



ISSN 2305-9745

Сибирский государственный университет
науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

*Избранные статьи XV Международной научной
интернет-конференции*

КРАСНОЯРСК 2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Сибирский государственный университет науки и технологий
имени академика М. Ф. Решетнева

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

*Избранные статьи XV Международной научной
интернет-конференции*

Под редакцией С. И. Сенашова

Красноярск 2023

Редакционная коллегия

СЕНАШОВ С. И., доктор физико-математических наук, профессор

ШИШОВ В. В., доктор технических наук, профессор

САВОСТЬЯНОВА И. Л., кандидат педагогических наук, доцент

Редакционный совет

МЕЛЕШКО С. В., доктор физико-математических наук,
профессор (Тайланд)

ЛЫЧАГИН В. В., доктор физико-математических наук,
профессор (Норвегия)

ЮМАГУЖИН В. А., доктор физико-математических наук,
профессор (Россия)

ЯХНО А. Н., профессор (Мексика)

Информационные технологии и математическое моделирование :
И74 избр. статьи XV Междунар. научн. интернет-конф. / под ред.
С. И. Сенашова ; СибГУ им. М. Ф. Решетнева : Университет
Гвадалахары. – Красноярск, 2023. – 120 с.

В основе сборника – избранные материалы XV Международной научной интернет-конференции, в которых представлены результаты исследований ученых, преподавателей, научных сотрудников Российской Федерации и стран ближнего и дальнего зарубежья в области применения системного анализа, математического моделирования, оптимизации и информационных технологий в различных областях науки.

Сборник зарегистрирован в базе данных Ulrich's Periodicals Directory.

УДК 330.4(519.248)
ББК 65.04

СОДЕРЖАНИЕ

Альварес-Гутьеррес А., Антелис Х. М., Морено К. Поиск гравитационных волн с использованием сверточных нейронных сетей	5
Бормотин К. С., Потянихин Д. А., Синельщиков А. А., Мин Ко Хлайнг Моделирование раздачи средней части трубы в САЕ-системе и расчет формы штампа	13
Буренин А. А., Ткачева А. В. Об испытаниях на отрыв цилиндрических деталей, полученных горячей посадкой	20
Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л. Деформирование упруговязкопластического цилиндрического слоя при его нагреве за счет трения	28
Лычагин В., Юмагузин В. А. Естественные дифференциальные инварианты и эквивалентность нелинейных дифференциальных операторов третьего порядка	39
Сенашов В. И. Обобщения равномерных произведений групп	52
Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Законы сохранения и решения первой краевой задачи для двумерных и трехмерных уравнений теории упругости	60
Серрано Диас Х. Д., Яхно А. Н. Оптимальная система подалгебр до размерности 3 алгебры симметрий уравнений пластичности среды Мизеса	72
Шемарулин В. Е. Вывод условий порядка для явных m -стадийных симплектических разностных схем Рунге–Кутты–Нистрема	79
Буренин А. А., Кривенок А. А. Особенности расчета процесса обтяжки листовых деталей сложной формы на обтяжном прессе FET с параллельной кинематической структурой	98
Ширяева Т. А., Шлепкин А. К., Филиппов К. А., Шлепкин А. А. Определители Вандермонда и формулы суммирования конечных сумм	109
Сведения об авторах	114

CONTENTS

Alvarez-Gutierrez A., Antelis H. M., Moreno K. Gravitational wave search using convolutional neural networks	5
Bormotin K. S., Potyanikhin D. A., Sinelshchikov A. A., Min Ko Hlaing Modeling expansion of the pipe middle part in CAE-system and calculation of the stamp shape	13
Burenin A. A., Tkacheva A. V. About pull-off tests of cylindrical parts obtained by hot fit	20
Kovtanyuk L. V., Panchenko G. L. Deformation of an elastoviscoplastic cylindrical layer under its heating due to friction	28
Lychagin V., Yumaguzhin V. A. Natural differential invariants and equivalence of nonlinear differential operators of the third order	39
Senashov V. I. Generalizations of uniform products of groups	52
Senashov S. I., Savostyanova I. L. Conservation laws and solutions of the first boundary value problem for two-dimensional and three-dimensional equations of elasticity theory	60
Serrano Dias H. D., Yakhno A. N. Optimal system of subalgebras up to 3-dimension for symmetry algebra of plasticity equations with the Von Mises yield criterion	72
Shemarulin V. E. Derivation of order conditions for explicit m -stage symplectic Runge–Kutta–Nystrom difference schemes	79
Burenin A. A., Krivenok A. A. Peculiarities of calculation of the stretching process of complex geometric sheet parts on the FET stretching press with parallel kinematics structure	98
Shiryaeva T. A., Shlepkin A. K., Filippov K. A., Shlepkin A. A. Vandermond determinant and finite sum summation formulas	109
Information about the authors	117

ПОИСК ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СВЕРТОЧНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

А. Альварес-Гутьеррес¹, Х. М. Антелис², К. Морено^{1*}

¹Университет Гвадалахары

Мексика, 44430, г. Гвадалахара, бульвар Марселино Гарсия Барраган, 1421

²Технологический институт Монтеррея

Мексика, 64849, г. Монтеррей, штат Нуэво Леон

*E-mail: claudia.moreno@cucei.udg.mx

Обнаружение гравитационных волн дает важнейшую информацию для понимания поведения различных астрофизических явлений во Вселенной. Целью этой статьи является создание классификатора сигналов гравитационных волн с использованием сверточных нейронных сетей. Окончательная модель, для измерения ее точности, была протестирована с использованием различных шаблонов сигналов гравитационных волн от событий Сверхновых.

Ключевые слова: гравитационные волны, нейронные сети.

GRAVITATIONAL WAVE SEARCH USING CONVOLUTIONAL NEURAL NETWORKS

Aldo Álvarez-Gutiérrez¹, Javier M. Antelis², Claudia Moreno^{1*}

¹University of Guadalajara

1421, Blvd. Marcelino García Barragán, Guadalajara, Jalisco, 44430, Mexico

²Tecnologico de Monterrey, Escuela de Ingeniería y Ciencias,
Monterrey, N.L., 64849, Mexico

*E-mail: claudia.moreno@cucei.udg.mx

Gravitational Wave detections provide crucial information for understanding the behavior of different astrophysical phenomena in the Universe. This article has the goal of building a Gravitational Wave signal classifier using Convolutional Neural Networks. The final model was tested to measure its accuracy with different GW signal templates from Supernovae events.

Keywords: gravitational wave, neural networks.

Introduction. According to the theory of General Relativity (GR), Gravitational Waves (GW) can be considered as fluctuations in space-time that can be caused by violent cosmological events. GW were first predicted by

Albert Einstein as a consequence of his linearized theory of GR in 1916 [1], but it was until 2015 that the existence of this phenomenon was proved by a confirmed detection of these astrophysical signals. Many other detections have been registered since then, allowing researchers to keep giving experimental proof of GR theory and, at the same time, retrieve new information about the behavior of various celestial bodies that form the Universe. The majority of GW signals registered so far correspond to binary systems of black holes and neutron stars, and the results obtained from these detections are consistent with GR theory. For example, the detection of these GW helped to confirm the energy losses in binary systems due to GW radiation [2].

All matter can produce GW by interacting with the gravitational field. However, the detection equipment available nowadays has a very reduced measuring range. GW are weak perturbations, and they are so small that only extremely energetic events produce waves that can be measured from Earth with sufficient certitude. Detectable GW come from four main sources: binary systems of stars, spinning neutron stars, gravitational collapse, and waves produced during the Big Bang [3].

Currently, a great majority of the GW detection data in the world come from the LIGO-VIRGO interferometers [4]. The detection is performed by implementing a Michelson interferometer modified with Fabry-Perot cavities in each arm to help increase the power of the light beam from the laser integrated in the arrangement.

This research project focuses on the search of GW signals generated by gravitational collapse events, specifically from Supernovae (SN) explosions. This type of waves is produced when the gravitational field interacts with a massive body in space, causing the matter contained in it to collapse towards the nucleus of the star. This results in the liberation of an enormous amount of energy, which produces perturbations in the form of waves in space-time. Up to this day, there are no confirmed registrations of GW signals from SN explosions, thus the importance of developing new techniques to help detect them.

Gravitational Waves. To mathematically describe GW it is necessary to develop a linearized version of Einstein equations. In GR, the Einstein equations relate the space-time curvature to the mass distribution contained in it [1]. These equations are represented with the Einstein tensor $G_{\mu\nu}$ (where $\mu, \nu \in 0, 1, 2, 3 = ct, x, y, z$ and c is the speed of light in vacuum), which can be defined as:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

where $R_{\mu\nu}$ is the Riemann tensor, R is the Ricci scalar, and $g_{\mu\nu}$ is the space-time metric, $T_{\mu\nu}$ is the mass-energy tensor [3], G is the gravitational constant and c is the velocity of the light.

According to perturbation theory, to deduce the linearized version of the Einstein equations that can describe GW it is needed to assume that the metric $g_{\mu\nu}$ that represents the gravitational field has the same form as the Minkowski metric accompanied by a slight perturbation [5], that is to say:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu},$$

where $\eta_{\mu\nu}$ is the Minkowski metric in flat space, $h_{\mu\nu}$ is the perturbation ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$), and ϵ is a small dimensionless parameter which will be ignored for second (or higher) order values. These assumptions can be made by implementing the boundary condition that describes space-time to be asymptotically flat. Under this approximation, the Einstein tensor will only have linear components in $h_{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon \left[\partial_\nu \partial_\alpha h_\mu^\alpha + \partial_\mu \partial_\alpha h_\nu^\alpha - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} \square h \right],$$

where $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial^\alpha \partial_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ is the D'Alembertian operator, and $h \equiv \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = h_\alpha^\alpha$. This result indicates that GW are transverse waves and they can have two degrees of freedom of radiation (polarization states) [6]. Also, to simplify the expression it can be defined $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$ and applying the *Lorentz gauge*, the linearized form of Einstein equations can be written as:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

The above equation can be solved in vacuum, that is $T_{\mu\nu} = 0$ obtaining the wave equation:

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \right) \bar{h}_{\mu\nu} = 0,$$

where $\Delta = (\partial_x^2, \partial_y^2, \partial_z^2)$. The solution to this equation is:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \cos(k_\alpha x^\alpha),$$

where $A_{\mu\nu}$ is the amplitude of the wave, $k_\alpha = (w, \mathbf{k})$, w is the frequency, and $\mathbf{k}$ is the wave number. This solution describes a wave front. With further development of the calculations and with the application of a *Transverse-Traceless gauge*, the expression of the wave propagating in the z direction takes the following form:

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx} & h_{xy} & 0 \\ 0 & h_{xy} & -h_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Using the polarizations, the GW strain can be defined by

$$h(t) = F_+ h_+ + F_\times h_\times + F_x h_x + F_y h_y + F_b h_b + F_l h_l,$$

where F_+ , $F_\times$ are the explicit forms of the antenna pattern functions [3].

Convolutional Neural Network. One of the most challenging parts of the GW detection is the preparation of the raw data from measurements so it can be properly interpreted. The data registered during the detection run is filled with noise, making it impossible to directly observe a GW signal in a graph with unprocessed data. Most of the noise is too big compared to the GW signals and it usually comes from Earth's seismic activity, vibrations produced by laboratory equipment, thermal noise, electrical perturbations, and many other different sources.

The LIGO detectors can register signals in a frequency range of 10 Hz – 7000 Hz [4]. A GW signal will usually be found in the order of $10^1 - 10^2$ Hz, so a lot of information in each detection needs to be filtered for the signal to be visible. Besides that, LIGO generates data in the form of time series that contain frequencies from thousands of seconds of observations. Therefore, considering that a GW event will last a fraction of a second, the search for GW signals becomes a big challenge.

For this reason, there are entire groups of researchers dedicated to the development and implementation of mathematical algorithms and statistical techniques that can help retrieve the data from GW signals that is buried under all the noise in the detection. This preparation of the data consists in applying techniques such as noise spectral density (NSD) analysis, data whitening, band pass filtering and matched filtering, to name a few [7].

CNN are a tool that has been successfully implemented in tasks that require image recognition. In the case of this project, it is needed an algorithm capable of analyzing images from LIGO detections, and then tell apart the images corresponding to noise from the images corresponding to GW signals. With this in mind, it can be deduced that training a CNN with LIGO data can be an appropriate way of creating a GW classifier. A CNN is divided into different building blocks called layers. Each layer performs a specific method on the data that the CNN receives as input, making it possible for the algorithm to learn patterns within the data set [8]. The fundamental layers needed to build a CNN are: Convolutional layers, Pooling layers, Flattening layers, Dense layers [9].

Implementation. The first part of the implementation consisted in building a data set for training a CNN. Such data set needs to contain example images of GW and the noise commonly found in LIGO's detection data. The data from real detections is actually very limited, so it would be impossible to build a data set that is large enough to train a CNN just from the detection repository. Therefore, simulated GW signals and noise are generated with mathematical models that mimic the data from LIGO detections, and these are called GW

templates. With this technique, as many signals as needed can be created to train the CNN.

The GW templates (numerical simulations) used for this project were obtained from the repository created by Scheideger et. al. [10]. These templates contain data representing GW signals from SN events overlapped with noise. The data is divided by the different distances of measurement that the templates are simulating, for distance can change the amount of noise surrounding the GW signal in the detection.

The data from each distance is divided into 4 Sets, tagged in order from Set2 to Set5. Each Set of data is a time series that contains 61 GW signals evenly distributed over 1,200 seconds of detection data. In this case, the data selected for this research project corresponds to the distances shown in table 1.

Table 1

GW Templates

Distance (Kpc)	10.00	5.62	3.16	1.78	1.00	0.58	0.32	0.18	0.10
Factor	1.00	1.78	3.16	5.62	10.00	17.78	31.62	56.23	100.00

*Distances of the GW templates selected to build a data set to train the CNN.

The Factor is related to the distance according to: $\text{factor} = 10\text{Kpc}/\text{Distance}$.

Data set. Before the data from the templates can be used, it needs to be prepared so it is consistent with the methodology recommended by LIGO to analyze GW detection data. The data from the template went through some preprocessing using tools from LIGO tutorials [11]; first the data was whitened and a band pass filter was applied to it, then a Q-transform was performed to have the time series data represented in the frequency domain. The result is an image of the data over time, represented in frequency and its corresponding frequency density. There are two LIGO interferometers, H1 and L1, so there will be one image for each detector. These images were gathered in a data set that will then be used to train the CNN.

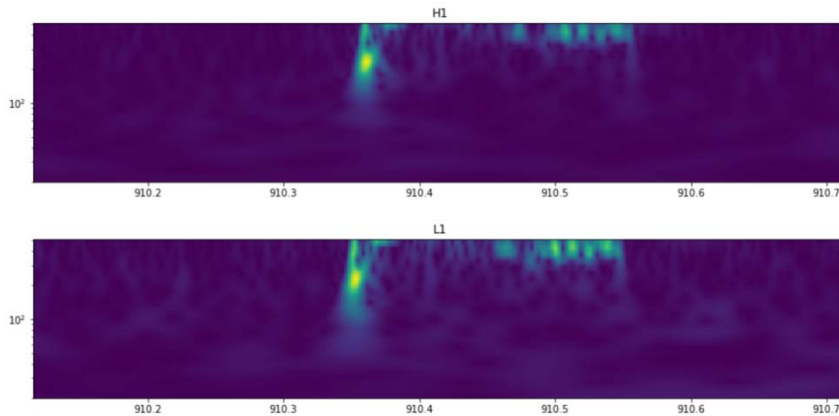


Fig. 1 Example of an image of a GW signal detection in the LIGO interferometers H1 and L1

In order to save some storage, the resolution of the images was reduced, always making sure that the image was clear enough for the CNN to make a classification.

Each image included in the data set is an array of 48X48 pixels representing 0.5 seconds of detection data. For each GW template injection, three images of the signal were generated: one image from the center of the signal, one image from the right corner, and one from the left corner. For every three images from one GW signal, there were also three images of random noise added to the data set, so that the GW to noise ratio was even in the training and testing data. The images that correspond to Noise data are tagged with 'GW injection = 0', and the images that correspond to a GW signal are tagged with 'GW injection = 1'.

The final data set includes the images represented as pixel arrays, and each entry is accompanied by some information about the signal: the tag of the GW template that was used to create the signal, the distance of the signal, the time location within the time series from which it was extracted, and an identifier of whether the image represents detection Noise or a GW signal. Even though all those columns hold important information, to train the CNN it would only be needed the information held by the H1 and L1 pixels columns and by the 'GW injection' tag column (where 0 means Noise and 1 means a GW signal). A different data set was created for each distance factor from table 1, and each data set was divided into four different subsets. This subdivision in smaller Sets was made to have more control over the training and testing data. Each Set has 61 GW template injections, so its corresponding data set will have 366 entries: 183 GW signal entries and 183 random noise entries. Each factor contains four Sets, which means there are 1,464 data entries to use for training and testing the CNN.

Results. The CNN had similar accuracy results for the cases where it was only given the images from one single detector. When the pixels from both detectors were used, the accuracy only increased around 1 to 4 percent compared to the previous cases. The change in results was not quite relevant, but the CNN was consistently more accurate when both H1 and L1 detectors were used together to train the algorithm.

After training the CNN, the model is tested with new data to check how accurate it is. The results are divided into five categories: Accuracy (Acc), True Positives (TP), False Positives (FP), True Negatives (TN), and False Negatives (FN). What these categories represent is: a) Accuracy: general performance of the CNN predicting the data, b) TN: percentage of GW predicted as GW, c) FP: percentage of GW predicted as Noise, d) TP: percentage of Noise predicted as Noise, e) FN: percentage of Noise predicted as GW.

Table 2 shows the accuracy results of the predictions from the three-layer CNN after being trained with data from detectors H1, L1, and H1 + L1. It is important to note that these results correspond to the average performance of the CNN using the data from the nine different distances considered for this study (Table 1).

Table 2

Summary

Layers	Input	Acc%	TN%	FP%	TP%	FN%
3	H1+L1	86.38	81.93	8.46	90.87	18.77
	L1	84.54	81.05	11.23	88.08	19.70
	H1	84.17	81.06	11.95	87.36	19.70

*Average performance of the CNN over all the different distances. Acc% shows that results with H1+L1 as input have higher accuracy, and generally, the model is more prone to miss-classify Noise as GW (%FN).

The performance can also be observed separately for each individual distance. Figure 2 shows how the accuracy of the CNN changes on average for each GW template distance.

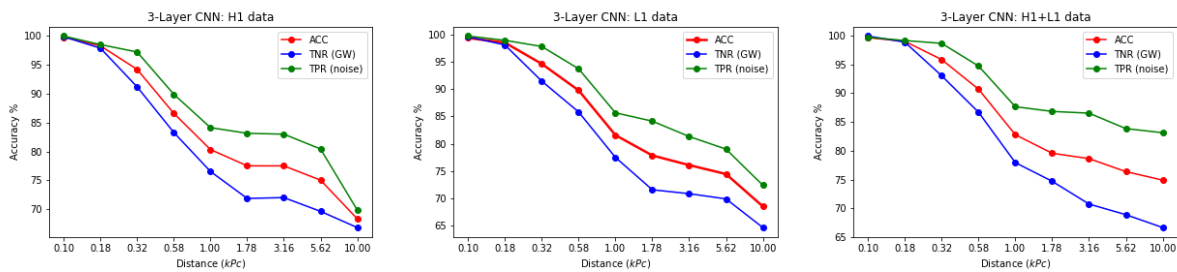


Fig. 2 Accuracy of the CNN according to GW template distances. TPR shows the percentage of Noise predicted as Noise, and TNR is the percentage of GW predicted as GW. The graphs indicate at the top the input data used for training the CNN

Conclusions. The results obtained from the CNN show a notorious change in accuracy according to the distance at which the data is simulated. The predictions for data at 10.00 Kpc have the lowest general accuracy being around 70 %. The accuracy percentage increases gradually until it gets above 99 % for the shortest distances like 0.18 Kpc and 0.10 Kpc. These results show that the CNN is considerably better at classifying GW signals for shorter distances around 0.58 Kpc or less. This might be because the amount of noise in the detections increases with the distance, hiding the GW signals and making it much more difficult to tell them apart from the surrounding noise.

Another important remark, especially with longer distances, is that the TP% is consistently higher than the TN% in all cases. This means that the CNN is much better at accurately classifying Noise than GW signals. Also, it is good to see that the FP% is always smaller than the FN%, since this indicates that the CNN can often classify Noise as a GW signal, but it will be less common that it classifies GW signals as Noise. This is important because, if the algorithm tags GW as Noise, these signals will go unnoticed by the researchers relying on the results of the CNN.

