{\hat{t}}(\sigma, 0) = F(\sigma), \quad (18)$$

где

$$P(\sigma) = \int_0^{\sigma} 2\sigma' U(\sigma', 0) d\sigma', \quad F(\sigma) = \eta(\sigma, 0) + 0,5U^2(\sigma, 0). \quad (19)$$

Равенства (16) и условия на границах  $X_*$  и  $X_0$ , позволяют записать:

$$\varphi < \infty, \quad 0 \leq \sigma < 1, \quad (20)$$

$$\varphi_{\sigma} = 0, \quad \sigma = 1. \quad (21)$$

Таким образом, решение задачи (10)–(11) сводится к решению уравнения (17) с начальными условиями (18) и граничными условиями (20), (21).

Заметим, что рассматриваемая задача характеризуется отсутствием движения материала в начальный момент времени – условия (11), и, далее, учитывая форму слоя в виде «ступеньки», равенствам (19) можно придать следующий вид:

$$P(\sigma) = 0, \quad F(\sigma) = \sigma^2. \quad (22)$$

Для решения задачи (17), (18), (20)–(22) применим интегральное преобразование Фурье–Бесселя:

$$\bar{\varphi}(\rho, \hat{t}) = \int_0^1 \sigma J_0(\rho\sigma) \varphi(\sigma, \hat{t}) d\sigma. \quad (23)$$

При этом функция  $\varphi(\sigma, \hat{t})$  восстанавливается формулой

$$\varphi(\sigma, \hat{t}) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}(\rho_k, \hat{t})}{J_0^2(\rho_k)} J_0(\rho_k \sigma). \quad (24)$$

Здесь  $J_0(x)$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, а  $\rho_k$  удовлетворяет уравнению

$$J_1(\rho_k) = 0, \quad (25)$$

где  $J_1(x)$  – функция Бесселя первого рода первого порядка.

После несложных преобразований находим

$$\bar{\varphi}(\rho_k, \hat{t}) = \frac{4J_0(\rho_k)}{\rho_k^3} \sin \frac{\rho_k \hat{t}}{2}.$$

Подставляя это выражение в формулу (24), получаем искомый потенциал  $\varphi(\sigma, \hat{t})$ :

$$\varphi(\sigma, \hat{t}) = \frac{\hat{t}}{2} + 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_k \sigma)}{\rho_k^3 J_0(\rho_k)} \sin \left( \frac{\rho_k \hat{t}}{2} \right). \quad (26)$$

Таким образом, решение задачи (17), (18), (20)–(22), к которой была сведена исходная задача (10)–(11), найдено. Далее, используя (14), (16), (26), нетрудно построить окончательное решение поставленной задачи (10), (11). В литературе эта задача получила название «Dam Break with Coulomb Friction». Итак, точное решение задачи (10), (11) задается формулами:

$$X = -\sigma^2 + \varphi_{\hat{t}} - \varphi_{\sigma}^2 / (8\sigma^2), \quad t = \hat{t} - \varphi_{\sigma} / (2\sigma), \quad \sigma = \sqrt{H}, \quad (27)$$

где  $\varphi(\sigma, \hat{t})$  определяется равенством (26). Формулы (27) определяют закон движения сечения слоя рассыпающегося материала, в котором задана толщина  $H$ , в параметрическом виде.

На рис. 1 представлены результаты расчетов по формулам (26), (27), которые показывают изменения свободной поверхности слоя рассыпающегося материала в зависимости от времени  $t$ . Расчеты также показывают, что левый фронт останавливается при  $t = 1,529$  на расстоянии от начала координат  $X_* = -0,7216$ , а правый фронт приходит в стационарное состояние при  $t = 2$  в точке  $X_0 = 2$ . При этом закон движения правого фронта находится из первого выражения (27) и формулы (26), если положить  $\sigma = 0$ :

$$X_0 = 0,5 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(0,5\rho_k \hat{t})}{\rho_k^2 J_0(\rho_k)} - 2 \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(0,5\rho_k \hat{t})}{\rho_k J_0(\rho_k)} \right]^2, \quad (28)$$

$$t = \hat{t} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(0,5\rho_k \hat{t})}{\rho_k J_0(\rho_k)}.$$