This CNN model gives satisfactory results. Nonetheless, there are parts that can still be improved; for example, by expanding the data set with more images

to train the algorithm, or by continuing to optimize the architecture of the CNN for better results. There will be further development for this GW classifier, knowing that this could be a powerful tool for the automation of GW detections in the future.

References

1. McMahon D. Relativity Demystified. USA, McGraw-Hill, 2006.
2. Fesik L. Polarization states of gravitational waves detected by LIGO-Virgo antennas (master's thesis). Saint Petersburg State University, Russia, 2017.
3. Schutz B. A First Course in General Relativity. USA, Cambridge University Press, 2009.
4. The LIGO Scientific Collaboration et al. Advanced LIGO // *Class. Quantum Grav.* 2015. Vol. 32 074001, 41 pp. DOI: 10.1088/0264-9381/32/7/074001.
5. Hill D., Nurowski P. The Mathematics of Gravitational Waves. 2017, <http://dx.doi.org/10.1090/noti1551>.
6. d'Inverno R. Introducing Einstein's Relativity. USA, Oxford University Press, 1992.
7. Maggiore M. Gravitational Waves. Volume 1: Theory and Experiments. USA, Oxford University Press, 2008.
8. Géron A. Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn & TensorFlow. USA, O'Reilly Media, 2017.
9. Álvarez-Gutiérrez A. A. Classification of Gravitational Wave signals from Supernovae using Convolutional Neural Networks (undergraduate thesis). Universidad de Guadalajara, Mexico, 2022.
10. Scheidegger S., Käppeli R., Whitehouse S. C., Fischer T., Liebendörfer M. The influence of model parameters on the prediction of gravitational wave signals from stellar core collapse. Cornell University, USA, 2009.
11. LIGO Virgo Collaboration. Gravitational Wave Open Science Center: Tutorials. September 11, 2017. Retrieved from: <https://www.gw-openscience.org/tutorials/>.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗДАЧИ СРЕДНЕЙ ЧАСТИ ТРУБЫ В САЕ-СИСТЕМЕ И РАСЧЕТ ФОРМЫ ШТАМПА*

К. С. Бормотин^{1*}, Д. А. Потянихин¹, А. А. Синельщиков¹, Мин Ко Хлайнг¹

¹Комсомольский-на-Амуре государственный университет
Российская Федерация, 681013, Хабаровский край,
г. Комсомольск-на-Амуре, проспект Ленина, 27

*E-mail: cvmi@knastu.ru

При создании авиационной и ракетно-космической техники особое внимание уделяется изготовлению трубопроводных систем. Для расчёта формы штампа, используемого в раздаче трубчатой заготовки, авторами решена в САЕ-системе обратная задача.

Ключевые слова: обратная задача, итерационный метод, раздача труб, моделирование, упругость, пластичность, метод конечных элементов.

MODELING EXPANSION OF THE PIPE MIDDLE PART IN CAE-SYSTEM AND CALCULATION OF THE STAMP SHAPE

K. S. Bormotin^{1*}, D. A. Potianikhin¹, A. A. Sinelshchikov¹, Min Ko Hlaing¹

¹Komsomolsk-na-Amure State University
27, Lenin prospect, Komsomolsk-on-Amur,
Khabarovsk territory, 681013, Russian Federation

*E-mail: cvmi@knastu.ru

When creating aviation and rocket-space technology, special attention is paid to the manufacture of pipeline systems. To calculate the stamp shape used in the distribution of a tubular billet, the authors solved an inverse problem in the CAE system.

Keywords: inverse problem, iterative method, pipe expansion, modeling, elasticity, plasticity, finite element method.

Введение. Типовыми изделиями ракетно-космической и авиационной промышленности являются корпусные оболочки из листовых заготовок. К ним предъявляются высокие конструкторские требования, определяющие

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 21-11-00165).

технологическую возможность изготовления детали: геометрическая точность, качество поверхности, механические свойства, равномерная толщина, надежность в эксплуатации. В частности, особое внимание уделяется изготовлению трубопроводных систем [1–3].

В данной работе рассматривается моделирование в САЕ-системе технологии формообразования тонкостенной трубчатой заготовки из титанового сплава раздачей в штампе. Согласно технологии раздачи, воздействие на деформируемую деталь передаётся через рабочее тело посредством давления на него пуансоном (рис. 1). На чертеже приведено осевое сечение. Левая часть соответствует расположению заготовки и оснастки до деформирования, правая часть соответствует максимальному перемещению пуансона прессы. На основание 1 устанавливается разборная матрица, состоящая из нижней части 2 и верхней части 3. Внутри матрицы помещается трубчатая заготовка 4 и эластичное рабочее тело 5. Пуансон 6, перемещаясь вследствие усилия прессы P , создает давление через рабочее тело на внутренней стенке трубчатой заготовки. В результате происходит раздача ее средней части. После этого пуансон поднимают вверх, разбирают матрицу и вынимают готовую деталь с рабочим телом. Таким образом, необходимая остаточная форма трубчатой заготовки после освобождения из штампа и разгрузки задаётся формой жёсткой матрицы. Для обеспечения высокой точности, качества деталей и сокращения времени постановки производства необходима формулировка и решение обратной задачи по определению формы штампа. Моделирование процесса раздачи трубчатой заготовки в жёсткой матрице выполняется двумерными конечными элементами для осесимметричных задач в системе MSC.Marc. Численные результаты сравниваются с экспериментальными данными.

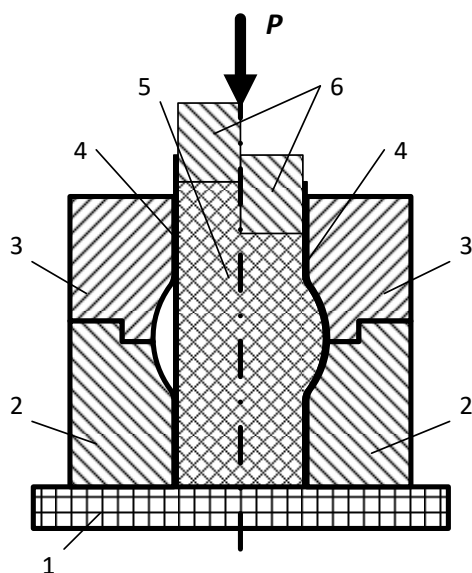


Рис. 1. Схема раздачи трубчатой заготовки с использованием внутреннего наполнителя

Метод решения обратной задачи раздачи трубчатой заготовки. Для определения формы штампа формулируется обратная задача: необходимо определить перемещения поверхности штампа, которые обеспечивают заданную остаточную форму детали после раздачи рабочим телом средней части трубчатой заготовки и разгрузки (извлечения детали из штампа).

В случае двумерной постановки задачи, обозначим через $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$, $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ векторы остаточных перемещений деформируемого тела, полученных после деформирования и разгрузки,

и вектор перемещений контактного тела. Аналогично построению метода решения в [4–6] на основе вариационного неравенства для функционала находится итерационный метод решения обратных задач формообразования:

$$\bar{u}_i^{k+1} = \bar{u}_i^k + \alpha^k (\tilde{u}_i^* - \tilde{u}_i^k), \quad (1)$$

где $0 < \alpha^k < 2$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $i = 1, 2$, $\tilde{u}_i^*$ – заданные остаточные перемещения. Перемещения контактного тела определяются на внутренней поверхности штампа, а остаточные перемещения деформируемого тела – на внешней стороне заготовки.

С учётом дискретизации вариационных уравнений механики строятся стандартные конечно-элементные уравнения для решения контактной задачи деформирования и разгрузки [7–8]:

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{R}}, \quad \tilde{\mathbf{K}}\dot{\hat{\mathbf{U}}} = \dot{\hat{\mathbf{R}}}(\dot{\mathbf{U}}),$$

где $\mathbf{K}$, $\tilde{\mathbf{K}}$ – симметричные матрицы касательной жёсткости, определённые в момент t ; $\dot{\mathbf{R}}$ – вектор скорости внутренних и внешних сил; $\dot{\hat{\mathbf{R}}}$ – вектор скорости сил, обусловленных начальными деформациями и начальными напряжениями. В результате решения первой задачи находится деформированная модель с распределением напряжений и деформаций. Решение второй задачи на основе данных о начальных напряжениях и деформациях определяет перемещения разгрузки. Остаточные узловые перемещения вычисляются по узловым перемещениям заготовки после деформирования и разгрузки по формуле $\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U} + \hat{\mathbf{U}}$.

Численные результаты решения обратной задачи. Реализация метода решения обратной задачи выполнена в системе MSC.Marc. В данном случае моделирование деформирования заготовки выполнено плоскими четырёхузловыми элементами для осесимметричных задач. Конечно-элементная модель представлена на рис. 2 (1 – заготовка, 2 – штамп, 3 – рабочее тело). Внутреннее давление на трубчатую заготовку определяется действием рабочего тела при сжатии.

Размеры заготовки: длина трубы 65.5 мм, толщина 1 мм. Титановая заготовка имеет следующие характеристики материала: модуль Юнга $E = 11\,217$ кГ/мм², коэффициент Пуассона $\nu = 0,33$, предел текучести $\sigma_T = 59,5$ кГ/мм², модуль линейного упрочнения $E_T = 109,8$ кГ/мм². В качестве рабочего тела рассматривается резиновый стержень, механические свойства которого описываются моделью Муни – Ривлина с потенциалом [7]:

$$\Psi = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3,$$

где константы $C_{10} = 0,147$ кГ/мм², $C_{01} = 0,056$ кГ/мм², $C_{11} = 0,017$ кГ/мм², $C_{20} = 0$ кГ/мм², $C_{30} = 0$ кГ/мм², I_1 , I_2 – первый и второй инварианты де-

виатора деформаций. Характеристики материалов определены на основе экспериментальных исследований. При деформировании рабочего тела необходимо учитывать большие деформации, поэтому в Marc при решении задач используется текущая Лагранжева формулировка.

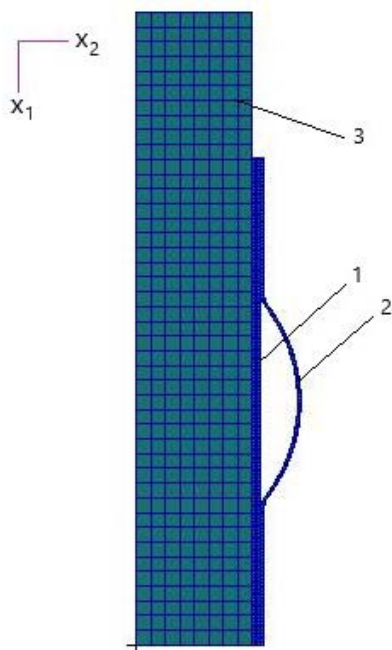


Рис. 2. Конечно-элементная модель рабочего тела, трубчатой заготовки и штампа

В задаче деформирования трубчатой заготовки наложены следующие граничные условия: в узлах оснований рабочего тела и заготовки заданы нулевые перемещения по вертикали, в узлах на оси симметрии рабочего тела – нулевые радиальные перемещения, в верхних узлах рабочего тела – сжимающие перемещения 17,5 мм; узлы штампа зафиксированы по всем перемещениям. Штамп представляет собой жёсткое контактное тело. На поверхностях контакта рабочего тела, заготовки и штампа задано трение с коэффициентом 0.1.

В задаче разгрузки рассматривается только деформирование трубчатой заготовки под действием начальных напряжений при условиях: для узлов нижнего торца заготовки заданы нулевые перемещения по вертикали, для крайнего узла верхнего и нижнего торца заготовки – нулевые радиальные перемещения.

При расчёте необходимой формы оснастки в задаче раздачи трубы методом (1) при $\alpha^k = 1$ будут рассматриваться только радиальные перемещения по оси x_2 (рис. 2). Заданные остаточные отклонения определяются перемещениями $\tilde{u}_2^*$, максимальное значение которых равно 4,9 мм. В исходной модели внутренняя поверхность штампа перемещена на заданные остаточные отклонения заготовки, т. е. $\bar{u}_2^0 = \tilde{u}_2^*$ (в конечно-элементной модели данные соотношения определены для ближайших крайних узлов штампа и заготовки после деформирования). Перемещения, входящие в метод (1), определяются на основе решения следующих задач:

1. Задача деформирования трубы под действием давления через рабочее тело. В результате заготовка должна быть прижата к элементам штампа (рис. 3).

2. Упругая разгрузка заготовки.

3. В результате полученных остаточных перемещений заготовки по методу (1) определяются перемещения узлов штампа, по которым изменяется форма штампа.

Данные задачи вычисляются на каждой итерации. Результат решения обратной задачи итерационным методом (1) на 3 шаге представлен на рис. 4. Сходимость итерационного метода оценивается по среднеквадратичной

норме ($e^k = \xi^k / \xi^1$, $\xi^k = \left(\sum_S (\tilde{u}_2^k - \tilde{u}_2^*)^2 \right)^{1/2}$, S – область узлов с внешней стороны заготовки, k – номер итерации). При $\alpha^k = 1$ график сходимости представлен на рис 5.

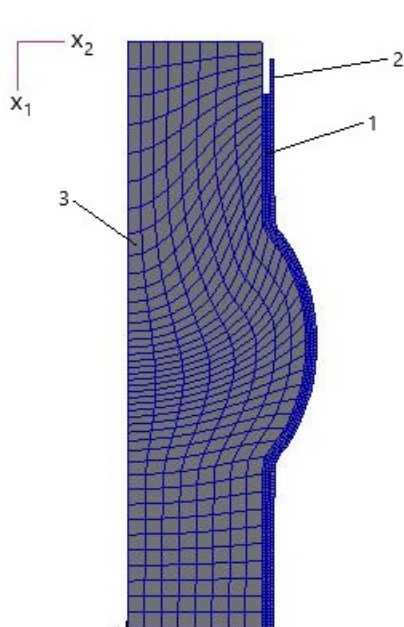


Рис. 3. Конфигурация рабочего тела и трубчатой заготовки после деформирования



Рис. 4. Конфигурация заготовки после разгрузки в сравнении с формой штампа и максимальные остаточные перемещения в узле на краю трубчатой заготовки

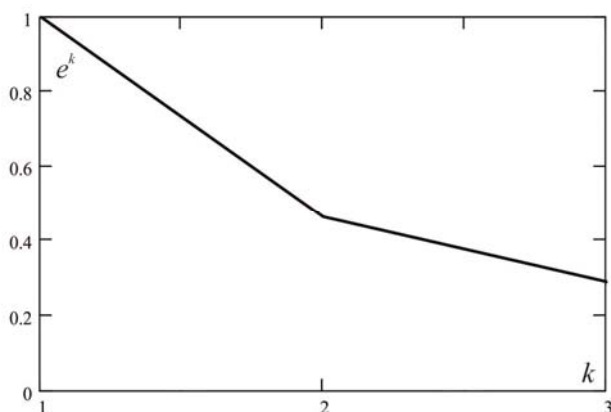


Рис. 5. График сходимости



Рис. 6. Деталь после формообразования

Заключение. Таким образом, определяется форма поверхности штампа для средней части трубчатой заготовки при раздаче. Максимальные отклонения вычисленной поверхности штампа от исходного положения заготовки будут $\max u_2 = 5$ мм.

Для экспериментального исследования использовалась матрица с высотой $H = 65,5$ мм и внутренним радиусом $R_1 = 16$ мм. Радиус криволинейного участка образующей матрицы $R = 21$ мм. Таким образом, максимальные перемещения в заготовке до поверхности матрицы $\max u_2 = 5$ мм. В результате выполнения натурного эксперимента по формообразованию получена деталь (рис. 6), максимальные отклонения которой от исходной заготовки равны 4,9 мм. Согласно данным численного решения (рис. 4) результаты моделирования и эксперимента практически совпадают.

Библиографические ссылки

1. Хейн Вин Зо. Повышение эффективности технологических процессов формообразования трубных заготовок при изготовлении деталей летательных аппаратов : дис. ... д-ра техн. наук. Москва : ФГБОУ ВПО «МАТИ», 2015.
2. Хейн Вин Зо. Анализ процессов и интенсификация изготовления деталей летательных аппаратов методом обжима и раздачи трубных заготовок // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. 2015. № II-1 (22). С. 13–19.
3. Исследование процесса раздачи средней части трубной заготовки с подпором / С. Б. Марьин, Г. А. Щербатюк, В. Д. Кириллин, М. И. Пак // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. 2021. № VII (55). С. 73–78.
4. Бормотин К. С. Итеративный метод решения геометрически нелинейных обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. № 12. С. 145–153.
5. Бормотин К. С., Вин Аунг Метод решения обратной задачи в процессе обтяжки панели // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3 (37). С. 47–57.
6. Inverse problem of calculating the stamp shape for pipe middle part expansion / K. S. Bormotin, D. A. Potianikhin, Min Ko Hlaing // Smart Innovation, Systems and Technologies. 2022. Vol. 272. P. 401–408.
7. Marc 2021, Vol A: Theory and User Information, MSC.Software Corporation <http://www.mssoftware.com/product/marc>.
8. Wriggers P. Computational contact mechanics. Heidelberg: Springer, 2006.

References

1. Hein Win Zaw. *Povyshenie effektivnosti tekhnologicheskikh protsessov formoobrazovaniya trubnykh zagotovok pri izgotovlenii detaley letatel'nykh apparatov. Dis. dok. tehn. Nauk*, [Increasing the efficiency of technological

processes for forming pipe billets in the manufacture of aircraft parts. Dr. techn. sci. diss]. Moscow: FGBOU VPO “MATI”, 2015.

2. Hein Win Zaw. *Analiz protsessov i intensivifikatsiya izgotovleniya detaley letatel'nykh apparatov metodom obzhima i razdachi trubnykh zagotovok* [Process analysis and temperature&power enhancement of aircraft parts manufacturing by the methods of crimping and round billet expanding]. *Uchenye zapiski Komsomol'skogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Nauki o prirode i tekhnike*. 2015, no. II-1 (22), p. 13–19. (In Russ.)

3. Maryin S. B., Shcherbatyuk G. A., Kirillin V. D., Pak M. I. *Issledovanie protsessa razdachi sredney chasti trubnoy zagotovki s podporom* [Investigation of distribution process of the middle part of the pipe billet with backup]. *Uchenye zapiski Komsomol'skogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Nauki o prirode i tekhnike*. 2021, no. VII (55), p. 73–78. (In Russ.)

4. Bormotin K. S. Iterative Method for Solving Geometrically Nonlinear Inverse Problems of Structural Element Shaping // *Computational mathematics and mathematical physics*. 2013, vol. 53, no. 12, p. 1908–1915.

5. Bormotin K. S., Win Aung. *Metod resheniya obratnoy zadachi v protsesse obtyazhki paneli* [Method for solving the inverse problem in the process of wrapping the panel] // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya*. 2018, no 3 (37), p. 47–57.

6. Inverse problem of calculating the stamp shape for pipe middle part expansion / K. S. Bormotin, D. A. Potianikhin, Min Ko Hlaing // *Smart Innovation, Systems and Technologies*. 2022, v. 272, p. 401–408.

7. Marc 2021, Vol A: Theory and User Information, MSC.Software Corporation <http://www.mscsoftware.com/product/marc>.

8. Wriggers P. *Computational contact mechanics*. Heidelberg: Springer, 2006.

© Бормотин К. С., Потянихин Д. А.,
Синельщиков А. А., Мин Ко Хлайнг, 2022

ОБ ИСПЫТАНИЯХ НА ОТРЫВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ДЕТАЛЕЙ, ПОЛУЧЕННЫХ ГОРЯЧЕЙ ПОСАДКОЙ*

А. А. Буренин¹, А. В. Ткачева^{1*}

¹Хабаровский федеральный исследовательский центр.
Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН
Российская Федерация, 681005, Хабаровский край,
г. Комсомльск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1

*E-mail: 4nansi4@mail.ru

Современное машиностроение и авиастроение в частности включают в себя цилиндрические детали, изготовленные посадкой с натягом способом горячей посадки. В докладе предлагается установить прочность подобных сборок по средствам расчетов соединений испытаниями на отрыв. Отрывные воздействия создаются за счет центробежных усилий при вращении изготовленных сборок вокруг их оси. Считается, что идеальный упругопластический материал элементов сборки способен обеспечить её функционирование в условиях эксплуатации несмотря на падения натяга в соединении. Рассчитывается значение скорости вращения, предельные для функциональных свойств подобных деталей.

Ключевые слова: упругость, пластичность, сборка с натягом, горячая посадка, напряжения вращения.