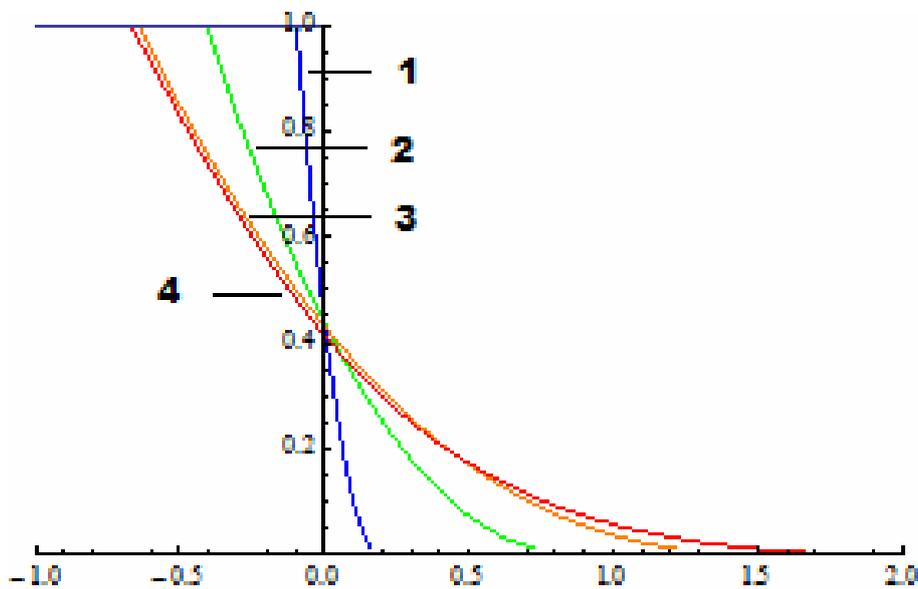


Рис. 1. Результаты расчетов по формулам (26), (27), иллюстрирующие динамику рассыпания слоя гранулированного материала:  
1 –  $t = 0,1$ ; 2 –  $t = 0,5$ ; 3 –  $t = 1$ ; 4 –  $t = 2$

Интервал изменения параметра  $\hat{t}$  подбирается так, чтобы время  $t$  менялось от 0 до 2. Таким образом, зависимость  $X_0(t)$  определяется равенствами (28) в параметрическом виде. Результаты вычислительных экспериментов показывают, что построенная зависимость является параметрической записью функции  $-2t + 0,5t^2$  – характеристикой рассматриваемых уравнений, на которой  $H = 0$ , и, следовательно, выражающей закон движения правого фронта. Этот факт подтверждает правильность найденного решения.

Аналогично находится и левый фронт, но при  $\sigma = 1$ :

$$X_* = -4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(0,5\rho_k t)}{\rho_k^2}, \text{ так как } t = \hat{t}. \quad (29)$$

Эта функция уже не совпадает с характеристикой рассматриваемых уравнений, как это было в случае отсутствия трения (см. первый параграф). Существенным отличием полученного решения от решения в первом параграфе заключается в том, что наличие трения приводит к существованию стационарного решения. На рис. 1 стационарному решению соответствует кривая под номером 4.

### 3. Задача о набегании длинноволновой волны на берег водоема

Выпишем систему уравнений мелкой воды применительно к описанию наката волны на берег [4; 5; 12]:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + g \frac{\partial \eta'}{\partial x'} = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u' \frac{\partial ([\eta' + \varphi'(x')]u')}{\partial x'} = 0. \quad (31)$$

Здесь  $\eta'$  – возвышение волны над равновесным положением поверхности океана (смещение уровня воды);  $u'$  – средняя по глубине скорость волнового потока;  $t'$  – время;  $g$  – ускорение свободного падения;  $x'_s(t)$  – положение границы вода-суша;

$$\eta'_s(t) = \eta'(-x'_s(t), t'); \quad (32)$$

$z = -\varphi'(x')$  – функция, описывающая рельеф дна, например (типичный случай для исследования наката волн на берег)

$$\varphi'(x') = \begin{cases} h'(x'), & x < l, \\ h_0, & x > l, \end{cases} \quad (33)$$

где  $h'(x') = \alpha'x'$ ,  $\alpha'$  – характеризует наклон поверхности дна к равновесной поверхности океана;  $l$  – положение границы резкого изменения рельефа дна.

Из (32) и (33) следует, что

$$\eta'_s(t) = \alpha'x'_s(t). \quad (34)$$

Система уравнений (30), (31) должна быть решена при следующих начальных и граничных условиях:

$$t' = 0, \quad \eta'_s(x', 0) = f'(x'); \quad (35)$$

$$u'(x', 0) = 0. \quad (36)$$

Условия (35), (36) моделируют начальную волну вдали от береговой линии, возникшую, например, в результате подводного землетрясения или извержения вулкана.

Одним из граничных условий является условие при  $x \rightarrow \infty$ . Предполагая, что вдали от начальной волны поверхность океана остается невозмущенной, можно записать

$$x \rightarrow \infty, \quad \lim \eta'(x', t'0) = 0, \quad (37)$$

$$\lim u'(x', t'0) = 0. \quad (38)$$

Условие на подвижной границе, очевидно, будет иметь вид

$$x' = -x'_s(t), \quad \eta'(-x'_s(t), t') = -\varphi'(-x'_s). \quad (39)$$

Введем характерные масштабы процесса:  $h_0$  – характерная глубина океана;  $u_0$  – характерная скорость движения жидкости;  $c_0$  – характерная скорость движения волны;  $t_0 = \frac{l}{c_0}$  – характерное время процесса;  $\eta_0$  – характерная амплитуда волны.