ABOUT PULL-OFF TESTS OF CYLINDRICAL PARTS OBTAINED BY HOT FIT

A. A. Burenin¹, A. V. Tkacheva^{1*}

¹Khabarovsk Federal Research Center.
Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy FEB RAS
1, Metallurgists str., Komsomlsk-on-Amur,
Khabarovsk Territory, 681005, Russian Federation

*E-mail: 4nansi4@mail.ru

Modern mechanical engineering and aircraft construction, in particular, include cylindrical parts made by an interference fit by a shrink fit method. During the tests, signs of assembly are found by means of calculating the connections for separation. Separation effects of infection due to centrifugal attacks during the rotation of manufactured assemblies around their axis. It is believed that a perfectly elastoplastic material shows up under operating

* Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 20-01-00147.

conditions, despite the drop on the thrust assembly. The value of rotation speed is calculated, limiting for the functional properties of parts.

Keywords: elasticity, plasticity, interference assembly, shrink fit, rotation of composite cylindrical parts.

Введение. Несомненную важность изучения необратимого деформирования материалов вращающихся дисков и цилиндров, входящих в конструкции механизмов и машин, неизменно подчеркивал Ю. Н. Работнов [1]. Быстро вращающиеся валы и диски входят в конструкции двигателей и приводящих систем летательных аппаратов. Прочностные и функциональные свойства соединений их посадок в условиях повышенных температур предъявляют повышенные требования к свойствам материалов сборок. Расчеты прочности соединений с необходимостью требуют учета не только обратимых (упругих), но и необратимых (ползучести, пластического течения) деформаций материалов изделий [2; 3].

Прочность соединений при сборке цилиндрических деталей с натягом изучалось неоднократно [4–9]. Так, в [4; 5] рассчитывала прочность соединения в сборке при повороте ее охватывающей детали, в [6; 7] в условиях кручения сборки в целом, в [8] при циклических, а в [9] при осевых нагрузках. Но наиболее опасными для подобных соединений с натягом являются усилия отрыва. Здесь рассмотрим именно последнюю задачу, когда отрывные усилия вызываются как раз центробежными силами инерции при быстром вращении составных изделий.

Постановка задачи сборки и результаты расчетов. Полагаем, что сборка цилиндрических деталей осуществляется посредством операции горячей посадки, когда охватывающая деталь (труба, диск) нагревается до некоторой назначенной температуры $T = T_*$ и насаживается на охватываемую. Здесь для простоты постановки считаем, что детали сборки имеют одинаковую длину и торцы их жестко закреплены (условия плоских деформируемых состояний), либо одинаковую толщину дисков (условие плоских напряженных состояний). Для радиальных размеров принимаем $R_0 \leq r \leq R_1$ для охватываемой детали и $R_1 \leq r \leq R_2$ для охватывающей. Пренебрегая теплом, порождаемым деформированием, по сравнению с теплом, получаемым при нагреве охватывающей детали сборки, получаем несвязную задачу теории температурных напряжений. Распределение температуры в таком случае следует из решения задачи для уравнения теплопроводности в цилиндрической системе координат

$$\theta_{,t} = a(\theta_{,rr} + r^{-1}\theta_{,r}) - \beta\theta, \quad \theta = T_0^{-1}(T - T_0), \quad (1)$$

где a – коэффициент теплопроводности; $\beta = \text{const}$ – коэффициент теплоотдачи в окружающую среду; T_0 – температура свободного состояния мате-

риала изделия (комнатная температура). Начальные условия для (1) имеют вид

$$\theta(R_0 \leq r \leq R_1, 0) = 0, \quad \theta(R_0 \leq r \leq R_1, 0) = \theta_*, \quad (2)$$

граничные принимаю форму

$$\begin{aligned} \theta_{,r}(R_0, t) = 0, \quad \theta_{,r}(R_2, t) = \beta \theta(R_2, t), \\ \theta^-(R_1, t) = \theta^+(R_1, t), \quad \xi_2 \theta_{,r}^+(R_1, t) = \xi_1 \theta_{,r}^-(R_1, t). \end{aligned} \quad (3)$$

В (1)–(3) независимой переменной после запятой указывается частное дифференцирование по этой переменной; ξ_1 , ξ_2 – коэффициенты теплопроводности для материалов охватываемой и охватывающей деталей сборки соответственно; через $\theta^-(r, t)$ и $\theta^+(r, t)$ обозначены распределения температуры по охватываемой и охватывающим деталям. Соотношения (1)–(3) записаны для диска. В случае цилиндра следует внести в них некоторые не принципиальные изменения, например, источник в (2.1) удобнее перенести в краевые условия.

Температурная задача (1)–(3) может быть решена точно; имеются апробированные численные решения в рамках распространённых пользовательских пакетов программ. Для дальнейшего важно, что имеется (найденно) распределение температуры в любой момент процесса посадки.

Считая приобретаемые деформации d малыми, запишем локальные следствия законов сохранения в форме уравнения движения и баланса внутренней энергии

$$\nabla \sigma = \rho w, \quad (4)$$

$$\rho \frac{d\gamma}{dt} + \text{div} \mathbf{q} = \sigma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{p} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\mathbf{d}}{dt} = \frac{d\mathbf{e}}{dt} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p,$$

$$\rho = \text{const}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad \mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad \gamma = \lambda(\mathbf{d}, s).$$

Здесь σ , $\mathbf{e}$, $\mathbf{p}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ – тензоры напряжений, упругих и пластических деформаций, скоростей деформаций Эйлера и его составляющих; $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{q}$ – векторы перемещений, скорости и ускорения и вектор теплового потока; γ , s – плотность и распределения внутренней энергии и энтропии. Если закон теплопроводности выбрать в форме линейного закона Фурье ($\mathbf{q} = -\xi \nabla \theta$), то следствием (5) можно получить соотношения закона Дюамеля – Неймана [2]:

$$\sigma = (\lambda tre - 3\alpha T_0 K \theta) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (6)$$

И уравнение теплопроводности (1). При этом следует иметь ввиду, что теплопроводной способностью деформирования пренебрегается также, как в (4) массовыми и инертностными силами ($\nabla \sigma = 0$).

Рост деформаций пластического течения возможен только при достижении напряжениями поверхности нагружения $f(\sigma, k) = 0$ в пространстве напряжений [10]. В принимаемых условиях принципа максимума потенциала со следствием ассоциированного закона

$$d\mathbf{p} = d\zeta \frac{\partial f(\sigma, k)}{\partial \sigma}, \quad d\zeta > 0. \quad (7)$$

Далее в расчетах в качестве поверхности нагружения принимается боковая поверхность наклонной призмы Ивлева в пространстве главных напряжений

$$\max |\sigma_j - \sigma| = \frac{4}{3}k, \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (8)$$

Кусочно-линейное условие пластического течения (8) является классическим условием теории пластичности [10] и называется условием пластического течения максимальных приведенных напряжений или [11] условием пластичности Ишлинского – Ивлева. Для зависимости предела текучести $k = k(\theta)$ принимаем простейшую линейную зависимость

$$k(\theta) = k_0(\theta_p - \theta)\theta_p^{-1}. \quad (9)$$

Здесь $k_0 = \text{const}$ – предел текучести материала в опытах на сдвиг в условиях комнатной температуры $T_0(\theta = 0)$.

Механическая часть теории температурных напряжений связана таким образом с интегрированием уравнения равновесия $\nabla \sigma = 0$, переписанного в цилиндрических координатах r, φ, z с учетом соответствующих краевых условий

$$\begin{aligned} \sigma_{r,r} + r^{-1}(\sigma_r - \sigma_\varphi) &= 0, \\ u_r(R_0, t) &= 0; \quad \sigma_{rr}(R_2, t) = 0, \quad [u_r(R_1, t)] = 0, \quad [\sigma_{rr}(R_1, t)] = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

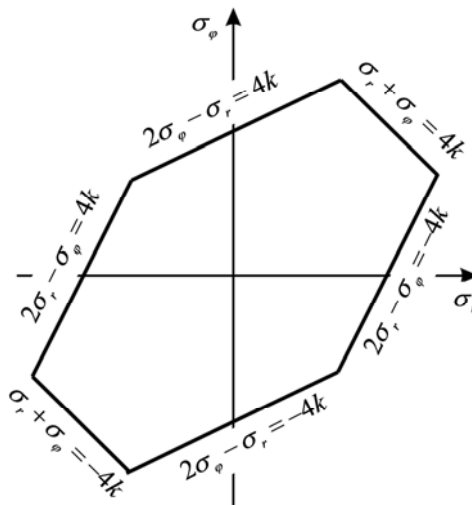


Рис. 1. Сечение поверхности нагружения

Квадратными скобками обозначен в (10) разрыв величины на поверхности $r = R_1$. В каждый рассчитываемый момент времени t , зависимость напряжений от деформаций и температуры задается соотношениями закона Дюамеля – Неймана (6). Первоначально за моментом посадки деформирование оказывается упругим, но в некоторый последующий момент времени на границе контакта $r = R_1$ выполняется условие пластичности в форме $2\sigma_\varphi - \sigma_r = 4k$. На рис. 1 показано сечение поверхности нагружения (призмы Ивлева) плоскостью $\sigma_z = 0$.

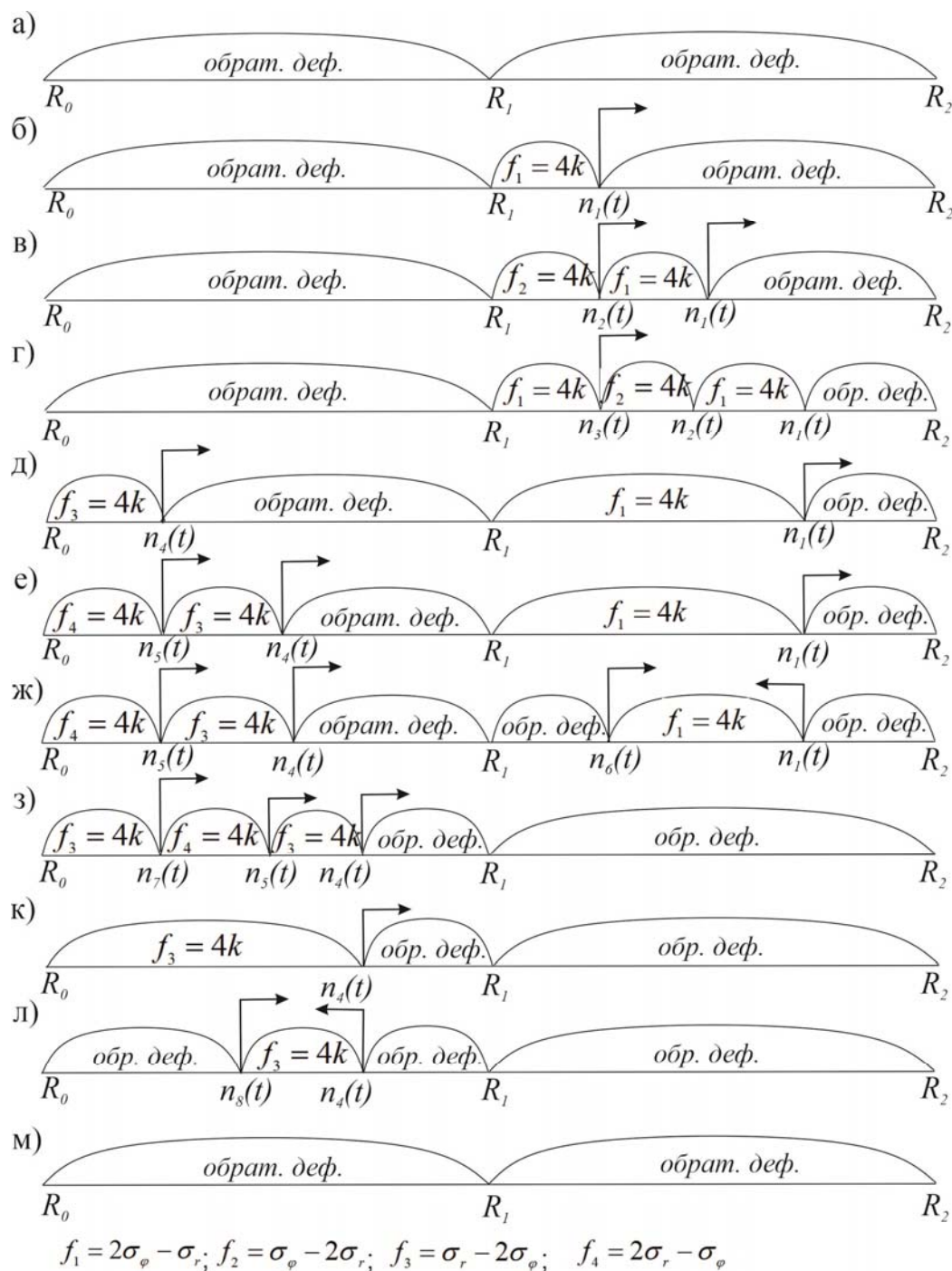


Рис. 2. Схема деформирования материала сборки

Рисунком (рис. 2) иллюстрируются обратимое (а)) деформирование, момент возникновения течения (б)), а также последующее возникновение и исчезновение пластических областей, включая продвижение упругопластических границ (указаны стрелками) $r = n_j(t)$ ($j = 1 \dots 7$) до полного остывания сборки. Важно заметить, что упругопластическое состояние в составном диске в каждый момент времени возможно рассчитать аналитически при наличии разных областей пластического течения, сопрягая конечные соотношения на границах областей и выполняя граничные условия. Процесс подобных расчетов можно проследить в наших публикациях, например в [12]. Здесь предметом наших интересов является распределение по сборке остаточных напряжений (рис. 3) и сформировавшийся в сборке натяг, являющиеся начальными условиями последующих расчетов.

Испытания прочности соединения. Считаем, что составной диск теперь ускоренно вращается вокруг оси сборки. Уравнение движения (первое равенство в (10)) теперь следует дополнить слагаемым $-r\omega^2$ в правой его части (угловым ускорением пренебрегается). Угловая скорость $\omega(t)$ возрастает до его предельного состояния $\omega = \omega_*$ при котором натяг обнуляется. В расчетах (рис. 3) принято: $a = 0,944 \cdot 10^{-6}$, $\alpha = 11,1 \cdot 10^{-6}$, $T_p = 1400$ °С, $k_0 = 360$ МПа, модуль Юнга $E = 210$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,27$. Начальная температура нагрева охватывающей детали $T_* = 700$ °С; геометрия изделия связывается с соотношениями $R_1 - R_0 = R_2 - R_1$ (рис. 3). Расчеты в таком случае показали, что $\omega_* = \frac{\pi n_*}{30} = 9,2 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ или $n_* = 5,95 \cdot 10^4$ об/мин.

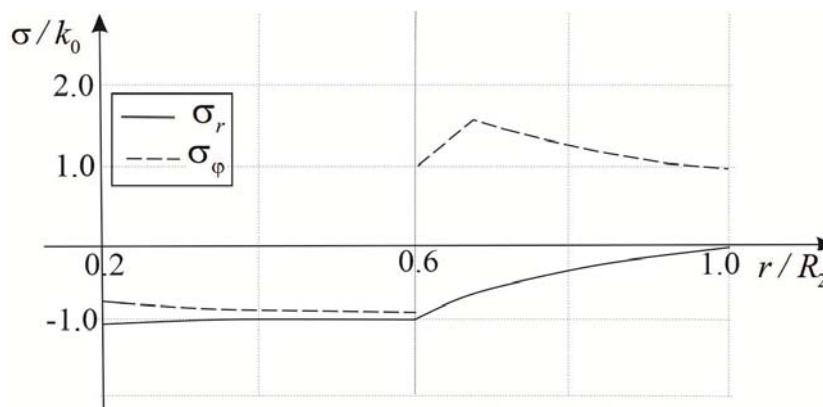


Рис. 3. Распределение остаточных напряжений в материале сборки

Следовательно, сборка составного диска, предложена в качестве примера, на жёстком валу будет выполнять своё функциональное значение только при $\omega < \omega_*$. Иные термомеханические свойства материалов сборки

и её иная геометрия требуют перерасчета этого условия согласно способу, например, предложенному в настоящем докладе.

Библиографические ссылки

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкции. М. : Наука, 1966. 752 с.
2. Пэжина П., Савчук А. Проблемы термопластичной // Проблемы теории пластичности и ползучести. М. : Мир. 1979. С. 94–202.
3. Буренин А. А., Ковтанюк А. В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток : Дальнаука. 2013. 312 с.
4. Ashrink – fit shaft subject to torsion / Sachfield A., Barber J.R., Aclls D.A. и др. // *Europ. J. Mech. Sol.* 2002. Vol. 21. P. 73–84.
5. Effect of fitted position on stress distribution and strength of a bonded shrink fitted joint subjected to torsion / Airoshi Kawamura, Toshiyu Ki Sawab и др. // *Int. J. Adhesion Adhesives*. 2003. Vol. 23. P. 131–140.
6. Antoni N. Contact separation and failure analysis of a rotating termoelasticplastic shrink-fit assembly // *Appl. Math. Modell.* 2013. Vol. 37. P. 2352–2363.
7. Arslan E., Mack W. Shrink fit with solid inclusion and functionally graded hub // *Composite Structures*. 2015. Vol. 121. P. 217–224.
8. Gaal L., Schmidt A. Finite element simulation and experiments on rotor damping assembled by disc shrink fits // *Mech. Syst. And Signal Proc.* 2019. Vol. 127. P. 412–422.
9. Lopes J. P., Hills D. A., Paynte R. J. H. The axisymmetrie shrink fit problem subjected to axial force // *Europ. J. Mech. Solids*. 2018. Vol. 70. P. 172–180.
10. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М. : Физматлит. 2001. 704 с.
11. Буренин А. А., Ткачева А. В. Кусочно-линейные пластические потенциалы как средства расчетов плоских неустановившихся температурных напряжений // *Изв. РАН: МТТ*. 2020. № 6. С. 40–49.
12. Буренин А. А., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А. К расчету неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах // *Выч. Мех. спл. сред*. 2017. Т. 10, № 3. С. 245–259.

References

1. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest' elementov konstruktsii* [Creep of structural elements]. M. : Nauka, 1966. 752 p.
2. Pezhina P., Savchuk A. *Problemy termoplastichnoy* [Problems of thermoplastic] Problems of the theory of plasticity and creep. M. : Mir. 1979. S. 94–202.
3. Burenin A. A., Kovtanyuk A. V. *Bol'shiye neobratimyye deformatsii i uprugoye posledeystviye* [Large irreversible deformations and elastic aftereffect] Vladivostok : Dalnauka. 2013. 312 p.

4. Ashrink – fit shaft subject to torsion Sachfield A., Barber J.R., Aclls D.A. и др. // *Europ. J. Mech. Sol.* 2002. Vol. 21. P. 73–84.
5. *Effect of fitted position on stress distribution and strength of a bonded shrink fitted joint subjected to torsion.* Airoshi Kawamura, Toshiyu Ki Sawab and others. *Int. J. Adhesion Adhesives*. 2003. Vol. 23. P. 131–140.
6. Antoni N. *Contact separation and failure analysis of a rotating thermoelasticplastic shrink-fit assembly.* *Appl. Math. Modell.* 2013. Vol. 37. P. 2352–2363.
7. Arslan E., Mack W. *Shrink fit with solid inclusion and functionally graded hub* *Composite Structures*. 2015. Vol. 121. P. 217–224.
8. Gaal L., Schmidt A. *Finite element simulation and experiments on rotor damping assembled by disc shrink fits* *Mech. Sust. And Signal Proc.* 2019. Vol. 127. P. 412–422.
9. Lopes J. P., Hills D. A., Paynte R. J. H. *The axisymmetrie shrink fit problem subjected to axial force* *Europ. J. Mech. Solids*. 2018. Vol. 70. P. 172–180.
10. Ishlinsky A. Yu., Ivlev D. D. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti* [Mathematical theory of plasticity]. Moscow : Fizmatlit. 2001. 704 p.
11. Burenin A. A., Tkacheva A. V. *Kusochno-lineynyye plasticheskiye potentsialy kak sredstva raschetov ploskikh neustanovivshikhsya temperaturnykh napryazheniy* [Piecewise linear plastic potentials as a means of calculating plane unsteady temperature stresses]. *Izv. RAN: MTT*. 2020. № 6. Pp. 40–49.
12. Burenin A. A., Tkacheva A. V., Shcherbatyuk G. A. *K raschetu nestatsionarnykh temperaturnykh napryazheniy v uprugoplasticheskikh telakh* [On the calculation of non-stationary temperature stresses in elastic-plastic bodies] *Vychisl. Sherst'. spl. Sred.* 2017. Vol. 10, No. 3. S. 245–259.

© Буренин А. А., Ткачева А. В., 2022

ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ ПРИ ЕГО НАГРЕВЕ ЗА СЧЕТ ТРЕНИЯ

Л. В. Ковтанюк*, Г. Л. Панченко

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН
Российская Федерация, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 5

*E-mail: lk@iacp.dvo.ru

Приводится решение связанной задачи теории больших деформаций о деформировании и разогреве за счет трения скольжения о граничную шероховатую поверхность упруговязкопластического материала, расположенного между двумя соосными цилиндрами, внешний из которых движется с переменной скоростью.

Ключевые слова: термоупругость, вязкопластическое течение, большие деформации, деформационное теплопроизводство, теплопроводность.

DEFORMATION OF AN ELASTOVISCOPLASTIC CYLINDRICAL LAYER UNDER ITS HEATING DUE TO FRICTION

L. V. Kovtanyuk*, G. L. Panchenko

Institute of Automation and Control Processes FEB RAS
5, Radio str., Vladivostok, 690041, Russian Federation

*E-mail: lk@iacp.dvo.ru

The paper presents the solution of a coupled problem of the theory of large strains on deformation and heating of an elastoviscoplastic material located between two coaxial cylinders. The outer cylinder moves at a variable speed. Deformation and heating of the material occur due to sliding friction on the boundary rough surface.

Keywords: thermoelasticity, viscoplastic flow, large strains, deformational heat production, thermal conductivity.

Введение. В отличие от движений жестковязкопластических сред при отказе от положения о недеформируемости материала застойных зон и продвигающихся ядер возникает необходимость постановок задач в рамках теории больших упруговязкопластических деформаций [1; 2]. В областях вязкопластического течения деформации положить малыми невозмож-

но, а в областях упругого деформирования они существенно зависят от параметров протекающего течения. Современный этап развития фундаментальной механики требует одновременного учета сложных реологических свойств материалов в условиях связанности процессов деформирования и тепловыделения и теплопередачи. Этому же требует и современная технологическая практика обработки материалов давлением в авиационной, аэрокосмической, энергетической промышленности.

Учет теплотворной способности необратимого деформирования (связанности задач теории больших деформаций) усложняет математическое моделирование процесса деформирования, постановки и методы решения соответствующих краевых задач [3–5]. Производство тепла за счет необратимого деформирования и за счет трения материала о шероховатые поверхности, его ограничивающие, в прямолинейных движениях упруговязкопластических сред рассматривалось в [6–8]. Здесь рассмотрим связанную задачу о прямолинейном движении упруговязкопластического материала, зажато в зазоре между коаксиальными цилиндрическими поверхностями, при заданном переменном движении внешней из них с использованием математической модели, когда обратимые и необратимые деформации определяются дифференциальными уравнениями их переноса [2; 9].

Основные зависимости модели. Дифференциальные уравнения изменения (переноса) тензоров обратимых (термоупругих) $\mathbf{m}$ и необратимых $\mathbf{p}$ деформаций запишем [2] в виде

$$\frac{D\mathbf{m}}{Dt} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{1}{2} \left((\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p - \mathbf{z}) \right), \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{p}}{Dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varepsilon}^p - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^p \cdot \mathbf{p}, \quad (2)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{e} + \alpha T_0 \theta \mathbf{I},$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m}),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}) / 2,$$

$$\boldsymbol{\omega} = (\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}) / 2,$$

$$\theta = (T - T_0) T_0^{-1}.$$

Здесь $\mathbf{v}$ – вектор скорости; T_0 , T – температура недеформированного состояния и текущая температура; $\mathbf{e}$ – тензор, задающий упругие деформации; $\mathbf{I}$ – единичный тензор; $\mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m})$ – нелинейная часть тензора вращений $\boldsymbol{\varphi}$ ($\boldsymbol{\varphi} = -\boldsymbol{\varphi}^T$), в [2] она выписана полностью; $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ – скорость изменения необратимых деформаций, α – коэффициент линейного расширения.

Соотношением (2) вводится объективная производная по времени, которая задает взаимодействие обратимых и необратимых деформаций

в процессе деформирования, обеспечивающее геометрическую корректность в построениях кинематики. Когда $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{0}$, тензор необратимых деформаций неизменен и согласно (2) изменяются только его компоненты, что характерно для процесса разгрузки.

Для тензора полных деформаций Альманси $\mathbf{d}$ из (1) и (2) следует

$$\mathbf{d} = \mathbf{m} + \mathbf{p} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} / 2 - \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{m}. \quad (3)$$

Тензор $\mathbf{m}$ является главной линейной частью тензора обратимых деформаций $\mathbf{c} = \mathbf{m} - 0,5\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}$. Далее принимаем гипотезу о независимости плотности распределения внутренней энергии $\Psi(\mathbf{m}, \theta)$ от необратимых деформаций $\mathbf{p}$, что позволяет разделить процесс деформирования на консервативную и диссипативную составляющие. Считаем, что деформируемый изотропный материал механически несжимаем; все изменение его объема сводится к тепловому расширению. Из закона сохранения энергии можно [2] получить

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} -P_1 \mathbf{I} + (1 + 3\alpha T_0 \theta)^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{d}} \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{d}), & \mathbf{p} \equiv \mathbf{0}, \\ -P_2 \mathbf{I} + (1 + 3\alpha T_0 \theta)^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{m}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}), & \mathbf{p} \neq \mathbf{0}, \end{cases}$$

$$W = W(J_1, J_2, \theta) = -2\mu J_1 - \mu J_2 + b J_1^2 + (b - \mu) J_1 J_2 - \chi J_1^3 + \\ + v_1 J_1 \theta + v_2 \theta^2 - v_3 J_1 \theta^2 - v_4 J_1^2 \theta - v_5 J_2 \theta - v_6 \theta^3 + \dots,$$

$$J_k = \begin{cases} L_k, & \mathbf{p} = \mathbf{0}, \\ I_k, & \mathbf{p} \neq \mathbf{0}, \end{cases} \quad L_1 = \text{tr} \mathbf{d}, \quad L_2 = \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}, \\ I_1 = \text{tr} \mathbf{c}, \quad I_2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -\text{div} \mathbf{J} - T^{-2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + T^{-1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (5)$$

В (4) и (5) $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений; $W = \rho_0 \Psi(\mathbf{m}, \theta)$ – упругий потенциал; ρ_0 – плотность материала в свободном состоянии; P_1 и P_2 – неизвестные функции добавочного гидростатического давления; μ – модуль сдвига, b , χ , v_m ($m = 1, 2, \dots, 6$) – иные термомеханические постоянные; s – плотность энтропии; $\mathbf{q}$ – поток тепла; $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} s + \mathbf{q}$ – поток энтропии. Принимая закон теплопроводности Фурье, из (4), (5) получаем уравнения теплопроводности:

в областях обратимого деформирования, предшествующего вязкопластическому течению

$$(1 + \beta_1 \theta + \beta_2 \text{tr} \mathbf{d}) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta_3 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{d} = g \Delta \theta, \\ \beta_1 = \frac{v_2(1 - 3\alpha T_0) - 3v_6}{v_2}, \quad \beta_2 = -\frac{v_3}{v_2}, \quad \beta_3 = -\frac{v_1 + v_5}{v_2}; \quad (6)$$

в области течения

$$(1 + \beta_1 \theta + \beta_2 \operatorname{tr} \mathbf{c}) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta_3 (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \cdot \mathbf{c} = g \Delta \theta - \frac{1}{2\nu_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (7)$$

В областях разгрузки справедливо уравнение (8) с тензором $\mathbf{c}$ вместо $\mathbf{d}$. В (6), (7) g – коэффициент температуропроводности.

В качестве пластического потенциала (уравнения поверхности нагружения) далее принимается [10] обобщенное условие пластического течения Треска – Сен-Венана

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = k, \\ F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \frac{1}{2} \max |\sigma_i - \sigma_j| - \eta \max |\varepsilon_k^p|, \\ k = k_0 (1 - \theta/\theta_m)^2, \quad \theta_m = (T_m - T_0)/T_0, \quad (8)$$

со следованием ассоциированного закона пластического течения [10]

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \zeta \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \zeta > 0. \quad (9)$$

В (8) и (9) σ_i , ε_k^p – главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций; k – предел текучести; η – вязкость, T_m – температура плавления материала.

Постановка задачи. Обратимое деформирование. Рассмотрим несжимаемый упруговязкопластический материал, расположенный в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрами с радиусами r_0 и R ($r_0 < R$). Внутренний цилиндр жестко закреплен, а внешний цилиндр движется равноускоренно. Полагаем $u = u_z(r, t)$, $v = v_z(r, t)$ в цилиндрической системе координат r, φ, z . Граничные условия записываются в форме

$$v^+ \Big|_{r=r_0} = u^+ \Big|_{r=r_0} = 0, \quad v^+ \Big|_{r=R} = v_R = a_1 t, \\ u^+ \Big|_{r=R} = u_R = a_1 t^2 / 2, \quad \sigma_{rr} \Big|_{r=r_0} = a_0. \quad (10)$$

В условиях (10) знаком «+» обозначены скорости и перемещения граничных цилиндров, a_0 и a_1 – заданные постоянные, σ_{rr} – радиальная компонента тензора напряжений. Последнее условие (10) задает напряженное состояние, вызванное начальным поджатием.

Считаем, что материал начинает деформироваться из свободного состояния и первоначально обратимо. Пока выполняется условие

$$|\sigma_{rz}| - f |\sigma_{rr}| < 0, \quad (11)$$

материал на границах $r = r_0$, $r = R$ удерживается за счет сухого трения с коэффициентом f . Решение упругой задачи получаем, используя формулу Мурнагана (4), уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \quad (12)$$

и граничные условия (10):

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= \frac{c}{r}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\phi\phi} = a_0, \quad \sigma_{zz} = a_0 + \frac{c^2}{\mu r^2}, \quad c = c(t) = \mu u_R \ln^{-1} \frac{R}{r_0}, \\ u &= \frac{c}{\mu} \ln \frac{r}{r_0}, \quad v = \frac{\dot{c}}{\mu} \ln \frac{r}{r_0}, \quad e_{rz} = \frac{c}{2\mu r}, \quad e_{rr} = -\frac{3}{2} e_{rz}^2, \quad e_{zz} = \frac{1}{2} e_{rz}^2, \\ d_{rr} &= -\frac{1}{2} u'^2, \quad d_{rz} = \frac{1}{2} u', \quad u' = \frac{\partial u}{\partial r}. \end{aligned} \quad (13)$$

Увеличение со временем скорости движения внешнего цилиндра приводит к обращению неравенства (11) в равенство на внутренней границе $r = r_0$ в некоторый момент времени $t = t_1$, с которого начинается проскальзывание материала и его разогрев вследствие трения о жесткий внутренний цилиндр. Положим для определенности $a_0 < k/f$. Тогда проскальзывание материала в окрестности внутреннего цилиндра начнется раньше, чем пластическое течение. В таком случае принимаем условия

$$\begin{aligned} \theta(r, t_1) &= 0, \quad \theta(r_0, t) = \gamma_1 u(r_0, t), \quad \theta(R, t) = 0, \\ (|\sigma_{rz}| - f|\sigma_{rr}| - \xi v) \Big|_{r=r_0} &= 0, \quad t > t_1 = \sqrt{\frac{2fa_0 r_0}{\mu a_1} \ln \frac{r_0}{R}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь γ_1 – постоянная теплопроизводства за счет трения; ξ – коэффициент вязкого трения. Полагаем, что температура θ при деформировании не достигнет температуры плавления. Для компонент тензора напряжений, обратимых деформаций и градиента перемещений согласно (3), (4) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi\phi} &= -p_1, \quad \sigma_{rr} = -p_1 + b\theta(u')^2, \quad \sigma_{zz} = -p_1 + \mu(u')^2, \quad \sigma_{rz} = (\mu - l\theta)u', \\ l &= v_1 + v_5 + 3\mu\alpha T_0, \quad m_{rz} = \frac{c}{2(\mu - l\theta)r}, \quad m_{rr} = -\frac{3}{2} m_{rz}^2, \\ m_{zz} &= \frac{1}{2} m_{rz}^2, \quad u' = \frac{c}{(\mu - l\theta)r}. \end{aligned} \quad (15)$$

Компоненты векторов перемещений и скорости с учетом (14) и (15) принимают вид

$$\begin{aligned} u &= c \int_{r_0}^r \frac{dr}{(\mu - l\theta)r} + u(r_0), \quad u(r_0) = \frac{1}{\xi r_0} \int_{t_1}^t c dt + \frac{fa_0}{\xi} (t - t_1), \\ v &= \dot{c} \int_{r_0}^r \frac{dr}{(\mu - l\theta)r} + lc \int_{r_0}^r \frac{\dot{\theta} dr}{(\mu - l\theta)^2 r} + \frac{c}{\xi r_0} + \frac{fa_0}{\xi} + h_2(r, t), \quad h_2(r, t) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Из уравнений равновесия следует, что σ_{rz} удовлетворяет первой зависимости (13) и уравнение для определения неизвестной функции p_1

$$p_1 = lc^2 \int_{r_0}^r \left(\theta' - \frac{\theta}{r} + \frac{2l\theta\theta'}{\mu - l\theta} \right) \frac{dr}{(\mu - l\theta)^2 r^2} + \frac{l\theta(r_0)c^2}{(\mu - l\theta(r_0))^2 r_0^2} - a_0. \quad (17)$$

Уравнение теплопроводности (6) принимает форму

$$\left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 lc^2}{2(\mu - l\theta)^3 r^2} \right) \dot{\theta} + \frac{\beta_3 c \dot{c}}{2(\mu - l\theta)^2 r^2} = g \left(\theta'' + \frac{1}{r} \theta' \right), \quad (18)$$

где

$$c \int_{r_0}^R \frac{dr}{(\mu - l\theta)r} + \frac{1}{\xi r_0} \int_{t_1}^t c dt + \frac{fa_0}{\xi} (t - t_1) = u_R. \quad (19)$$

Система уравнений (18), (19) при условиях (14) и условии непрерывности функции c в момент времени $t = t_1$ решается численно с использованием конечно-разностного метода.

При увеличении скорости внешнего цилиндра в некоторый момент времени $t = t_2$, вычисляемый из уравнения $c(t_2) = -fR\sigma_{rr}(R, t_2)$, неравенство (11) перестает выполняться и на границе $r = R$, т.е. начинается проскальзывание и разогрев материала в окрестности внешнего цилиндра. Условие (12) при $r = R$ и второе условие (14) заменяем следующими

$$\left(|\sigma_{rz}| - f|\sigma_{rr}| - \xi[v] \right) \Big|_{r=R} = 0, \quad [v] = v^+ - v, \quad \theta(R, t) = \gamma_1[u] \Big|_{r=R}, \quad [u] = u^+ - u. \quad (20)$$

Решение системы уравнений (17)–(19) с изменившейся согласно условиям (20) функцией c с учетом (14) и непрерывности θ , p_1 и c при $t = t_2$ находится численно. Найденное решение упругой неизотермической задачи при растущей скорости внешнего цилиндра справедливо до момента времени $t = t_3$, для нахождения которого используется уравнение $c(t_3) = k(t_3)r_0$, когда на внутренней границе $r = r_0$ впервые выполнится условие пластического течения (9) в виде $\sigma_{rz}|_{r=r_0} = k(t_3)$.

Вязкопластическое течение при возрастающей и постоянной скорости внешнего цилиндра. С момента времени $t = t_3$ в материале растет область вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$. Здесь $r = r_1(t)$ – движущаяся граница, отделяющая область течения от области $r_1(t) \leq r \leq R$, в которой материал продолжает деформироваться обратимо.

Из формул (4) в области вязкопластического течения для напряжений получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p_1 + 2(\mu - l\theta)m_{rr} + (3\mu + l\theta)m_{rz}^2, \quad \sigma_{\phi\phi} = -p_1, \\ \sigma_{zz} &= -p_1 + 2(\mu - l\theta)m_{zz} + (3\mu + l\theta)m_{rz}^2, \quad \sigma_{rz} = 2(\mu - l\theta)m_{rz}. \end{aligned} \quad (21)$$

Согласно уравнениям равновесия (12) аналогично (17) в области пластического течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ получим уравнение для изменившейся функции p_1 . Для компоненты напряжений σ_{rz} продолжает выполняться первое соотношение (13).

Согласно зависимостям (1)–(2) кинематика течения задается соотношениями

$$\begin{aligned} d_{rz} &= m_{rz} + p_{rz}, \quad \frac{dd_{rz}}{dt} = \frac{\partial d_{rz}}{\partial t} = \frac{1}{2}v', \quad r_{rz} = -r_{zr} = \frac{2\varepsilon_{rz}(1 - m_{zz})}{m_{rr} + m_{zz} - 2}, \\ \varepsilon_{rr}^p &= \frac{dp_{rr}}{dt} + 2p_{rz}(r_{zr} + \varepsilon_{rz}^p), \\ \varepsilon_{zz}^p &= \frac{dp_{zz}}{dt} + 2p_{rz}(r_{rz} + \varepsilon_{rz}^p), \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}v' = \varepsilon_{rz}^e + \varepsilon_{rz}^p = \frac{\partial m_{rz}}{\partial t} + \frac{\partial p_{rz}}{\partial t}, \\ \varepsilon_{rr}^p &= -\varepsilon_{zz}^p = \frac{\varepsilon_{rz}^p}{2} \frac{m_{rr} - m_{zz}}{m_{rz}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Следуя ассоциированному закону течения (9) и условию пластичности (8) в форме $\sigma_{rz} = k + \eta \varepsilon_{rz}^p$ с учетом непрерывности напряжений на границе $r = r_1(t)$, для компонент тензоров скоростей пластических деформаций и пластических деформаций получаем

$$\varepsilon_{rz}^p = \eta^{-1}(c/r - k), \quad p_{rz} = \int_{t_3}^t \varepsilon_{rz}^p dt, \quad c = r_1 k(r_1). \quad (23)$$

В области вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ с учетом данных зависимостей, получим уравнение теплопроводности и компоненту вектора скорости.

Для компонент тензоров обратимых деформаций m_{rr} , m_{zz} и необратимых деформаций p_{rr} , p_{zz} в области $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ из соотношений (13) и (22) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{zz}}{\partial t} &= \varepsilon_{rz}^p \left(m_{rz} - \frac{p_{zz}}{m_{rz}} \right) + \frac{4(\varepsilon_{rz}^e + \varepsilon_{rz}^p) p_{rz}}{2 + m_{rz}^2} \left(1 + p_{zz} - \frac{m_{rz}^2}{2} - 2m_{rz} p_{rz} \right), \\ p_{rr} &= -p_{zz} - 2p_{rz}^2, \quad m_{zz} = -p_{zz} + \frac{m_{rz}^2}{2} + 2m_{rz} p_{rz}, \quad m_{rr} = -m_{zz} - m_{rz}^2. \end{aligned} \quad (24)$$

В области обратимого деформирования $r_1(t) \leq r \leq R$ уравнение теплопроводности имеет вид (18), а из (21) с учетом непрерывности напряжений на упругопластической границе следует уравнение для функции p_1 .

Полученные уравнения для неизвестных функций θ , p_1 , r_1 , c , m_{rr} , m_{zz} , p_{rr} и p_{zz} решаются одновременно с использованием второго условия (14) и условий (20). Также предполагается непрерывность функций θ , p_1 и c в момент времени $t = t_3$ и непрерывность температуры и теплового потока на

упругопластической границе $r = r_1(t)$. Для решения этой системы разработана конечно-разностная схема первого порядка по времени и второго – по пространству, учитывающая движущуюся упругопластическую границу и изменяющиеся области необратимого и обратимого деформирования.

Если с момента времени $t = t_4$ скорость внешнего цилиндра положить постоянной, т. е. $v_R = a_1 t_4$, то качественное изменение деформационного процесса не происходит.

Течение при убывающей скорости внешнего цилиндра. Разгрузка среды и охлаждение. В некоторый момент времени $t = t_5$ начнем снижать скорость внешнего цилиндра по закону $v_R = a_1 t_4 - a_2(t - t_5)$. Область течения при этом продолжает увеличиваться, но скорость продвижения по материалу упругопластической границы $r = r_1(t)$ падает и в некоторый расчетный момент времени $t = t_6$ становится равной нулю.