Используя введенные масштабы, перейдем к безразмерным переменным:

$$x_s = \frac{x'_s}{l}; \quad t = \frac{t'}{t_0}; \quad u = \frac{u'}{u_0}; \quad x = \frac{x'}{l}; \quad \eta = \frac{\eta'}{\eta_0}; \quad \varphi(x) = \frac{\varphi'(x')}{h_0}. \quad (40)$$

Очевидно, что величины  $h_0$ ,  $\eta_0$ ,  $l$  известны из условий задачи. Скоростные масштабы определяются из анализа размерностей уравнений (30)–(31). В результате получаем

$$c_0 = \sqrt{gh_0}, \quad u_0 = \eta_0 \sqrt{\frac{g}{h_0}}. \quad (41)$$

Учитывая (40)–(41), система (30), (31) в безразмерном виде запишется так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (42)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u(\varphi(x) + \varepsilon \eta)] = 0, \quad (43)$$

где  $\varepsilon = \frac{\eta_0}{h_0}$  малый параметр, поскольку рассматривается случай, когда амплитуда волны значительно меньше глубины океана.

Начальное условие в новых переменных принимает следующую форму:

$$t = 0, \quad \eta(x, 0) = f(x), \quad (44)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad (45)$$

а граничные условия запишутся в виде

$$x = -x_s(t), \quad \varepsilon \eta(-x_s, t) = -\phi(-x_s), \quad (46)$$

$$x \rightarrow \infty, \quad \lim \eta(x, t) = \lim u(x, t) = 0. \quad (47)$$

Наличие малого параметра дает возможность приближенно линеаризовать поставленную задачу. Для получения равномерно пригодного разложения по  $\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в уравнениях (42) и (43), сделаем следующую замену пространственной переменной:

$$x = y - \varepsilon x_m, \quad (48)$$

где  $x_m = x_s / \varepsilon$ , поскольку  $x_s = O(\varepsilon)$ . Неизвестные величины будем искать в виде рядов по степеням  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} u &= u_l + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2), \\ \eta &= \eta_l + \varepsilon \eta_1 + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (49)$$

$$x_m = x_l + \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2).$$

После несложных преобразований находим, что главные члены разложений (49) должны удовлетворять следующим уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_l}{\partial t} + \frac{\partial \eta_l}{\partial y} &= 0; \quad \frac{\partial u_l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (u_l \varphi(y)) = 0, \\ x_l &= \frac{1}{\alpha} \eta_l(0, t), \end{aligned} \quad (50)$$

где  $\alpha = \varphi'(0)$ .

Таким образом, для получения главных членов разложений (49) необходимо решить систему (50) в фиксированной области  $]0, \infty[$ . При этом в точке  $y = 0$ ,  $\varphi(y) = 0$ , то есть во втором уравнении системы (50) имеется вырождающийся коэффициент. Этот факт приводит к тому, что при  $y \rightarrow 0$  следует наложить на искомые функции  $u_l$ ,  $\eta_l$ , условие их ограниченности.

От уравнений (50) можно перейти к исследованию одного уравнения относительно  $\eta_l$ , которое получается из последних двух уравнений системы (50) исключением функции  $u_l$ :

$$\frac{\partial^2 \eta_l}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi(y) \frac{\partial \eta_l}{\partial y} \right) = 0, \quad 0 < y < \infty. \quad (51)$$

Начальными условиями для уравнения (51) будут:

$$t = 0, \quad \eta_l = f(y), \quad \frac{\partial \eta_l}{\partial t} = 0, \quad (52)$$

которые легко находятся из (45), (46) с учетом того, что  $x_s(0) = x_m(0) = 0$ .  
Граничными условиями для рассматриваемого уравнения (51), очевидно, являются

$$x \rightarrow 0, \quad \eta_l < \infty, \quad (53)$$

$$x \rightarrow \infty, \quad \eta_l \rightarrow 0. \quad (54)$$

Задача (51)–(54) корректно поставлена и имеет единственное решение. Решив эту задачу, легко находится закон движения границы суша–вода (урез):

$$x_m(t) = \frac{1}{\alpha} \eta_l(0, t). \quad (55)$$

Заменяя  $y$  на  $x + \varepsilon x_l$ , согласно (49), получаем равномерно пригодное для всех  $x \geq -\varepsilon x_l$  решение исходной задачи с точностью  $O(\varepsilon)$ .