С момента времени $t = t_6$ граница $r = r_1(t)$ начинает двигаться к внутреннему цилиндру $r = r_0$. В материале появляется новая область $r_1(t) \leq r \leq r_1(t_6)$, в которой компонента тензора скоростей пластических деформаций ε_{rz}^p равна нулю, и, следовательно, компонента тензора пластических деформаций p_{rz} не изменяется. В сужающейся области $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ продолжается вязкопластическое течение, в области $r_1(t_6) \leq r \leq R$ деформирование обратимо.

В некоторый момент времени $t = t_7$ на внешней граничной поверхности $r = R$ выполнится равенство $(|\sigma_{rz}| - f|\sigma_{rr}|)_{r=R} = 0$ и, следовательно, вместо условия проскальзывания (19) вновь выполняется (12). Материал снова движется вместе с внешней граничной поверхностью без проскальзывания и, таким образом, не нагревается без трения. Поэтому граничное условие для температуры (20) заменим следующим:

$$(\delta\theta' + h\theta)_{r=R} = 0, \quad (25)$$

где δ и h – коэффициенты теплопроводности и теплоотдачи материала соответственно.

В расчетный момент времени $t = t_8$ упругопластическая граница $r = r_1(t)$ совпадает с внутренней поверхностью цилиндра $r = r_0$. С этого момента времени в материале остаются область обратимого деформирования $r_1(t_6) \leq r \leq R$ и область $r_0 \leq r \leq r_1(t_6)$, в которой не изменяется компонента тензора необратимых деформаций p_{rz} . В этих областях уравнение теплопроводности имеет вид (18).

В момент времени $t = t_9 = a_1 a_2^{-1} t_4 + t_5$ внешний цилиндр останавливается. Далее в момент времени $t = t_{10}$ теперь уже и на внутренней границе $r = r_0$ выполнится равенство $(|\sigma_{rz}| - f|\sigma_{rr}|)_{r=r_0} = 0$. Скорость во всем деформируемом слое становится равной нулю. Материал слоя начинает остывать. Уравнение теплопроводности во всем слое принимает вид

$$\left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 l c^2}{2(\mu - l\theta)^3 r^2}\right) \dot{\theta} = g \left(\theta'' + \frac{1}{r} \theta' \right).$$

Первое граничное условие из (14) для этого уравнения изменим на условие

$$\theta'|_{r=r_0} = 0.$$

На границе $r = R$ выполняется условие (25). С течением времени материал полностью остынет и далее напряжения, деформации и перемещения перестают изменяться. Дальнейшая разгрузка связана с уменьшением напряжения σ_{rr} на границе $r = r_0$ до нуля.

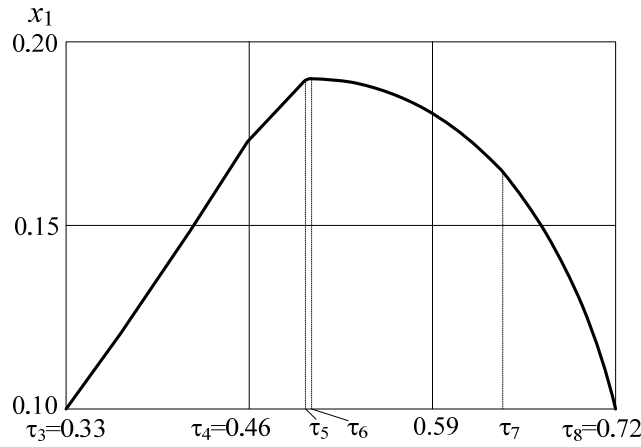


Рис. 1. График упругопластической границы

Расчеты проводились в безразмерных переменных $x = r/R$ и $\tau = t\sqrt{a_1/R}$ при следующих значениях постоянных: $r_0/R = 0,1$, $a_0/\mu = -4,08 \times 10^{-4}$, $k_0/\mu = 2,63 \times 10^{-3}$, $f = 0,2$, $\beta_1 = 0,379$, $\beta_3 = -0,558$, $\theta_m = 2,18$, $qR^{-1}\sqrt{a_1^{-1}R^{-1}} = 21,06$, $\mu\xi^{-1}\sqrt{a_1^{-1}R^{-1}} = 219,13$, $\mu\eta^{-1}\sqrt{a_1^{-1}R^{-1}} = 525,9$, $l/\mu = 0,3$, $v_2/\mu = 0,5$, $\gamma_1 R = 10$, $a_2/a_1 = 2$, $hR/\delta = 12$.

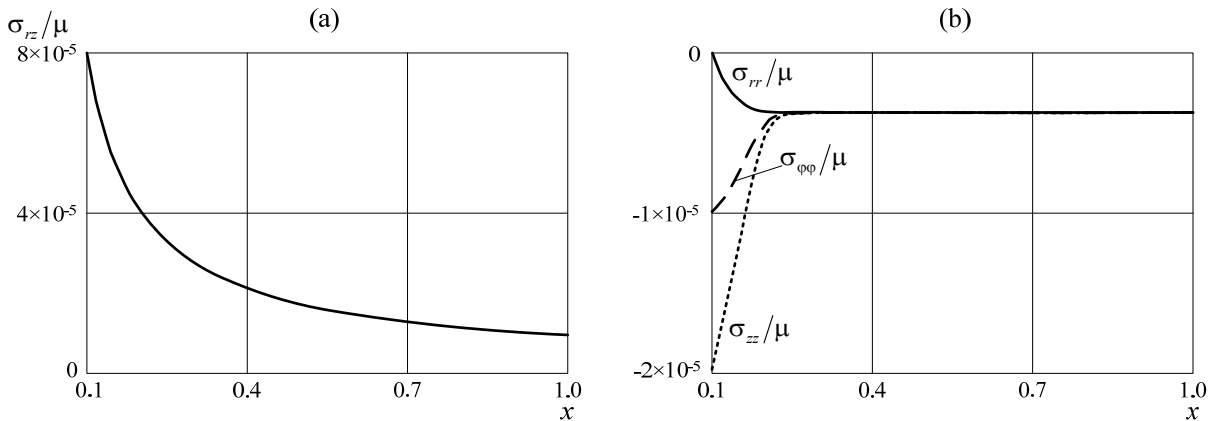


Рис. 2. Распределение по слою остаточных напряжений

На рис. 1 представлен график изменения упругопластической границы $x_1 = r_1/R$ в зависимости от безразмерного времени τ в интервале от τ_3 до τ_8 . Компонента остаточных напряжений σ_{rz}/μ показана на рис. 2, *a*. На рис. 2, *b* представлены остаточные напряжения σ_{rr}/μ , $\sigma_{\varphi\varphi}/\mu$ и σ_{zz}/μ сплошной, штриховой и пунктирной линиями соответственно.

Заключение. С использованием дифференциальных уравнений изменения тензоров обратимых и необратимых деформаций рассмотрен процесс развития и торможения вязкопластического течения материала с учетом его обратимого деформирования и теплопередачи в нем вне области течения. Учитывается теплотворная способность деформирования и разогрев материала в условиях его проскальзывания по граничной поверхности.

Библиографические ссылки

1. Левитас В. И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев : Наукова думка, 1987. 232 с.
2. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток : Дальнаука, 2013. 312 с.
3. Ковтанюк Л. В. Моделирование больших упругопластических деформаций в неизотермическом случае // Дальневосточный математический журнал. 2004. № 1. С. 107–117.
4. Xiao H., Bruhns O. T., Meyers A. Thermodynamic laws and consistent Eulerian formulation of finite elastoplasticity with thermal effects // J. Mech. Phys. Solids. 2007. Vol. 55, I. 2. P. 338–365.
5. Thermo-mechanically coupled cyclic elasto-viscoplastic constitutive model of metals: Theory and application/ Zhu Y., Kang G., Kan Q. and others // Int. J. Plasticity. 2016. Vol. 79. P. 111–152.
6. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л. Неизотермическое движение упруговязкопластической среды в трубе в условиях изменяющегося перепада давления // Доклады АН. 2015. Т. 464. № 3. С. 284–287.
7. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л. Развитие и торможение вязкопластического течения в слое при его нагреве за счет трения о шероховатую плоскость // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56, № 4 (332). С. 101–111.
8. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л. Деформирование и разогрев упруговязкопластического цилиндрического слоя при его движении за счет изменяющегося перепада давления // Известия РАН. Механика твердого тела. 2018. № 1. С. 6–18.
9. Быковцев Г. И., Шитиков А. В. Конечные деформации упругопластических сред // Доклады АН СССР. 1990. Т. 311, № 1. С. 59–62.
10. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток : Дальнаука, 1998. 528 с.

References

1. Levitas V. I. *Bol'shie uprugoplasticheskie deformacii materialov pri vysokom davlenii* [Large elastoplastic deformations of materials at high pressure]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1987, 232 p.
2. Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. *Bol'shie neobratimye deformacii i uprugoe posledejstvie* [Large irreversible deformations and elastic aftereffect]. Vladivostok, Dal'nauka Publ., 2013, 312 p.
3. Kovtanyuk L. V. [Modeling of large elastoplastic deformations in the nonisothermal case]. *Dal'nevostochnyj matematicheskij zhurnal*. 2004, no. 1, p. 107–117. (In Russ.)
4. Xiao H., Bruhns O. T., Meyers A. Thermodynamic laws and consistent Eulerian formulation of finite elastoplasticity with thermal effects // *J. Mech. Phys. Solids*. 2007. Vol. 55, I. 2. P. 338–365.
5. Thermo-mechanically coupled cyclic elasto-viscoplastic constitutive model of metals: Theory and application / Zhu Y., Kang G., Kan Q. and others // *Int. J. Plasticity*. 2016. Vol. 79. P. 111–152.
6. Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Panchenko G. L. [Non-isothermal motion of an elastoviscoplastic medium in a pipe under conditions of a changing pressure drop]. *Doklady akademii nauk*. 2015, Vol. 464. no. 3, p. 284–287. (In Russ.)
7. Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Panchenko G. L. [Development and deceleration of a viscoplastic flow in a layer during its heating due to friction on a rough plane]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 2015, Vol. 56, no. 4 (332), p. 101–111. (In Russ.)
8. Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Panchenko G. L. [Deformation and heating of an elastoviscoplastic cylindrical layer during its motion due to a changing pressure drop]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*. 2018., no. 1. p. 6–18. (In Russ.)
9. Bykovtsev G. I., Shitikov A. V. Finite deformations of elastoplastic media. *Doklady AN SSSR*. 1990, Vol. 311, no. 1, p. 59–62. (In Russ.)
10. Bykovcev G. I., Ivlev D. D. *Teoriya plastichnosti* [Theory of plasticity]. Vladivostok, Dal'nauka Publ., 1998, 528 p.

NATURAL DIFFERENTIAL INVARIANTS AND EQUIVALENCE OF THIRD ORDER NONLINEAR DIFFERENTIAL OPERATORS

V. V. Lychagin¹, V. A. Yumaguzhin^{2*}

¹Arctic University of Norway, Faculty of Mathematics and Statistics
6050 Langnes, N-9037 Tromsø, Norway

²Program Systems Institute of RAS,
4a, St. Peter the Great, Yaroslavl region, Pereslavl-Zalessky,
152020, Russian Federation

*E-mail: yuma@diffiety.botik.ru

We give a description of the field of rational natural differential invariants for a class of nonlinear differential operators of the third order on a two dimensional manifold and show their application to the equivalence problem of such operators.

ЕСТЕСТВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ И ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В. В. Лычагин¹, В. А. Юмагузин^{2*}

¹Арктический университет Норвегии, факультет математики и статистики
6050 Лангнес, N-9037 Тромсø, Норвегия

²Институт программных систем РАН
Российская Федерация, 152020, г. Переславль-Залесский,
ул. Петра Первого, 4а

*E-mail: yuma@diffiety.botik.ru

В статье приведено описание поля рациональных естественных дифференциальных инвариантов для класса нелинейных дифференциальных операторов третьего порядка на двумерном многообразии. Авторы показывают их применение к проблеме эквивалентности таких операторов.

Introduction. In this paper, we continue to study rational differential invariants of differential operators on two-dimensional manifolds. Here we consider a class of nonlinear operators that in local coordinates x_1, x_2 have the following form:

$$A_w : f \longrightarrow \sum_{i,j,k} a_{ijk}(x, f) \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} +$$

$$+\sum_{i,j} a_{ij}(x, f) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i a_i(x, f) \frac{\partial f}{\partial x_i} + a_0(x, f) f, \quad (1)$$

where $x = (x_1, x_2)$, $f = f(x)$.

We call such operators as weakly nonlinear operators. In paper [5], we found rational differential invariants of the 2nd order weakly nonlinear operators and used them to solve the local equivalence problem.

Here we use the methods of [5] to find rational differential invariants for the 3rd order weakly nonlinear operators and apply them to solve the local as well as the global equivalence problem. Additionally we will assume that all coefficients $a(x, y)$ of these operators are smooth in x and rational in y .

It is easy to see that the pseudogroup of local diffeomorphisms (in variables x) naturally acts in this class of operators. The main step in studies of such operators is a representation of operator A_w as a pair (A, f) (we call it as a (related pair), where

$$A = \sum_{i,j,k} a_{ijk}(x, y) \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \sum_{i,j} a_{ij}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i a_i(x, y) \frac{\partial}{\partial x_i} + a_0(x, y) \quad (2)$$

is a linear third order linear differential operator on the extended space (x, y) . The procedure of descent allows us to get differential invariants of weakly nonlinear operators from invariants of related pairs and linear operators of the form

$$\begin{aligned} A_f = \sum_{i,j,k} a_{ijk}(x, f) \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \sum_{i,j} a_{ij}(x, f) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \sum_i a_i(x, f) \frac{\partial}{\partial x_i} + a_0(x, f). \end{aligned} \quad (3)$$

Using this procedure and a machinery of reduced Gröbner bases, we propose a method to find invariants of the 3rd order weakly nonlinear operators.

Notations. In this paper, we use the same notations as in [3; 4]. Let M be n -dimensional manifold and let $\tau: TM \longrightarrow M$ and $\tau^*: T^*M \longrightarrow M$ be respectively tangent and cotangent bundles over M .

We will denote by $Diff_k(M)$ the module of linear k -th order operators, acting in $C_\infty(M)$. The corresponding vector bundle of such operators we denote by, thus $Diff_k(M)$ is also the module of smooth sections of $\chi_k: Diff_k = C^\infty(\chi_k)$.

The group of diffeomorphisms of M will be denoted by $G(M)$ and the multiplicative group of nowhere vanishing functions on M will be denoted as $F(M)$.

We denote by $\Sigma^k(M)$ and $\Sigma_k(M)$ the modules of symmetric k -forms and k -vectors respectively. Also, we denote by Ω^k the modules of exterior k -forms.

Linear differential operators on M . In this section, we recall the necessary facts from [3] on scalar linear third order differential operators on two-dimensional manifolds. Let M be 2-dimensional smooth oriented connected manifold and let $\pi: M \times R \longrightarrow M$ be trivial line bundle. Denote by

$\pi_k : J^k(\pi) \longrightarrow M$ the bundles of k -jets of smooth sections of π (i.e. k -jets of smooth functions on M).

Let $G(M)$ be the group of diffeomorphisms of the manifold M . Then, together with the action of $G(M)$ on M , we have also the actions $G(M)$ in the bundles π_k by prolongations of diffeomorphisms.

The prolongations of diffeomorphisms $\varphi \in G(M)$ in the bundles π_k will be denoted by $\varphi^{(k)}$.

Let $\chi_3 : Diff_3(M) \longrightarrow M$ be the bundle of the third order linear differential operators on M and be bundles of their k -jets of sections of χ_3 . The group $G(M)$ acts on operators $A \in Diff_3(M)$ in natural way: $\varphi_* : A \longrightarrow \varphi_*(A) = \varphi_* \circ A \circ \varphi_*^{-1}$, where the morphism $\varphi_* : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ is defined by the formula $\varphi_* = (\varphi^{-1}) : h \longrightarrow h \circ \varphi^{-1}$.

Symbols. By the symbol $\sigma_{3,A}$ of the operator A , we means the equivalence class $\sigma_{3,A} = A \bmod Diff_3(M)$. Let an operator $A \in \bmod Diff_3(M)$. be represented in local coordinates x_1, x_2 of M in the form

$$\begin{aligned} A = & a_1 \partial_1^3 + 3a_2 \partial_1^2 \partial_2 + 3a_3 \partial_2^2 \partial_1 + a_4 \partial_2^3 + \\ & + b_1 \partial_1^2 + 2b_2 \partial_1 \partial_2 + b_3 \partial_2^2 + c_1 \partial_1 + c_2 \partial_2 + a_0, \end{aligned} \quad (4)$$

where the all coefficients are smooth functions of $x = (x_1, x_2)$, ∂_1 and ∂_2 are ∂_{x_1} and ∂_{x_2} respectively.

Then the symbol $\sigma_{3,A}$ is identified with the symmetric 3-vector

$$\sigma_{3,A} = a_1 \partial_1^3 + 3a_2 \partial_1^2 \partial_2 + 3a_3 \partial_2^2 \partial_1 + a_4 \partial_2^3 \in \Sigma_3(M), \quad (5)$$

where dots and degrees are symmetric products of the vector fields ∂_1, ∂_2 . The symbol $\sigma_{3,A}$ is regular (at point or in domain) if it as a homogeneous cubic polynomial on the cotangent bundle $T^*(M)$ has distinct roots.

Denote by $\Delta(\sigma_{3,A})$ the discriminant of $\sigma_{3,A}$, then $\Delta(\sigma_{3,A}) = 6a_1 a_2 a_3 a_4 - 4(a_1 a_3^3 - a_4 a_2^3) + 3a_2^2 a_3^2 - a_1^2 a_4^2$.

Recall that the symbol $\sigma_{3,A}$ has three distinct real roots if $\Delta(\sigma_{3,A}) > 0$ and one real and two complex roots if $\Delta(\sigma_{3,A}) < 0$.

Thus, we say that the operator A is regular if its symbol $\sigma_{3,A}$ is regular or $\Delta(\sigma_{3,A}) \neq 0$.

More over, we say that an operator A is hyperbolic if $\Delta(\sigma_{3,A}) > 0$ and ultra-hyperbolic if $\Delta(\sigma_{3,A}) < 0$.

Locally, the symbol of a hyperbolic operator can be presented as a symmetric product of pair wise linear independent vector fields $\sigma_{3,A} = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$, and therefore there are local coordinates x_1, x_2 such that

$$\sigma_{3,A} = (a\partial_1 + b\partial_2) \cdot \partial_1 \cdot \partial_2, \quad (6)$$

where a and b are smooth functions and $ab \neq 0$.

For the case of ultrahyperbolic operators we have $\sigma_{3,A} = X \cdot q \sigma_3$, where X is a nonzero vector field and $q \in \Sigma_2$ is a positive symmetric 2-vector. Therefore, there are local coordinates x_1, x_2 such that

$$\sigma_{3,A} = (a\partial_1 + b\partial_2) \cdot (\partial_1^2 + \partial_2^2), \quad (7)$$

where a and b are smooth functions and $a^2 + b^2 > 0$.

Wagner connections. The following result due to Wagner [7; 3]. Theorem 1. (1) Let $A \in \text{mod } \text{Diff}_3 M$ be a regular differential operator. Then there exist a unique linear connection ∇ such that the symbol σ_3, A is parallel with respect to ∇ . (2) The curvature tensor of ∇ is zero.

We call this connection Wagner's connection. In the case of hyperbolic symbol, we choose local coordinates in M such that σ has form (6). Then the non zero Christoffel coefficients Γ_{jk}^i of the Wagner connection are the following:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{3}(\ln \frac{b}{a^2})_{x_1}, \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{3}(\ln \frac{a}{b^2})_{x_2}, \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{3}(\ln \frac{b}{a^2})_{x_2}, \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{3}(\ln \frac{a}{b^2})_{x_1}.$$

In the ultrahyperbolic case (7) we have the following nonzero Christoffel coefficients:

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{6}(\ln(a^2 + b^2))_{x_2}, \Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \frac{a_{x_1}b - ab_{x_1}}{a^2 + b^2}, \Gamma_{22}^1 = -\Gamma_{12}^2 = \frac{ab_{x_2} - a_{x_2}b}{a^2 + b^2}$$

Corollary 2. The torsion form θ of the Wagner connection is $\theta = \frac{1}{3}(\ln \frac{b^2}{a})_{x_1} dx_1 + \frac{1}{3}(\ln \frac{a^2}{b})_{x_2} dx_2$ for the hyperbolic case and $\theta = \frac{a_{x_2}b - ab_{x_2}}{a^2 + b^2} dx_1 + \frac{ab_{x_1} - a_{x_1}b}{a^2 + b^2} dx_2 - \frac{1}{6}d(\ln(a^2 + b^2))$ for the ultrahyperbolic case.

Symbols and quantization. Let $\Sigma = \bigoplus_{k \geq 0} \Sigma^k(M)$ be the graded algebra of symmetric differential forms and let ∇ be the Wagner connection associated with a regular symbol from $\Sigma_3(M)$. Then the covariant differential

$$d_\nabla : \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M) \otimes \Omega^1(M)$$

define derivation $d_\nabla : \Sigma \longrightarrow \Sigma^{+1}$ of degree one in graded symmetric algebra $\Sigma = \bigoplus_{k \geq 0} \Sigma^k(M)$. Namely, this derivation is defined by its action on generators, and we have

$$d_{\nabla}^s = d : C^{\infty}(M) \longrightarrow \Omega^1(M) = \Sigma^1$$

$$d_{\nabla}^s = d : \Omega^1(M) = \Sigma^1 \xrightarrow{d_{\nabla}} \Omega^1(M) \otimes \Omega^1(M) \xrightarrow{Sym} \Sigma^2$$

Let now. We define a differential operator as follows:

$$Q(a_k)(h) = \frac{1}{k!} \langle a_k, (d_{\nabla}^s)^k(h) \rangle,$$

where $h \in C^{\infty}(M)$, $(d_{\nabla}^s)^k(h) \in \Sigma^k(M)$ and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the standard convolution

$$\Sigma_k(M) \otimes \Sigma^k(M) \longrightarrow C^{\infty}(M)$$

Remark, that the value of the symbol of the derivation d_{∇}^s at a covector θ equals to the symmetric product by θ into the module Σ . Therefore, the symbol of operator $Q(a_k)$ equals a_k as the symbol of a composition of operators equals the composition of symbols. We call differential operator $Q(a_k)$ a quantization of symbol a_k .

Let now $A \in Diff_3(M)$ and be its symbol. Then operator

$$A - Q(\sigma_{3,A})$$

has order 2, and let $\sigma_{2,A}$ be its symbol.

Then operator $A - Q(\sigma_{3,A}) - Q(\sigma_{2,A})$ has order 1 and let $\sigma_{1,A}$ be its symbol. Thus we get subsymbols $\sigma_{i,A} \in \Sigma_i(M)$, $0 \leq i \leq 2$, such that $A = Q(\sigma_{(3)}(A))$

Where

$$\sigma_{(3)}(A) = \sigma_{3,A} + \sigma_{2,A} + \sigma_{1,A} + \sigma_{0,A}, \quad (8)$$

σ – is the total symbol and

$$Q(\sigma_{(3)}(A)) = Q(\sigma_{3,A}) + Q(\sigma_{2,A}) + Q(\sigma_{1,A}) + Q(\sigma_{0,A}).$$

Coordinates. Let x_1, x_2 be local coordinates in a neighborhood $O \subset M$, where the symbol $\sigma_{3,4}$ is regular. Denote by x_1, x_2, w_1, w_2 induced standard coordinates in the tangent bundle over O .

Then $d_{\nabla}(dx_k) = -\sum \Gamma_{ij}^k dx_i \otimes dx_j$, where Γ_{ij}^k are the Christoffel symbols of the Wagner connection ∇ . Thus, in coordinates x, w we have $d_{\nabla}^s(w_k) = -\sum \Gamma_{ij}^k w_i w_j$ and the derivation d_{∇}^s has the form:

$$d_{\nabla}^s = \sum w_i \partial_i - \sum \Gamma_{ij}^k w_i w_j \partial_{w_k}.$$

Universal differential operator. We define a total operator of third order $\square_3 : C^{\infty}(J^k \chi_3) \longrightarrow C^{\infty}(J^{k+3} \chi_3)$ as it was done in [3].

In local coordinates this operator has the form

$$\square_3 - 6 \sum_{\alpha, 0 \leq |\alpha| \leq 3} \frac{u^\alpha}{\alpha!} \left(\frac{d}{dx} \right)^\alpha. \quad (9)$$

where $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $(d/dx)^\alpha = (d/dx_1)^{\alpha_1} (d/dx_2)^{\alpha_2}$, and (d/dx_1) , (d/dx_2) are total derivatives.

Theorem 3. The operator $\square_3$ commutes with the action of the group $G(M)$ on the jet bundles.

Natural differential invariants of regular operators. By natural differential invariants of order k we mean a function on $J^k(\chi_3)$ which are $G(M)$ -invariant and rational along fibers of the projection $\chi_{3,k}$.

Theorem 4. If I is a natural differential invariant of order $\leq k$ for differential operators of the third order, then $\square_3(I)$ is a natural differential invariant of the order $\leq (k+3)$ for these operators. We say that two natural differential invariants I_1, I_2 are in general position if

$$dI_1 \wedge dI_2 \neq 0, \quad (10)$$

where d is the total differential, and denote by $O(I_1, I_2) \subset J^\infty(\chi_3)$ the open domain, where condition (10) holds.

Theorem 5. Let natural differential invariants I_1, I_2 are in general position and let

$$J^\alpha = \square_3(J^\alpha),$$

where $0 \leq |\alpha| \leq 3$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$.

Then the field of natural differential invariants for differential operators of the third order in the domain $O(I_1, I_2)$ is generated by invariants I_1, I_2, J^α and all their Tresse derivatives

$$\frac{d^l J^\alpha}{dI_1^{l_1} dI_2^{l_2}}$$

where $l = l_1 + l_2$.

Thus, to obtain the field of natural differential invariants of linear regular differential operators of order 3, it is enough to have two natural differential invariants I_1, I_2 in general position. The invariants can be obtained by various methods. For example, as the invariant I_1 one can take the free term u_0 of the universal operator, or is natural invariant such that $I_1(A)$ is the natural convolution of the torsion form θ of the Wagner connection and the subsymbol $\sigma_{1,A}$. As the natural invariant I_2 one can take, for example, the invariant $\square_3(I_1)$.

Let $F_k^{(3)}$ be the field of all natural differential invariants of order $\leq k$ of linear scalar differential operators of order ≤ 3 on M . The $G(M)$ -action on M is transitive and, therefore, the set of all such invariants forms an R-field.

The natural projections $\chi_{k,l} : J^k(\chi) \longrightarrow J^l(\chi), k > l$, define the embeddings $F_l^{(3)} \longrightarrow F_k^{(3)}$ and their inductive limit $F_*^{(3)}$ is the field of natural differential invariants of linear differential operators on the manifold M .

Remark that the $G(M)$ -action on differential operators satisfies the conditions of the Lie-Tresse theorem (see [2]) and, therefore, the field $F_*^{(3)}$ separates regular $G(M)$ -orbits.

Linear differential operators on $M \times R$. Consider now linear differential operators A of the third order on the manifold $J^0(\pi) = M \times R$, that satisfy the following condition:

$$(A - A(1))(y) = 0,$$

where y is the fibrewise coordinate on $J^0(\pi)$.

In local coordinates (x_1, x_2) on M , we have representation (2) of operators of such type:

$$A = \sum_{i,j,k} a_{ijk}(x, y) \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \sum_{i,j} a_{ij}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i a_i(x, y) \frac{\partial}{\partial x_i} + a_0(x, y).$$

The module of these operators we will denote by $Diff_3(M, R)$ and by we will denote the corresponding bundle of these operators.

As before, elements of the module of $Diff_3(M, R)$ are just sections of the bundle ζ with the correspondence

$$Diff_3(M, R) \equiv C^\infty(\zeta), \quad A \longrightarrow S_A,$$

where $S_A(a, y) = A_{(a,y)}$ and $(a, y) \in M \times R$.

The diffeomorphism group $G(M)$ acts by prolongation $\varphi \longrightarrow \varphi^{(0)}$ on the manifold $J^0(\pi) = M \times R$, preserves the function y , and therefore acts in the bundle ζ as well as in the k -jet bundles $\zeta_k : J^k(\zeta) \longrightarrow M \times R$.

Linear differential operators A_f . Given an operator $A \in Diff_3(M, R) \equiv C^\infty(\zeta)$, and a function $f \in C^\infty(M)$ we define the operator $A_f = s_f^* \circ A \circ \pi^* \in Diff_3(M, R)$ as the operator that corresponds to the restriction of the section s_A to the graph of the function f . Here $s_f : M \longrightarrow M \times R$ is the section of the bundle π that corresponds to the function f . In local coordinates, we get the above representation (3) for this type of operators:

$$A_f = \sum_{i,j,k} a_{ijk}(x, f) \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \sum_{i,j} a_{ij}(x, f) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i a_i(x, f) \frac{\partial}{\partial x_i} + a_0(x, f)$$

Weakly nonlinear differential operators. Define now the space of weakly nonlinear operators of the third order $Diff_3^w(M)$ as the space of differential operators A_w on $C^\infty(M)$ of the form

$$A_w(f) = A_f(f), \quad (11)$$

where and $f \in C^\infty(M)$.

Proposition 6. The mappings

$$\Theta : Diff_3(M, R) \times C^\infty(M) \longrightarrow Diff_3(M) \quad \Theta : (A, f) \longrightarrow A_f,$$

and $\Theta_w : Diff_3(M, R) \longrightarrow Diff_3^w(M) \quad \Theta_w : A \longrightarrow A_w$, are natural in the following sense:

$$\varphi_*(A, f) = (\varphi_*^0(A), \varphi_*(f)), \quad \varphi_*(A_f) = (\varphi_*^0(A))_{\varphi_*(f)},$$

and

$$\varphi_*(A_w) = (\varphi_*^0(A))_w,$$

for all diffeomorphisms $\varphi \in G(M)$.

Proof. The proof is almost verbatim repetition of the proof of Proposition 1 in [5].

Related pairs and their invariants. The above proposition has the following consequences:

- By differential $G(M)$ -invariants of weakly nonlinear operators we will mean differential $G(M)$ -invariants of operators in $Diff_3(M, R)$, that are $G(M)$ -invariant functions on jet spaces $J^k(\zeta)$.

- In what follows, we will require that operators $A \in Diff_3(M, R)$ under consideration are rational in y (as sections of the bundle ζ). Also, by differential invariants of rational weakly nonlinear operators we mean $G(M)$ -invariant functions on jet spaces $J^k(\zeta)$ that are rational along fibres of the projections $\pi \circ \varsigma_k : J^k(\zeta) \longrightarrow M$.

- The group $G(M)$ acts transitively on the manifold M and therefore rational differential invariants of order $\leq k$ for rational weakly nonlinear operators form a field F_w^k . We have the embedding $\varsigma_{k,l}^* : F_l^w \longrightarrow F_k^w$, if $k \geq l$, where $\varsigma_{k,l}^* : J^k(\zeta) \longrightarrow J^l(\zeta)$ are the natural projections, and $F^w = \bigcup_{k \geq 0} F_k^w$ is the field

of all rational differential invariants of rational weakly nonlinear operators.

We consider the following vector bundles over manifold $J^0(\pi) = M \times R$:

(1) jet bundles of functions on manifold:

(2) $\pi_{l,0} : J^l(\pi) \longrightarrow J^0(\pi)$, (2) jet bundles of operators:

$$\varsigma_k : J^k(\varsigma) \longrightarrow M \times R,$$

(3) the Whitney sum of vector bundles ς_k and $\pi_{l,0}$

$$r_{k,l} : RP^{k,l} = \varsigma_k \oplus_{M \times R} \pi_{l,0} \longrightarrow M \times R$$

We call the last bundle as the bundle of related pairs. Elements of the total space of this bundle are related pairs $([A]_{(x,y)}^k, [f]_x^l)$ consisting of k -jet $[A]_{(x,y)}^k$ of operator $A \in \text{Diff}_3(M, R)$ at the point $(x, y) \in M \times R$ and l -jet $[f]_x^l$ of function $f \in C^\infty(M)$ at the point $x \in M$ under condition that $f(x) = y$. The group $G(M)$ acts by prolongations in the bundles $r_{k,l}$ and by invariants of this action (or invariants of related pairs) we mean functions on the total space. that are $G(M)$ -invariant and rational along fibers of the projection $\pi \circ r_{k,l} : RP^{k,l} \longrightarrow M$.

Because of transitivity of $G(M)$ -action on M , all such functions are completely determined by their values on fibre $(\pi \circ r_{k,l})^{-1}(a)$ at a base point $a \in M$. Therefore, $G(M)$ -invariants of related pairs form an R -field $F_{k,l}$, that is a subfield of the field $Q_{k,l}$ of all rational functions on the fibre $(\pi \circ r_{k,l})^{-1}(a)$.

The natural projections $CP^{k,l'} \longrightarrow CP^{k,l}$, where $k \leq k'$, $l \leq l'$, give us embeddings of fields $F_{k,l} \subset F_{k',l'}$, $Q_{k,l} \subset Q_{k',l'}$ and we define the fields, F_l , Q_l by the inductive limits:

$$F_k = \bigcup_{k \geq 0} F_{k,l}, \quad Q_k = \bigcup_{k \geq 0} Q_{k,l},$$

Remark that $F_0 = F^w$ is just the field of rational differential invariants of rational weakly nonlinear differential operators. Below we will discuss various methods of finding invariants, but first of all we remark that the vector field ∂_y on $J^0(\pi) \longrightarrow M \times R$ is an invariant of the $G(M)$ -action. Therefore its l -th prolongation $\partial_y^{(l)}$ on $J^l(\pi)$ is also $G(M)$ -invariant. The same is valid for the total derivation $\frac{d}{dy}$ that acts in $J^\infty(\varsigma)$. All together they define $G(M)$ -invariant derivation ∇ in the fields Q_l , as well as in F_l , where

$$\nabla(\alpha\beta) = \frac{d\alpha}{dy}\beta + \alpha\frac{d\beta}{dy},$$

$\alpha \in Q_0$ and β is a function on $J^l(\pi)$.

Construction of invariants. At first we consider y as a parameter and identify operators $A \in \text{Diff}_3(M, R)$ with 1-parametric family A_y of operators in

$Diff_3(M)$. Remark that y is a $G(M)$ -invariant. Therefore, for any invariant $I \in F_k^{(3)}$ of linear differential operators on manifold M , the function: $\hat{I} : J^k(\zeta) \longrightarrow R$, where $\hat{I}[A]_{(x,y)}^k = I[A]_{(x,y)}^k$ is a $G(M)$ -invariant too.

Thus we get a mapping

$$F_*^{(3)} \longrightarrow F_0 \longrightarrow F^w, I \longrightarrow \hat{I}.$$

that immediately gives us invariants of weakly nonlinear operators. Moreover, application of the invariant derivation ∇ essentially increases their amount.

As we have seen, Proposition 6, the mapping

$$\Theta_l : RP^{l,l} \longrightarrow J^l(\chi),$$

$$\Theta_l : ([A]_{(x,y)}^k, [f]_x^k) \longrightarrow [A_f]_x^l,$$

commutes with the $G(M)$ -action. Therefore,

$$\Theta_l^*(I) \in F_l,$$

i.e., it is an invariant of related pairs for any invariant $I \in F_l^{(3)}$.

Descent procedure. To get invariants of weakly nonlinear operators from invariants of related pairs we consider the following descent procedure for invariants $F_l \longrightarrow F^w$

Let $I_0 \in F_l$ be an invariant of related pairs and let $I_l = \nabla(I_0) \in F_l, \dots, I_{l+i} = \nabla(I_i) \in F_l$ be its invariant derivatives. Remark that the transcendence degree of the field Q_l over Q_0 equals $N = \dim \pi_{l,0}$. Therefore, ([8]), there are polynomial relations between rational functions $I_0, \dots, I_N$. Denote by $J : J(I) \subset Q_0[X_1, \dots, X_N]$ the ideal of these relations.

Theorem 7. Let $b_1, \dots, b_r \in Q_0[X_1, \dots, X_N]$ be the reduced Gröbner basis in the ideal $J(I)$ with respect to the standard lexicographic order. Then the coefficients of polynomials b_i are natural invariants of weakly nonlinear operators.

Proof. The action of the diffeomorphism group preserves the ideal $J(I)$ as well as the lexicographic order. The reduced Gröbner basis in an ideal with respect to the lexicographic order is unique ([1]), and therefore, the action preserves elements of the basis and their coefficients.

Example $n = 1, k = 3$. Let $M = R$. Then in coordinate x on M , an operator $A \in Diff_3(M, R)$ has the form

$$A = a_3 \partial^3 + a_2 \partial^2 + a_1 \partial + a_0,$$

where the all coefficients are smooth functions on x and $\partial = \partial_x$. The symbol $a_3 \partial^3$ of A defines an invariant connection on the line R with the Christoffel coefficient Γ :

$$\Gamma = -\frac{a'_3}{3a_3},$$

the total symbol $\sigma_{(3)}$ of A with respect to the Wagner connection ∇ is the following:

$$\sigma_{(3)} = \sigma_3 + \sigma_2 + \sigma_1 + \sigma_0,$$

where

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= a_3 \partial^3, \quad \sigma_2 = (a_2 - a_3') \partial^2, \\ \sigma_1 &= (a_1 - \frac{2(a_3')^2 a_3 + 3a_3' - a_3'' a_3}{9a_3} - (a_2 - a_3') \frac{a_3'}{3a_3}) \partial, \quad \sigma_0 = a_0. \end{aligned} \quad (12)$$

and the natural splitting of the operator A is the following:

$$A = \hat{\sigma}_{(3)} = \hat{\sigma}_3 + \hat{\sigma}_2 + \hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_0$$

where the differential operators $\hat{\sigma}_k$ are the quantizations of the symbols σ_k , see [3]:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_3 &= a_3 \partial^3 + a_3' \partial^2 + \frac{2(a_3')^2 a_3 + 3a_3' - a_3'' a_3}{9a_3} \partial, \quad \hat{\sigma}_2 = (a_2 - a_3') (\partial^2 + \frac{a_3'}{3a_3} \partial), \\ \hat{\sigma}_1 &= (a_1 - \frac{2(a_3')^2 a_3 + 3a_3' - a_3'' a_3}{9a_3} - (a_2 - a_3') \frac{a_3'}{3a_3}) \partial, \\ \hat{\sigma}_0 &= a_0. \end{aligned}$$

Therefore, we get from (12) the following $G(M)$ -invariants of operators A :

$$\begin{aligned} I_0 &= a_0. \\ I_1 &= \langle \sigma_1, da_0 \rangle = (a_1 - \frac{2(a_3')^2 a_3 + 3a_3' - a_3'' a_3}{9a_3} - (a_2 - a_3') \frac{a_3'}{3a_3}) a_0', \\ I_2 &= \langle \sigma_2, da_0^2 \rangle = (a_2 - a_3') (a_0')^2, \\ I_3 &= \langle \sigma_3, da_0^3 \rangle = a_3 (a_0')^3. \end{aligned}$$

Now take an operator $A \in \text{Diff}_3(M, R)$

$$\begin{aligned} A &= a_3(x, y) \partial_x^3 + a_2(x, y) \partial_x^2 + a_3(x, y) \partial_x + a_0(x, y) \\ A_f &= a_3(x, f) \partial_x^3 + a_2(x, f) \partial_x^2 + a_3(x, f) \partial_x + a_0(x, f), \quad f \in C^\infty(M). \end{aligned}$$

Then, the corresponding invariants of relates pairs are the following:

$$\begin{aligned} I_0 &= a_0. \\ I_1 &= (a_1 - \frac{2(a_{3,x} + a_{3,y} f')^2 a_3 + 3(a_{3,x} + a_{3,y} f') - a_3'' a_3}{9a_3} - \\ &\quad - \frac{(a_{3,xx} + 2a_{3,xy} f' + a_{3,yy} (f')^2 + (a_{s,x} + a_{3,y}) f'') a_3}{9a_3} - \end{aligned}$$

$$-(a_2 - (a_{3,x} + a_{3,y}f') \frac{(a_{s,x} + a_{3,y}f')}{3a_3})(a_{0,x} + a_{0,y}f'),$$

$$I_2 = (a_2 - a_{3,x} - a_{3,y}f')(a_{0,x} + a_{0,y}f')^2,$$

$$I_3 = a_3(a_{0,x} + a_{0,y}f')^3.$$

From the expression of I_3 we get

$$f' = ((I_3 / a_3)^{1/3} - a_{0,x}) / a_{0,y}.$$

Substituting it into I_2 , we get a relation of the form $KI_2 + K_1I_3^{1/3} + K_2I_3^{2/3} + K_3I_3 + K_0 = 0$, where

$$K_1 / K, \quad K_2 / K, \quad K_3 / K, \quad K_0 / K$$

are invariants of operators $A \in \text{Diff}_3(M, R)$, i.e. invariants of weakly nonlinear operators.