Задачу (51)–(54) будем решать, используя общую теорию интегральных преобразований [13]. Строго говоря, рассматриваемая задача требует построение интегрального преобразования в полубесконечной области. Однако, применение интегрального преобразования Лапласа по переменной  $t$  приводит к значительным трудностям и громоздким выражениям при построении оригинала, а применение интегрального преобразования по переменной  $y$  в области  $]0, \infty[$  сопряжено с вычислением спектральной функции, что также представляет из себя трудоемкую задачу, особенно в тех случаях, когда функция  $\phi(y)$  имеет сложный вид. По этой причине рассмотрим ограниченную область  $]0, L[$ . Граничное условие на  $L$  выберем, для простоты рассуждений, в виде

$$y = L, \quad \eta_l = 0. \quad (56)$$

Так как уравнение (51) гиперболического типа и носитель функции  $f(y)$  сосредоточен в интервале  $[y_l, y_r]$ , то условие (56) начинает влиять на решение задачи, когда возмущения, вызванные начальными данными, достигнут точки  $y = L$ . Так как характеристики уравнения (51) имеют вид

$$\int_0^y \frac{\partial \xi}{\sqrt{\phi(\xi)}} = \pm t + C, \quad C = \text{const}, \quad (57)$$

то легко найти время, за которое возмущение дойдет до  $L$ . Действительно, из (57) получаем

$$\int_{y_r}^L \frac{\partial \xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} = t^*,$$

где  $t^*$  – искомое время. Таким образом, если процесс изучается в интервале времени  $[0, T]$ , то величину  $L$  следует выбрать из условия

$$\int_{y_r}^L \frac{\partial \xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} > T. \quad (58)$$

В большинстве случаев вдали от береговой линии можно положить  $\varphi(\xi) = 1$  и условие (59) принимает простую форму:  $L > T + y_r$ . Следовательно, в задаче (51)–(54) граничное условие (54) можно заменить условием (56).

Введем в рассмотрение интегральное преобразование по пространственной переменной  $y$  с произвольным ядром  $K(\mu, y)$ :

$$\bar{\eta}_l = \int_0^L \eta_l(y, t) K(\mu, y) dy, \quad (59)$$

где  $\mu$  – параметр интегрального преобразования.

Применяя это преобразование к задаче (51)–(53), (56) получаем уравнение для ядра  $K(\mu, y)$  и для изображения искомой функции.

$$\frac{d}{dy} \left( \varphi(y) \frac{dK}{dy} \right) + \mu^2 K = 0, \quad (60)$$

$$y = 0, \quad K < \infty, \quad (61)$$

$$y = L, \quad K = 0, \quad (62)$$

$$\frac{d^2 \bar{\eta}_l}{dt^2} + \mu^2 \bar{\eta}_l = 0, \quad (63)$$

$$t = 0, \quad \bar{\eta}_l = \bar{f}(\mu), \quad \bar{\eta}_t = 0. \quad (64)$$

Задача (60)–(62) является задачей Штурма-Лиувилля. [13]. Пусть  $\{\mu_k\}$  последовательность собственных чисел, а  $K(\mu_k, y)$  – система нормированных собственных функций. Тогда используя свойства полноты и ортогональности собственных функций, можно записать формулу обращений для интегрального преобразования (60) в следующем виде

$$\eta_l(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\eta}_l(\mu_k, t) K(\mu_k, y). \quad (65)$$

Из системы (63), (64) находим  $\overline{\eta}_l(u_k, t)$ .

$$\overline{\eta}_l(\mu_k, t) = \overline{f}(\mu_k) \cos \mu_k t. \quad (66)$$

Подставляя (66) в (65), получаем решение задачи (51)–(53), (56):

$$\eta_l(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^L f(y) K(\mu_k, y) dy K(\mu_k, y) \cos u_k t. \quad (67)$$

Из первого уравнения системы (50) легко находится скорость  $u_l$ :

$$u_l = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K'_y(\mu_k, y)}{\mu_k} \int_0^L f(y) K(\mu_k, y) dy K(\mu_k, y) \sin \mu_k t. \quad (68)$$

Подставляя (67) в (55) находим закон движения границы вода-суша.

$$x_l(t) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^L f(\xi) K(\mu_k, \xi) d\xi \cdot K(\mu_k, 0) \cos \mu_k t. \quad (69)$$

Возвращаясь в выражениях (67), (68) к переменной  $x$ , то есть, подставляя вместо  $y$   $x + \varepsilon x_l(t)$ , получаем равномерно пригодное решение поставленной задачи на всем диапазоне изменений  $x \in [-\varepsilon x_l(t), L]$ .

Рассмотрим конкретный пример использования полученных результатов. Пусть рельеф дна водоема описывается функцией  $\varphi(y)$  следующего вида:

$$-\varphi(y) = \alpha y \quad \infty < y < \infty. \quad (70)$$

Этот случай интересен тем, что, уравнения (42), (43) допускают точную линеаризацию с произвольным  $\varepsilon$ , поскольку они сводятся к системе, рассмотренной в параграфе 2, а следовательно, и к системе первого параграфа. Как уже отмечалось задача о накате волны на берег при условии (70) была рассмотрена в работе [12]. Таким образом, представляет интерес сравнение точного решения задачи [12] с решением (67)–(69), полученным на основе приближенной линеаризации.

Если  $\varphi(y)$  имеет вид (70), то, как следует из (34), безразмерный наклон  $\alpha$  определяется выражением  $\alpha = \alpha' \frac{l}{h_0}$ . Так как в этом случае нет строго масштаба для глубины, то за  $h_0$  можно принять глубину, которая достигается на расстоянии  $l$  от уреза, то есть  $h_0 = \alpha' l$ . Поэтому можно считать  $\alpha = 1$ .

Решение задачи Штурма-Лиувилля (60)–(62) в рассматриваемом примере легко находится. Подставляя это решение в формулы (67)–(69), получаем

$$\eta_l(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_0(2\mu_k \sqrt{x + \varepsilon x_l(t)})}{L \cdot J_1^2(2\mu_k \sqrt{L})} \cos \mu_k t \cdot \int_0^L f(\xi) J_0(2\mu_k \sqrt{\xi}) d\xi, \quad (71)$$

$$u_l(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_1(2\mu_k \sqrt{x + \varepsilon x_l(t)})}{L \cdot J_1^2(2\mu_k \sqrt{L}) \sqrt{x + \varepsilon x_l(t)}} \sin \mu_k t \cdot \int_0^L f(\xi) J_0(2\mu_k \sqrt{\xi}) d\xi, \quad (72)$$

$$x_l(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \mu_k t}{L \cdot J_1^2(2\mu_k \sqrt{L})} \cdot \int_0^L f(\xi) J_0(2\mu_k \sqrt{\xi}) d\xi, \quad (73)$$

где  $\mu_k$  являются корнями уравнения

$$J_0(2\mu_k \sqrt{L}) = 0. \quad (74)$$

Как и ранее  $J_0(z)$ ,  $J_1(z)$  – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков, соответственно.

Формулы (71)–(73) описывают динамику профиля волны, скорости течения и границы раздела вода-суша.

Следуя работе [12] преобразуем уравнения (42), (43) при условии (70), используя следующие преобразования переменных.

$$u(\sigma, \hat{t}) = -\frac{1}{2\sigma} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}, \quad (75)$$

$$\eta(\sigma, \hat{t}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{1}{2\sigma} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right)^2, \quad (76)$$

$$x(\sigma, \hat{t}) = \sigma^2 - \varepsilon \eta(\sigma, \hat{t}), \quad (77)$$

$$t(\sigma, \hat{t}) = \hat{t} + \varepsilon u(\sigma, \hat{t}), \quad (78)$$

где потенциал  $\varphi$  удовлетворяет линейному гиперболическому уравнению вида:

$$4\varphi_{\hat{t}\hat{t}}\sigma - (\sigma\bar{\varphi}_{\sigma})_{\sigma} = 0, \quad \hat{t} > 0, \quad 0 < \sigma < \infty. \quad (79)$$

Уравнение (79) решается при условии

$$\hat{t} = 0, \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{t}} = f(\sigma^2). \quad (80)$$

Заметим, что второе условие (80) при переходе к физическим координатам  $x$ ,  $t$  даст начальное условие (44) только в случае когда  $\max|f'(x)| \cdot \varepsilon \ll 1$ . Это условие, как правило, выполняется. В противном случае происходит быстрое обрушение волны и задача (42)–(45) теряет смысл.

Решение задачи (79), (80) в работе [12] находится точно и имеет следующий вид:

$$\varphi(\sigma, \hat{t}) = 2 \int_0^{\infty} f(b^2) G(b, \sigma, \hat{t}) db, \quad (81)$$

где  $G(b, \sigma, \hat{t})$  – функция Грина, определяемая формулой

$$G(b, \sigma, \hat{t}) = \begin{cases} 0, & \frac{1}{2} \hat{t} < |\sigma - b|, \\ \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{b}{\sigma}}} K\left(\frac{\hat{t}^2 - 4(\sigma - b)^2}{16\sigma b}\right), & |\sigma - b| < \frac{1}{2} \hat{t} < |\sigma + b|, \\ \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\hat{t}^2 - 4(\sigma - b)^2}} K\left(\frac{16\sigma b}{\hat{t}^2 - 4(\sigma - b)^2}\right), & \frac{1}{2} \hat{t} > |\sigma + b|, \end{cases}$$

где  $K(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\sqrt{1 - z^2 \sin^2 v}}$ .