Equivalence of weakly nonlinear operators. Let z be natural differential invariant of weakly nonlinear operators and $A \in \text{Diff}_3(M, R)$.

Then the values $z(A, y_0) = s_A^*(z)$ is function rational in y with coefficients in $C^\infty(M)$. Values $z(A, y_0)$ of this function for a given value y_0 is a smooth function on M .

We say that the operator A is in general position if for any point $a \in M$ there are: natural invariants z_1, z_2 , a value y_0 of y , and a neighborhood $U \subset M$, $a \in U$, such that the mapping $Z_{A, y_0} : U \longrightarrow D \subset R^2$, $Z_{A, y_0} : x \longrightarrow (z_1(A, y_0)(x), z_2(A, y_0)(x))$ is a local diffeomorphism.

We say, that the mapping Z_{A, y_0} is a natural chart of the operator A and the functions $z_1(A, y_0), z_2(A, y_0)$ are natural coordinates on U . We call the atlas of these charts $\{U_\alpha, \varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow D \subset R^2\}$ natural if coordinates $\varphi_\alpha = (z_1(A, y_0), z_2(A, y_0))$, $(z_1^\alpha(A, y_0), z_2^\alpha(A, y_0)) \neq (z_1^\beta(A, y_0), z_2^\beta(A, y_0))$ when $\alpha \neq \beta$.

We denote by $D_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ and we assume that domains D_α and $D_{\alpha\beta}$ are connected and simply connected. Let $A_\alpha = \varphi_{\alpha*}(A|U_\alpha)$, $A_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha*}(A|U_\alpha \cap U_\beta)$, be the images of the operator A in these coordinates. Then $\varphi_{\alpha\beta*}(A_{\alpha\beta}) = A_{\beta\alpha}$, where $\varphi_{\alpha\beta*} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : D_{\alpha\beta} \longrightarrow D_{\beta\alpha}$ are the transition mapping. Take now two operators $A, A' \in \text{Diff}_3(M, R)$ and consider their natural charts Z_{A, y_0} and Z_{A', y'_0} . The $G(M)$ -equivalence of these operators means that the local diffeomorphism $Z_{A', y'_0}^{-1} \circ Z_{A, y_0}$ does not depend on choice of y_0 and y'_0 . In this case we will say that these charts are coordinated.

Summarizing we get the following result.

Theorem 8. Let operators $A, A' \in \text{Diff}_3(M, R)$ be in general position, then they are $G(M)$ -equivalent if and only if the following conditions hold:

- (1) the mappings $\{\varphi'_\alpha: U'_\alpha \longrightarrow D_\alpha\}$, where $\varphi'_\alpha = (z^\alpha_1(A', y'_0), z^\alpha_2(A', y'_0))$ and $U'_\alpha = (\varphi'_\alpha)^{-1}(D_\alpha)$, constitute a natural atlas for the operator A' ;
- (2) the charts $\varphi_\alpha \in \{\varphi_\alpha: U_\alpha \longrightarrow D_\alpha\}$, and $\varphi'_\alpha \in \{\varphi'_\alpha: U'_\alpha \longrightarrow D_\alpha\}$ are coordinated;
- (3) and (4) $A_\alpha = \varphi_{\alpha*}(A'|U'_\alpha)$, $A_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha*}(A'|U'_\alpha \cap U'_\beta)$.

Proof. Any diffeomorphism $\psi: M \rightarrow M$ such that $\psi_*(A) = A'$ transform natural atlas to the natural one and because of $\psi_*^{-1}(z(A)) = z(\psi_*(A))$, for any natural invariant z , this diffeomorphism has the form of the identity map in the natural coordinates.

Corollary 9. Let operators $A, A' \in \text{Diff}_3(M, R)$ be in general position. Then the weakly nonlinear differential operators A_w and A'_w are $G(M)$ -equivalent if and only if the operators A and A' are $G(M)$ -equivalent.

References

1. Cox D., Little J., O'Shea D. Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Springer, (1997), ISBN 0-387-94680-2.
2. Kruglikov B., Lychagin V., Global Lie-Tresse theorem, Selecta Math. (N.S.) 22 (2016), No. 3, 1357–1411.
3. Lychagin V. V., Yumaguzhin V. A. On equivalence of third order linear differential operators on two-dimensional manifolds, Journal of geometry and physics, Vol. 146, December 2019, 103507.
4. Lychagin V., Yumaguzhin V. On structure of linear differential operators, acting in line bundles, Journal of geometry and physics. Vol. 148, February 2020, 103549.
5. Lychagin V., Yumaguzhin V. Natural differential invariants and equivalence of nonlinear second order differential operators, Journal of geometry and physics, 178 (2022) 104549.
6. Peter J. Olver, Applications of Lie groups to differential equations, Springer-Verlag.
7. Wagner V. V. Two dimensional space with cubic metric, Scientific notes of Saratov State University, Vol. 1(XIV), Ser. FMI, No. 1, 1938. (In Russ.)
8. Zariski O., Samuel P.: Commutative Algebra, Vol. 1, 2, Van Nostrand, 1960.

ОБОБЩЕНИЯ РАВНОМЕРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

В. И. Сенашов

Институт вычислительного моделирования СО РАН
Российская Федерация, 660036, г. Красноярск, Академгородок, 50/44
E-mail: sen1112home@mail.ru

В работе приводятся примеры групповых конструкций разработанных, в том числе красноярскими математиками, позволяющих строить сложные группы из более простых. В частности, рассматриваются обобщения равномерных произведений групп.

Ключевые слова: группа, примеры, инволюция, условия конечности.

GENERALIZATIONS OF UNIFORM PRODUCTS OF GROUPS

V. I. Senashov

Institute of Computational Modelling of Siberian Branch of RAS
50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation
E-mail: sen1112home@mail.ru

The paper gives examples of group constructions developed, including by Krasnoyarsk mathematicians, which make it possible to build complex groups from simpler ones. In particular, generalizations of uniform products of groups are considered.

Keywords: group, examples, involution, finiteness conditions.

The task of group theory is the study of group operations, or, in other words, the study of groups up to isomorphism. Group theory would be closed if it were possible to compile a catalog of all possible groups up to isomorphism. Fortunately for group theory and unfortunately for applications, such a catalog is nearly impossible to compile. But since some groups and even classes of groups have been studied quite well, there is a desire to use them in the future, not only as well-known groups, but also as subgroups of new groups. This can be done by specifying some construction that produces new groups from given groups.

Group theory is armed with various constructions of this kind. Here are some classic variants of such constructions.

The *product* AB of groups A , B is understood as the set of all possible products of elements of these groups, i.e. $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$. A given set

will not always again be a group. A product AB of subgroups A, B of a group G is itself a group if and only if $AB = BA$.

Let $G_1, \dots, G_m$ be groups. It is easy to check that the set $G = G_1 \times \dots \times G_m$ of sequences, $\langle g_1, \dots, g_m \rangle$, $g_\alpha \in G_\alpha$ with componentwise multiplication $\langle g_1, \dots, g_m \rangle \cdot \langle g'_1, \dots, g'_m \rangle = \langle g_1 \cdot g'_1, \dots, g_m \cdot g'_m \rangle$ is a group. It is called the *Cartesian product of groups* G_α , and they themselves G_α are its factors. This concept can be easily extended to the case of an arbitrary set of factors G_α ,

$\alpha \in I$. Namely, we denote by $\left[G = \overline{\bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha} \right]$ the set of functions $f: I \rightarrow \bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha$

with the condition that $f(\alpha) \in G_{\{\alpha\}}$ for any $\alpha \in I$. It is easy to check that the set G with rule multiplication $(fg)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)$ is a group; it is called the *Cartesian product of groups* G_α . The value of the function f at a point α is called the projection or component of the element f in the multiplier G_α . The set $\text{supp}(f) = \{\alpha \mid \alpha \in I, f(\alpha) \neq e\}$ is called the *support of the function* f .

It is clear that the set of functions with finite supports from the Cartesian product of groups G_α is a group with respect to multiplication of functions. This group is called the *direct product of the groups* G_α .

Let us give an internal definition of a direct product, in contrast to the external one introduced above.

Let a group G be generated by its normal subgroups G_i , and each element g of G admits a notation where all indices $i_1, \dots, i_m$ are different, and non-identity factors are uniquely determined by the element g . Then the group G is said to decompose into a *direct product* of subgroups G_i . Obviously, a group G decomposes into a direct product of its subgroups G_i if and only if it is isomorphic to a direct product of abstract groups G_i . Therefore, for a group G decomposable into a direct product of subgroups, the same notation is used as for the direct product of abstract groups. A group G is called a *direct product* of its subgroups $H_1, H_2, \dots, H_n$, if the following three requirements are met: the subgroups $H_1, H_2, \dots, H_n$ are normal subgroups of the group G ; the group G is generated by subgroups $H_1, H_2, \dots, H_n$; the intersection of any subgroup H_i , $i = 1, 2, \dots, n$, with the subgroup generated by all groups H_j , $j \neq i$, is equal to E . An example of decomposable groups is the additive group of complex numbers, decomposing into a direct product of real and purely imaginary numbers. Also, the multiplication group of non-zero real numbers is a direct product of the group of positive real numbers and the second-order cyclic group generated by the number -1 . A non-cyclic Abelian group of order 4 is a direct product of two cyclic groups of order 2.

Note that all the extensions discussed above are splittable in the following sense: an extension G of a group A by a group B is said to be *splittable* if G has subgroups H, K such that $G = HK$, $A \cong H \triangleleft G$, $H \cap K = 1$, $K \cong B$.

They also say that G is a *semidirect product* of the groups A and B , and write $G = A \lambda B$.

For this construction we can consider the internal definition:

A group G decomposes into a semidirect product of its subgroups A and B if the following three requirements are met: the subgroup A is a normal subgroup of the group G ; the group G is generated by subgroups A and B ; the intersection $A \cap B$ is equal to E .

It obviously follows from this definition that the operation λ in the class of groups is noncommutative and that the semidirect product differs from the direct one.

Groups with a complemented normal divisor, i.e., decomposable into a semidirect product of this normal divisor and some subgroup, are very common. The following generalization of this construction naturally arises: A group G is called a *semidirect product* of its subgroups A_i , where i runs through a well-ordered in ascending order set of indices I , if: $G = \{ A_i, i \in I \}$; for all $j \in I$ the subgroup $G_j = \{ A_i, i < j \}$ is invariant in G ; for all $j \in I$ the intersection of the subgroup G_j with the subgroup $G^j = \{ A_i, i \geq j \}$ is equal to E .

This definition is equivalent to the assertion that the group G has an increasing invariant series all of whose terms are complemented in G ; the factors of this series will be isomorphic to the groups $A_i, i \in I$.

Direct products play a very important role in group theory. Another construction of this type, also quite often useful, is the free product of groups. A free product, like a direct product, gives some possibility of constructing a new group from the given groups. It differs from the direct product in that its definition lacks the requirement contained in the definition of the direct product that the elements included in different direct factors are permutable.

A group G is called a free product of its subgroups distinct from E (runs through some set of indices) if the subgroups together generate the entire group G , i.e. if every element g from G is the product of a finite number of elements taken from A_α , $g = a_1 a_2 \dots a_n$, $a_\alpha \in A_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$, and if every element g from G has a unique record of the indicated form, provided that all elements a_α are different from one and that this record cannot contain two elements from the same subgroup side by side, although, generally speaking, such a product can contain several factors included in into one such group.

The subgroups are called free factors of the group G that appear in the free decomposition.

Among the groups decomposable into a free product are free groups, namely, a free (non-cyclic) group is a free product of infinite cyclic groups.

In group theory representations of groups as various kinds of products of their subgroups play an important role. V. P. Shunkov studied the representation of a group as a product of its subgroups, in which cyclic subgroups of two different factors permute in pairs. The task of studying such groups was set by S. N. Chernikov (he proposed to call such products uniform).

In a uniform product, any two cyclic subgroups taken in different factors of a given decomposition commute with each other.

Let G be a group, I be a non-empty set of indices consisting of at least two elements, and A_i , $i \in I$, be some (not necessarily pairwise distinct) subgroups of the group G . We say that the group G is a *uniform product* of subgroups A_i , $i \in I$ if it is generated by them and for any different indices $i \in I$ and $j \in I$ an arbitrary cyclic subgroup of the group A_i permutes with an arbitrary cyclic subgroup of the group A_j .

V. P. Shunkov proved a number of theorems describing the structure of such groups.

The structure of groups decomposable into a uniform product of their Sylow p -groups is described by the following theorem.

V. P. Shunkov proved [1] that a periodic group G decomposes into a uniform product of its Sylow p -subgroups if and only if it is a semidirect product of a Hall Abelian subgroup A , all of whose subgroups are invariant in G , and some S -group B .

Recall that a periodic group is called an *S-group* if it decomposes into a direct product of its Sylow subgroups [2].

The topic was further developed in the works of V. G. Vasiliev [3–5], where quasi-semidirect products of cyclic p -groups were described, and necessary and sufficient conditions for the two-step solvability of strict uniform products of cyclic p -groups were found. G. A. Malanina [6–7] studied semidirect products of cyclic groups. In [8] D. I. Zaitsev introduced the definition of a weakly uniform product (a group G is called a weakly uniform product of subgroups A and B if $G = AB$ and subgroups of finite index from A and B commute with each other) and described groups decomposable into a weakly uniform product of two polycyclic subgroups.

Later V. P. Shunkov introduced a generalization of the concept of a quasi-uniform product of groups, namely, a group G is called a *quasi-uniform product* of its subgroups $\{A_i | i \in M\}$ if: the group G is generated by subgroups $\{A_i | i \in M\}$ and in each subgroup A_i there is such a system of generators $\{a_{i,k} | k \in M_i\}$ that the subgroups $\langle a_{i,k} | k \in M_i \rangle$, $\langle a_{j,k'} | k' \in M_j \rangle$, where $i \neq j$, are permutable.

He also proved [2] that a finite group is supersoluble if and only if it decomposes into a quasi-uniform product of its Sylow p -subgroups.

V. P. Shunkov also showed the connection between supersoluble groups and uniform products [2]: A finite supersoluble group with Abelian Sylow p -subgroups decomposes into a uniform product of cyclic p -subgroups.

Let G be a group, I be a non-empty set of indices consisting of at least two elements, and $A_i, i \in I$ be some subgroups of the group G . We say that a group G is a *strict uniform product* of subgroups $A_i, i \in I$, if it is generated by them and for any different indices $i \in I$ and $j \in I$ an arbitrary cyclic subgroup of the group A_i permutes with an arbitrary cyclic subgroup of the group A_j and for any $I_1 \subseteq I$ $\langle A_i, i \in I_1 \rangle \cap \langle A_j, j \in I \setminus I_1 \rangle = E$.

A group G is a *weakly uniform product* of subgroups A and B if $G = AB$ and any subgroup of finite index from A commutes with any subgroup of finite index from B .

For finite groups, the concepts of weakly uniform and uniform products coincide. For arbitrary groups, this statement is not true, which is confirmed by the following examples.

Example of Pashkovskaya O. V. Let the group $G = AzB$, where A is the Ol'shansky group with all subgroups of order p and $|B| < \infty$. The group G is a weakly uniform but not uniform product of subgroups A and B .

O. V. Pashkovskaya is constructed one more example. Let $G = (C\lambda d)\lambda(b)$, where C is a quasicyclic q -group ($q \neq 2$), $|d| = p$ ($p \neq q$), and b acts on $C\lambda(d)$ so that $c^b = c^2$ for any $c \in C$ and $d^b = d$. Then G is a weakly uniform but not uniform product of subgroups A and B , where $A = C\lambda\langle d \rangle$, $B = \langle b \rangle$.

V. P. Shunkov also owns the following definition (see in [9]).

A group G is called a *generalized uniform product* of its subgroups $Q_i, i \in I$ if: $G = \langle Q_i \mid i \in I \rangle$, where Q_i , are q_i -subgroups, and the following conditions are met:

- 1) $Q_i Q_j = Q_j Q_i, i, j \in I$;
- 2) if Q_i has an elementary Abelian subgroup R_i of order $\geq q_i^2$, then R_i commutes with any noncyclic elementary Abelian subgroup from $Q_j, i \neq j$;
- 3) the group generated by all Q_j that do not contain elementary abelian subgroups of order $\geq q_i^2$ is a uniform product of subgroups Q_j .

The work [10] gives an example of a group decomposable into a generalized uniform product of its subgroups, which cannot be represented as a semidirect product of two nilpotent Hall subgroups. This example shows that the analogue of Shunkov's theorem [11], which gives a constructive description of uniform products, does not hold for generalized uniform products.

Thus, the class of groups decomposable into a uniform product and the class of groups decomposable into a generalized uniform product are separated. O. V. Pashkovskaya constructed [11] an example of a group decomposable into a uniform product of its subgroups, in which elementary Abelian subgroups from one factor commute with elementary Abelian subgroups from another factor, but the Abelian subgroups of these factors do not commute with each other.

Moreover, this example shows that the class of groups decomposable into a generalized uniform product is not closed under taking of factor groups. O. V. Pashkovskaya gave a description of groups decomposable into a generalized uniform product of Sylow subgroups [11].

An automorphism of a p -group P is said to be *generalized uniform* if it leaves in place any non-cyclic order subgroup of P [9].

In the following theorem, we consider a p -group having a generalized uniform automorphism of prime order q ($q < p$) and study the action of this automorphism on the subgroup generated by the set of elements of order p .

Let a group $G = P\lambda\langle b \rangle$, where P is a p -group, b is an element of order q inducing a generalized uniform automorphism of the group P ($q < p$, p, q are odd primes), P has a noncyclic subgroup A of order p^2 , R is the subgroup generated by the set of elements of order p from P and $L = b^G \cap P$.

Then $R \subseteq C_P(b)$ if and only if $(R \cap K) \subseteq C_P(b)$, where K is the locally nilpotent radical of the group L [9].

The structure of finite groups decomposable into a strict generalized uniform product of Sylow subgroups, which are generated by elements of prime orders, is revealed by the following theorem.

Let a finite group G without involutions have a Sylow tower and decomposes into a strict generalized uniform product of its Sylow subgroups. Further, for any $p \in \pi(G)$ a Sylow p -subgroup is generated by elements of order p , among the Sylow subgroups of the group G there are no non-commutative p -subgroups of order p^3 of period p and elementary Abelian p -subgroups of order p^2 . Then the group G is a semidirect product $G = A\lambda B$, where A and B are nilpotent Hall subgroups, and the subgroup A is Abelian and all its subgroups are invariant in G [10].

The concept of a special element is introduced into consideration: if for some elementary Abelian subgroup A of order q^2 in the group G there is such an element c that the group $A\lambda\langle c \rangle$ is a Frobenius group with the property: the element c induces an automorphism on the kernel A , with respect to which any cyclic subgroup of order q from A is non-invariant, then such an element c is called *singular*.

Let a finite group V without involutions, which has a Sylow tower, decompose into a strict generalized uniform product of its Sylow subgroups, and for any $p \in \pi(V)$ the Sylow p -subgroup is an elementary Abelian subgroup of order $\leq p^2$ or a non-Abelian subgroup of period p of order $\leq p^2$. Then the group V can be represented as: $V = (L \times F)\lambda(M\lambda N)$, where L is a Hall Abelian subgroup generated by all Abelian Sylow p -subgroups of order V for which there is a special element in the group V ; F is a Hall nilpotent subgroup generated by all non-Abelian Sylow p -subgroups of the group V of order p^3 , for which the group V contains an element that induces a nonidentical generalized

uniform automorphism; M is a Hall subgroup generated by elementary abelian p -subgroups of a group V of order $\leq p^2$; N is a Hall subgroup generated by non-Abelian Sylow p -subgroups of the group V of period p of order p^3 [11].

Conclusion. The paper presents constructions that allow you to collect some groups from other groups, including constructions built in the Krasnoyarsk school on group theory. Particular attention is paid to the construction of generalized uniform products and their generalizations.