Зная потенциал  $\varphi(\sigma, \hat{t})$ , по формулам (75), (76) находятся функции  $u(\sigma, \hat{t})$ ,  $\eta(\sigma, \hat{t})$ , а формулы (77), (78) позволяют найти значения скорости и профиль волны в физической плоскости  $(t, x)$ . Это возможно только тогда, когда якобиан преобразований (77), (78) отличен от нуля. Можно показать, что равенство 0 якобиана достигается в тех точках, где крутизна волны  $\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$  становится бесконечно большой. Физически это означает, что в данном случае происходит обрушение волны и полученное решение справедливо лишь до точки обрушения. Ясно, что если волна не обрушивается на урезе, то она не обрушивается и при  $\sigma > 0$ , так как граница раздела вода–суша наиболее удалена от начального положения волны. Вычислительные эксперименты показывают, что существуют такие значения параметра  $\varepsilon$ , при которых обрушение волны не происходит. В каждом конкретном случае существует свое значение  $\varepsilon_k$  такое, что при  $\varepsilon < \varepsilon_k$  обрушение волны не наблюдается. Для сравнения двух решений рассматривались ситуации, удовлетворяющие этому условию. Кроме того, начальный профиль волны принимался в виде

$$f(y) = e^{-k(y-y_0)^2}, \quad 0 < y < \infty, \quad (82)$$

а параметр  $L = 25$ . При этом диапазон изменения времени  $t$  должен быть, согласно (58), следующий  $t \in [0, 8]$ ,  $y_0 = 1$ ,  $k = 4$ . На рис. 2 показаны

результаты расчетов, выполненные по формулам (71)–(74) – сплошные линии и по точным формулам (75)–(78), (81) – пунктирные линии. Случай *a* соответствует значению  $\varepsilon = 0,03$ , а случай *б* –  $\varepsilon = 0,01$ . Заметим, что критическое значение параметра  $\varepsilon$  для данного примера составляет  $\varepsilon_k = 0,033$ . Из рисунка видно (случай *б*)), что если параметр  $\varepsilon < \varepsilon_k$ , то приближенное решение достаточно точно отражает динамику уреза при накате волны на берег.

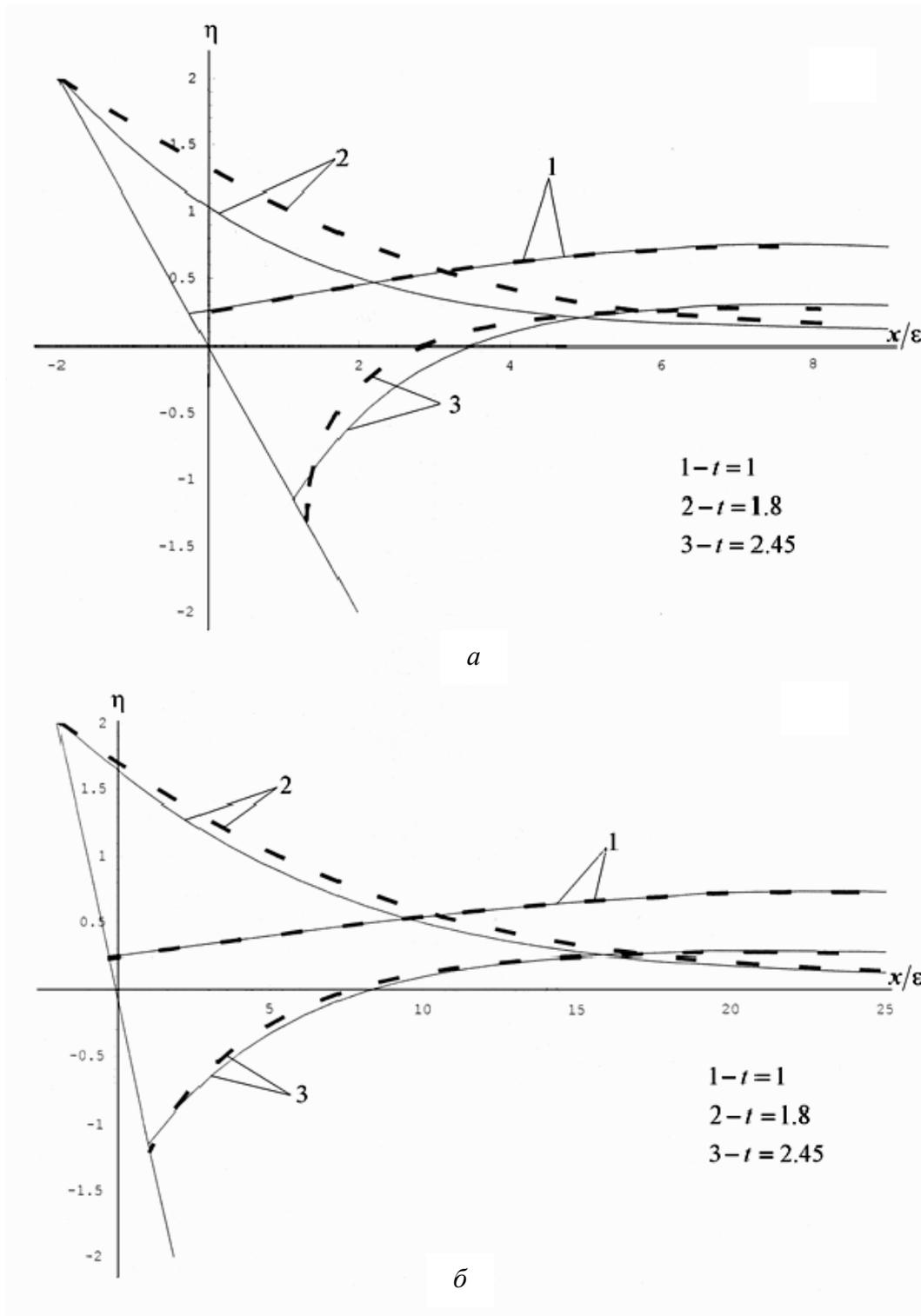


Рис. 2. Поведение поверхности океана в окрестности береговой линии

Если параметр  $\varepsilon$  имеет порядок  $\varepsilon_k$  (случай *a*)), то расхождения будут заметными. Это обусловлено тем, что в случае, когда  $\varepsilon$  имеет порядок  $\varepsilon_k$ , в определенный момент крутизна волны становится бесконечно большой, так как якобиан становится близким к 0. Однако, как показывают многочисленные вычислительные эксперименты, приближенные формулы описывают исследуемый процесс вполне удовлетворительно для любых  $\varepsilon < \varepsilon_k$ .

Таким образом, основными результатами данной работы следует считать то, что в ней на основе группового анализа подтверждена возможность линеаризации уравнений МВ. Этот факт позволил получить точные решения задачи о распаде разрыва с учетом и без учета трения. Эти решения могут служить для моделирования процессов, связанных с движением сыпучих материалов, в частности, схода лавин.

Кроме того, показано, что математическая модель наката волн на берег водоема при определенных условиях сводится к системе, для которой показана возможность точной линеаризации. Именно это обстоятельство позволило Carlier, George F [12] получить точное решение задачи о накате волны на берег постоянного наклона. Однако произвольная конфигурация дна водоема делает невозможным применение этого метода. Наличие малого параметра позволяет предложить приближенную процедуру линеаризации, которая позволяет аналитически решать задачи с различными конфигурациями профиля дна водоема. На примере, рассмотренном в [12], показана применимость предлагаемого приближенного метода.

### Библиографические ссылки

1. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. 2-е изд. М. : Мир. 1981. 408 с.
2. Savage S. B., Hutter K. The motion of a finite mass of granular material down a rough incline // J. Fluid Mech. 199, 1989. 177–215 p.
3. Gray N. Rapid Granular Avalanches // Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Vol. 11. Dynamic Response of Granular and Porous Materials under Large and Catastrophic Deformations. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003, 3–42 p.
4. Вольцингер Н. Е., Пясковский Р. В. Теория мелкой воды. Л. : Гидрометеиздат, 1977. 207 с.
5. Пелиновский Е. Н. Гидродинамика волн цунами. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 1996. 150 с.
7. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1987. 399 с.
8. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М. : Наука. 1983, 280 с.
9. Hydon P. E. Symmetry methods for differential equations. Cambridge : University Press, 2000. 220 p.

10. Chugunov V. A., Gray J. M. N. T., Hutter K. Exact solutions of the Savage-Hutter equations for one-dimensional granular flows // Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences. Preprint Series. NI03077 – GPF. 2003. 25 p.
11. Chugunov V. A., Gray J. M. N. T., Hutter K. Group Theoretic Methods and Similarity Solutions of the Savage-Hutter Equations // Dynamic Response of granular and Porous Materials under Large and Catastrophic Deformations. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. 250–261 p.
12. Carrier George F., Tai Tei Wu, Harry Yeh. Tsunami run-up and draw-down on a plane beach // J. Fluid Mech. Vol. 475. 2003. 24 p.
13. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физике // М. : Высш. шк., 1970. 710 с.

### References

1. Temam R. Uravneniya Navye-Stoksa. Teoriya i chislenny analiz. 2-e izd. M.: Mir. 1981. 408 s. (In Russ.)
2. Savage S. B., Hutter K. The motion of a finite mass of granular material down a rough incline // J. Fluid Mech. 199, 1989. 177–215 p. (In Russ.).
3. Gray N. Rapid Granular Avalanches // Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Volume 11. Dynamic Response of Granular and Porous Materials under Large and Catastrophic Deformations. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003, 3–42 p. (In Russ.).
4. Voltsinger N. E., Pyaskovsky R. V. Teoriya melkoy vody. Leningrad : Gidrometeoizdat, 1977. 207 s. (In Russ.).
5. Pelinovsky Ye. N. Gidrodinamika voln tsunami. Nizhny Novgorod : IPF RAN, 1996, 150 s. (In Russ.).
7. Ovsyannikov L. V. Gruppovoy analiz differentsialnykh uravneny. M. : Nauka, 1987, 399 s. (In Russ.).
8. Ibragimov N. Kh. Gruppy preobrazovany v matematicheskoy fizike. M. : Nauka, 1983. 280 s. (In Russ.).
9. Hydon P. E. Symmetry methods for differetial equations. Cambridge : University Press, 2000, 220 p. (In Russ.).
10. Chugunov V. A., Gray J. M. N. T., Hutter K. Exact solutions of the Savage-Hutter equations for one-dimensional granular flows // Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences. Preprint Series. NI03077 – GPF. 2003. 25 p.
11. Chugunov V. A., Gray J. M. N. T., Hutter K. Group Theoretic Methods and Similarity Solutions of the Savage-Hutter Equations // Dynamic Response of granular and Porous Materials under Large and Catastrophic Deformations. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003, 250–261 p.
12. Carrier George F., Tai Tei Wu, Harry Yeh. Tsunami run-up and draw-down on a plane beach // J. Fluid Mech., vol. 475. 2003. 24 p.
13. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fizike. M. : Vysshaya shkola, 1970. 710 s. (In Russ.).

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Аксенов Александр Васильевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет, Российская Федерация, Москва.

**Антамошкин Олеслав Александрович**, кандидат технических наук, доцент, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, Российская Федерация, Красноярск.

**Григорьев Юрий Михайлович**, доктор физико-математических наук, профессор, Северо-восточный федеральный государственный университет, Российская Федерация, Якутск.

**Козырев Анатолий Александрович**, аспирант, Московский государственный университет, Российская Федерация, Москва.

**Коюпченко Ирина Николаевна**, кандидат физико-математических наук, доцент, Сибирский федеральный университет, Российская Федерация, Красноярск.

**Кукарцев Владислав Викторович**, кандидат технических наук, доцент, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, Российская Федерация, Красноярск.

**Мелешко Сергей Васильевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Школа математики, Институт естественных наук, Технологический университет Суранари, Накхонратчасима, Таиланд.

**Сенашов Сергей Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, Российская Федерация, Красноярск.

**Тычков Иван Иванович**, старший преподаватель кафедры математических методов и информационных технологий Сибирского федерального университета, Российская Федерация, Красноярск.

**Филюшина Елена Владимировна**, кандидат физико-математических наук, доцент, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, Российская Федерация, Красноярск.

**Чугунов Владимир Аркадьевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный университет, Российская Федерация, Казань.

**Шишов Владимир Валерьевич**, доктор технических наук, профессор, Сибирский федеральный университет, Российская Федерация, Красноярск.

## INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Aksenov Aleksandr V.**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow State University, Russian Federation, Moscow.

**Antamoshkin Oleslav A.**, Candidate of Engineering Sciences, Siberian State University named after academician M. F. Reshetnev, Russian Federation, Krasnoyarsk.

**Grigoriev Yury M.**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, North-Eastern Federal State University, Russian Federation, Yakutsk.

**Kozyrev Anatoly A.**, Postgraduate student, Moscow State University, Russian Federation, Moscow.

**Koiupchenko Irina N.**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Siberian Federal University, Russian Federation, Krasnoyarsk.

**Kukarcev Vladislav V.**, Candidate of Engineering Sciences, Siberian State University named after academician M. F. Reshetnev, Russian Federation, Krasnoyarsk.

**Meleshko Sergey V.**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Suranaree University of Technology, Thailand, Nakhon Ratchasima.

**Senashov Sergei I.**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Siberian State University named after academician M. F. Reshetnev, Russian Federation, Krasnoyarsk.

**Tychkov Ivan I.**, Senior teacher of Department of Mathematical Methods and Information Technology, Siberian Federal University, Russian Federation, Krasnoyarsk.

**Filushina Elena V.**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Siberian State University named after academician M. F. Reshetnev, Russian Federation, Krasnoyarsk.

**Chugunov Vladimir A.**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Kazan State University, Russian Federation, Kazan.

**Shishov Vladimir V.**, Doctor of Engineering Sciences, Siberian Federal University, Russian Federation, Krasnoyarsk.

Научное издание

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ  
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

*Избранные статьи VII Научной интернет-конференции  
с международным участием*

Под редакцией С. И. Сенашова

Оригинал-макет и верстка *Е. К. Бурнакова*

Подписано в печать 20.12.2014. Формат 60×84/8. Бумага офсетная.  
Печать плоская. Усл. печ. л. 9,2. Уч.-изд. л. 11,9. Тираж 50 экз.  
Заказ . С 53/15.

Редакционно-издательский отдел Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та.  
Отпечатано в отделе копировально-множительной техники  
Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та.  
660014, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31.