References

1. Shunkov V. P. [On groups decomposable into a strict uniform product of their p -groups]. *Dokl. of Academy of Sciences of the USSR*. 1964, vol. 154, no. 3, p. 542–545. (In Russ.)
2. Shunkov V. P. [On groups decomposable into a uniform product of p -subgroups]. *Dis. ... cand. Phys.-Math. Sciences*. Sverdlovsk : Ural state. university. A. M. Gorky, 1965. (In Russ.)
3. Vasil'ev V. G. [Strict uniform products of cyclic p -groups]. *Algebra i Logika*. 1977, vol. 16, no. 5, p. 499–506. (In Russ.)
4. Vasil'ev V. G. [On the degree of solvability of uniform products of cyclic groups]. *Algebra i Logika*. 1978, vol. 17, no. 3, p. 260–266. (In Russ.)
5. Vasil'ev V. G. [On groups factorizable by Abelian subgroups]. *Dis. ... cand. Phys.-Math. Sciences*. Krasnoyarsk : Krasnoyarsk state. university, 1979. (In Russ.)
6. Malanina G. A. [Semidirect products of cyclic groups]. *Dokl. of Academy of Sciences of the USSR*. 1960, vol. 132, p. 762–765. (In Russ.)
7. Malanina G. A. [Semidirect products of cyclic p -groups]. *Uchen. Zap. of Perm. University*. Perm, 1960, vol. 17, p. 33–67.
8. Zaitsev D. I. [Weakly uniform products of polycyclic groups]. *In: Subgroup characterization of groups*. Kyiv : IM AN Ukrainian SSR. 1982, p. 13–26. (In Russ.)
9. Pashkovskaya O. V. [On groups decomposable into a generalized uniform product of their subgroups]. *Preprint*. Krasnoyarsk. 1999, No. 9. p. 1–25. (In Russ.)
10. Pashkovskaya O. V. [On the properties of a generalized uniform product]. *Proceedings of the Conference of Young Scientists 98 of ICM SB RAS*. ICM SB RAS. Krasnoyarsk, 1998, p. 119–121. (In Russ.)
11. Pashkovskaya O. V. [An example of a generalized uniform product]. *Tez. of reports of International conf. "All-Siberian Readings in Mathematics and Mechanics"* (June 17–20, 1997). Tomsk State un-t. Tomsk. 1997, p. 31–32. (In Russ.)

Библиографические ссылки

1. Шунков В. П. О группах, разложимых в строгое равномерное произведение своих p -групп // Докл. АН СССР. 1964. № 3 (154). С. 542–545.

2. Шунков В. П. О группах, разложимых в равномерное произведение p -подгрупп : дис. ... канд. физ.-матем. наук. Свердловск : Уральский гос. университет им. А. М. Горького, 1965.
3. Васильев В. Г. Строгие равномерные произведения циклических p -групп // Алгебра и логика. 1977. № 5 (16). С. 499–506.
4. Васильев В. Г. О ступени разрешимости равномерных произведений циклических групп // Алгебра и логика. 1978. № 3 (17). С. 260–266.
5. Васильев В. Г. О группах, факторизуемых абелевыми подгруппами : дис. ... канд. физ.-матем. наук. Красноярск : Краснояр. гос. ун-т, 1979.
6. Маланьина Г. А. Полупрямые произведения циклических групп // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132. С. 762–765.
7. Маланьина Г. А. Полупрямые произведения циклических p -групп // Учен. зап. Перм. ун-та. Пермь, 1960. Т. 17. С. 33–67.
8. Зайцев Д. И. Слаборавномерные произведения полициклических групп // Подгрупповая характеристика групп. Киев : ИМ АН УССР, 1982. С. 13–26.
9. Пашковская О. В. О группах, разложимых в обобщенно равномерное произведение своих подгрупп / Препринт ИВМ СО РАН. Красноярск. 1999. № 9. С. 1–25.
10. Пашковская О. В. О свойствах обобщенно равномерного произведения // Материалы конференции молодых ученых 98 ИВМ СО РАН. ИВМ СО РАН. Красноярск, 1998. С. 119–121.
11. Пашковская О. В. Пример обобщенно равномерного произведения // Тез. докл. Междунар. конф. Всесибирские чтения по математике и механике (17–20 июня, 1997) ; Томский гос. ун-т. Томск, 1997. С. 31–32.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

С. И. Сенашов*, И. Л. Савостьянова

Сибирский государственный университет науки и технологий
имени академика М. Ф. Решетнева

Российская Федерация, 660037, г. Красноярск,
просп. им. газеты «Красноярский рабочий», 31

*E-mail: sen@sibsau.ru

Известно, что если система дифференциальных уравнений допускает группу непрерывных преобразований, то в ряде случаев, система может быть представлена в виде совокупности двух систем дифференциальных уравнений. Как правило, эти системы имеют меньший порядок, чем исходная система. Выше сказанное относится к линейным уравнениям теории упругости. Первая система – автоморфная, характеризуется тем, что все ее решения получаются из одного решения с помощью преобразований этой группы. Вторая система – разрешающая, ее решения под действием группы переходят сами в себя. Разрешающая система несет основную информацию об исходной системе. В данной работе изучаются автоморфная и разрешающая системы двумерных и трехмерных стационарных уравнения упругости, которые являются системами дифференциальных уравнений первого порядка. Построены бесконечные серии законов сохранения для разрешающих систем уравнений и автоморфных систем. Поскольку рассматриваемые системы уравнений упругости линейны, то таких законов имеется бесконечно много. В данной работе построены бесконечные серии законов сохранения линейных по первым производным. Именно эти законы позволили решить первую краевую задачи для уравнений теории упругости в двумерном и трехмерном случае. Решения построены в виде квадратур, которые вычисляются по границе исследуемых областей.

Ключевые слова: уравнения двумерной упругости, уравнения трехмерной упругости, законы сохранения, решение краевых задач.

CONSERVATION LAWS AND SOLUTIONS OF THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATIONS OF 2-DIMENSIONAL AND 3-DIMENSIONAL ELASTICITY THEORY

S. I. Senashov*, I. L. Savostyanova

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

*E-mail: sen@sibsau.ru

Введение. Система уравнений линейной изотропной упругости в трехмерном случае изучалась многими авторами. Особый интерес представляет построение точных решений для трехмерных уравнений. Такие решения строили П. Ф. Папкович, Х. Нейбер, Е. Трефтц, Б. Г. Галеркин [1], Б. Д. Аннин [2], Н. И. Остросаблин [3–5], Ю. А. Чиркунов [6; 7] и т. д. Линейные уравнения теории упругости с групповой точки зрения изучаются уже достаточно давно [2]. Сначала была найдена группа точечных преобразований и перечислены все инвариантные решения, см. [2] и цитируемую там литературу. Далее было выполнено групповое расслоение уравнений Ламе [6]. Хотя техника выполнения группового расслоения известна уже давно [12], не для многих систем уравнений оно выполнено. В этом смысле уравнения теории упругости составляют приятное исключение. Групповое расслоение позволило лучше понять, почему методы комплексного переменного так широко используются в двумерной теории упругости. Это происходит потому, что разрешающая система для двумерных уравнений теории упругости есть система уравнений Коши–Римана. Для трехмерных уравнений разрешающая система – система Моисила–Тодореску. Не смотря на такое внимание к уравнениям упругости, методов решения краевых задач для тел конечных размеров в трехмерном случае практически нет. В настоящей работе строятся точные решения краевых задач теории упругости в трехмерном случае. Для этого найдены законы сохранения специального вида, которые позволяют находить решения трехмерных уравнений теории упругости в виде нескольких квадратур, которые вычисляются по границе ограниченной упругой области. Статья продолжает серию работ посвященных решению краевых задач с помощью законов сохранения, последние результаты и необходимые определения можно найти в [8–11]. Результаты, полученные в этой статье, показывают, что законы сохранения можно эффективно использовать и для решения краевых задач для трехмерных уравнений.

Трехмерные статические уравнения линейной теории упругости

1. *Постановка задачи.* Запишем уравнения теории упругости в статическом трехмерном случае в декартовой системе координат x, y, z

$$\alpha_0 \text{grad div } \bar{w} - \text{rot rot } \bar{w} = 0, \quad (1)$$

где $\bar{w} = (w^1, w^2, w^3)$ – вектор упругого перемещения, $\alpha_0 = (\lambda + 2\mu) / \mu$, λ, μ – упругие постоянные Ламе.

Для этих уравнений поставим первую краевую задачу на поверхности S ограничивающую объем V :

$$\bar{w}|_S = \bar{w}_0(x, y, z). \quad (2)$$

С помощью законов сохранения решить задачу (1)–(2).

2. Предварительные сведения. Известно [2], что система уравнений (1) допускает, в смысле Ли–Овсянникова, оператор вида

$$X = h_1(x, y, z) \partial_{w^1} + h_2(x, y, z) \partial_{w^2} + h_3(x, y, z) \partial_{w^3}, \quad (3)$$

где (h_1, h_2, h_3) – произвольное решение системы уравнений (1).

Продолжим оператор (3) на первые производные $p_1^1 = \frac{\partial w^1}{\partial x}$, $p_2^1 = \frac{\partial w^1}{\partial y}$,

$p_3^1 = \frac{\partial w^1}{\partial z}$, ..., $p_3^3 = \frac{\partial w^3}{\partial z}$ по формулам

$$X_1 = X + \zeta_j^i \frac{\partial}{\partial p_j^i},$$

где $\zeta_j^i = -p_\beta^i D_j(h^\beta)$, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + p_j^k \frac{\partial}{\partial w^k}$, для краткости полагаем $x = x_1$,

$y = x_2$, $z = x_3$. По повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Пусть h_1, h_2, h_3 – произвольные гармонические функции, тогда инварианты первого порядка (решение уравнения $X_1 I = 0$), имеют вид

$$I_1 = x, I_2 = y, I_3 = z, I_4 = \text{div } \bar{w}, I_5 = \text{rot } \bar{w}.$$

Назначая инварианты I_4, I_5 функциями от I_1, I_2, I_3 получим автоморфную систему [6]:

$$\text{div } \bar{w} = \theta(x, y, z), \quad \text{rot } \bar{w} = \bar{\omega}(x, y, z) \quad (4)$$

и разрешающую систему [6]

$$\alpha_0 \text{grad } \theta - \text{rot } \bar{\omega} = 0, \quad \text{div } \bar{\omega} = 0. \quad (5)$$

Известно, что система уравнений (1) равносильна системе уравнений первого порядка (4), (5). Описанная выше процедура носит название группового расслоения [12].

Если в (5) положить $\alpha_0 \theta = p$, то получим известную систему уравнений Моисила–Теодореску (СМТ), которая подробно исследована в работе [8]. Там найдены законы сохранения для СМТ и с их помощью решена краевая задача. Там же указаны некоторые новые точные решения СМТ. Приведем некоторые из них, которые позволяют решить задачу (1), (2).

Решениями СМТ являются следующие функции

$$\begin{aligned} g_1^0 &= (0, (x - x_0) / r_0^3, (y - y_0) / r_0^3, (z - z_0) / r_0^3), \\ g_2^0 &= ((x - x_0) / r_0^3, 0, -(z - z_0) / r_0^3, (y - y_0) / r_0^3), \\ g_3^0 &= ((y - y_0) / r_0^3, (z - z_0) / r_0^3, 0, -(x - x_0) / r_0^3), \\ g_4^0 &= ((z - z_0) / r_0^3, -(y - y_0) / r_0^3, (x - x_0) / r_0^3, 0), \end{aligned} \quad (6)$$

где $r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$, $(x_0, y_0, z_0) \in V$.

3. Законы сохранения уравнений (4). Известно, что решения системы уравнений (1) связаны с решениями системы Моисила–Теодореску [6] уравнениями (4)

$$\begin{aligned} F_1 &= -\theta + w_x^1 + w_y^2 + w_z^3 = 0, \quad F_2 = -\omega^1 + w_z^2 - w_y^3 = 0, \\ F_3 &= -\omega^2 + w_x^3 - w_z^1 = 0, \quad F_4 = -\omega^3 + w_y^1 - w_x^2 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь функции $\theta, \omega^1, \omega^2, \omega^3$ предполагаются известными, способ их вычисления указан в работе [8].

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (7) назовем выражение вида

$$\partial_x A + \partial_y B + \partial_z C = \beta^i F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (8)$$

где A, B, C, ω_i – функции от x, y, z, w^1, w^2, w^3 , предполагается, что функции β^i не равны одновременно тождественно нулю. Выражение (A, B, C) называется сохраняющимся током. При выполнении этих условий, закон сохранения (8) будет нетривиальным.

Замечание. Более общее определение закона сохранения можно найти в [8–11] и цитируемой там литературе. В данной работе законы сохранения будут пониматься согласно этому определению.

Ищем закон сохранения в виде (8)

$$\partial_x A + \partial_y B + \partial_z C = \beta^i F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (9)$$

где A, B, C, β^i – функции от x, y, z, w^1, w^2, w^3

Ищем решение уравнений (9) в виде

$$\begin{aligned} A &= a^1 w^1 + a^2 w^2 + a^3 w^3 + a^4, \quad B = b^1 w^1 + b^2 w^2 + b^3 w^3, \\ C &= c^1 w^1 + c^2 w^2 + c^3 w^3, \end{aligned}$$

где $a^i, b^i, c^i, \beta^i, i = 1, 2, 3, 4$ функции только от x, y, z .

Из (8) получаем

$$\begin{aligned} a_x^1 + b_y^1 + c_z^1 &= 0, \quad a_x^2 + b_y^2 + c_z^2 = 0, \quad a_x^3 + b_y^3 + c_z^3 = 0, \quad a^1 = \beta^1, \quad a^2 = -\beta^4, \\ a^3 &= \beta^3, \quad b^1 = \beta^4, \quad b^2 = \beta^1, \quad b^3 = -\beta^2, \quad c^1 = -\beta^4, \quad c^2 = \beta^2, \quad c^3 = \beta^1, \end{aligned}$$

$$a_x^4 + b_y^4 + c_z^4 = -\beta^1 \theta - \beta^2 \omega_1 - \beta^3 \omega_2 - \beta^4 \omega_3.$$

Отсюда следует

$$\beta_x^1 + \beta_y^4 - \beta_z^3 = 0, \quad -\beta_x^4 + \beta_y^1 + \beta_z^2 = 0, \quad \beta_x^3 - \beta_y^2 + \beta_z^1 = 0. \quad (10)$$

Заметим, что уравнения (10) с точностью до обозначений совпадают с первыми тремя уравнениями СМТ, поэтому функции $g_i, i=1, 2, 3, 4$ являются решениями системы уравнений (10).

Уравнения (9), пользуясь формулой Гаусса–Остроградского, можно записать в виде

$$\iiint_V (A_x + B_y + C_z) dx dy dz = \iiint_S A dy dz + B dz dy + C dx dy = 0. \quad (11)$$

Пусть $\varepsilon; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \varepsilon^2$ сфера, окружающая точку (x_0, y_0, z_0) . Пусть сохраняющийся ток имеет особенность в этой точке, тогда из (11) получаем (см. рисунок)

$$\begin{aligned} & \iiint_S A dy dz + B dz dx + C dx dy + \iint_{P^-} A dy dz + B dz dx + C dx dy + \\ & + \iint_{P^+} A dy dz + B dz dx + C dx dy + \iiint_\varepsilon A dy dz + B dz dx + C dx dy = 0. \end{aligned}$$

Поскольку интегралы по P^- и P^+ вычисляются по разным сторонам плоскости P , то их сумма равна нулю. В результате получаем

$$\iiint_S A dy dz + B dz dx + C dx dy = -\iiint_\varepsilon A dy dz + B dz dx + C dx dy. \quad (12)$$

Вычислим правую часть формулы (12) для разных решений уравнений (10). Рассмотрим решение

$$\beta^1 = \frac{(x - x_0)}{r^3}, \quad \beta^2 = 0, \quad \beta^3 = -\frac{(z - z_0)}{r^3}, \quad \beta^4 = \frac{(y - y_0)}{r^3}. \quad (13)$$

Подставляем (13) в правую часть формулы (11) имеем

$$\begin{aligned} & \iiint_\varepsilon (\beta^1 w^1 + \beta^4 w^2 - \beta^3 w^3) dy dz + (-\beta^4 w^1 + \beta^1 w^2 + \beta^3 w^3) dz dx + \\ & + (\beta^3 w^1 - \beta^2 w^2 + \beta^1 w^3) dx dy. \end{aligned} \quad (14)$$

В (14) переходим к следующей системе координат

$$\begin{aligned} & x - x_0 = \varepsilon \cos \theta \cos \varphi, \quad y - y_0 = \varepsilon \cos \theta \sin \varphi, \quad z - z_0 = \varepsilon \sin \theta, \\ & \iiint_\varepsilon (\beta^1 w^1 + \beta^4 w^2 - \beta^3 w^3) dy dz + (-\beta^4 w^1 + \beta^1 w^2 + \beta^3 w^3) dz dx + \\ & + (\beta^3 w^1 - \beta^2 w^2 + \beta^1 w^3) dx dy = \\ & = \iiint_\varepsilon [(\cos \theta \cos \varphi w^1 + \cos \theta \sin \varphi w^2 - \sin \theta w^3) \cos^2 \theta \cos \varphi + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(-\cos \theta \sin \varphi w^1 + \cos \theta \cos \varphi w^2) \cos^2 \theta \sin \varphi + \\
& +(-\sin \theta w^1 + \cos \theta \sin \varphi w^3) \cos \theta \sin \theta] d\theta d\varphi = \\
& = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos \theta w^1 d\theta = -\frac{4\pi}{3} w^1(x_0, y_0, z_0).
\end{aligned}$$

Последнее выражение получено с использованием теоремы о среднем и при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В результате получаем

$$\iint_S A dy dz + B dz dx + C dx dy = \frac{4\pi}{3} w^1(x_0, y_0, z_0). \quad (15)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
A &= \frac{(x-x_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^1 + \frac{(y-y_0)}{r^3} w_0^2 + \frac{(z-z_0)}{r^3} w_0^3, \\
B &= \frac{(y-y_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^1 + \frac{(x-x_0)}{r^3} w_0^2 - \frac{(z-z_0)}{r^3} w_0^3, \quad C = -\frac{(z-z_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^1 + \frac{(x-x_0)}{r^3} w_0^3.
\end{aligned}$$

Далее полагаем

$$\beta^1 = \frac{(y-y_0)}{r^3}, \quad \beta^2 = \frac{(z-z_0)}{r^3}, \quad \beta^3 = 0, \quad \beta^4 = -\frac{(x-x_0)}{r^3}. \quad (16)$$

Подставляем (16) в (12), получаем аналогично (12)–(15)

$$\iint_S A dy dz + B dz dx + C dx dy = \frac{4\pi}{3} w^2(x_0, y_0, z_0). \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned}
A &= \frac{(y-y_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^1 - \frac{(x-x_0)}{r^3} w_0^2, \quad B = \frac{(x-x_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^1 + \frac{(z-z_0)}{r^3} w_0^2, \\
C &= \frac{(y-y_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^2 - \frac{(y-y_0)}{r^3} w_0^3.
\end{aligned}$$

Далее полагаем

$$\beta^1 = \frac{(z-z_0)}{r^3}, \quad \beta^2 = -\frac{(y-y_0)}{r^3}, \quad \beta^3 = \frac{(x-x_0)}{r^3}, \quad \beta^4 = 0. \quad (18)$$

Подставляем (18) в (12), получаем аналогично (12)–(15)

$$\iint_S A dy dz + B dz dx + C dx dy = \frac{4\pi}{3} w^3(x_0, y_0, z_0). \quad (19)$$

где

$$A = \frac{(z-z_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^1 - \frac{(x-x_0)}{r^3} w_0^3, \quad B = \frac{(x-x_0)}{r^3} w_0^2 - \frac{(z-z_0)}{r^3} w_0^3,$$

$$C = \frac{(x - x_0)^2}{\alpha_0 r^3} w_0^1 + \frac{(y - y_0)}{r^3} w_0^2 + \frac{(z - z_0)}{r^3} w_0^3.$$

Замечание. В формулах (15), (17) и (19) опущена функция a^4 поскольку она является гармонической функцией без особенностей в области V и интеграл от нее по поверхности S равен нулю.

Двумерные статические уравнения линейной теории упругости. В двумерном случае, рассмотренная выше задача имеет некоторые особенности, поэтому решим ее, обращая внимание на эти особенности

Систему уравнений (1) перепишем следующим образом

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)u_{xx} + \lambda v_{xy} + \mu(u_{yy} + v_{xy}) &= 0, \\ \mu(u_{xy} + v_{xy}) + (\lambda + 2\mu)v_{yy} + \lambda u_{xy} &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь для удобства обозначили $w^1 = u$, $w^2 = v$ – компоненты вектора деформаций, индексы внизу, как и ранее, означают производные по соответствующим переменным.

Известно, что система уравнений (2) эллиптического тип. Это определяет вид законов сохранения и решение краевых задач. Как и уравнения (1) система (20) допускает бесконечную группу точечных преобразований, порождаемую операторами

$$X = h^1 \partial_u + h^2 \partial_v, \quad (21)$$

где h^1, h^2 – произвольное решение уравнений Коши–Римана

$$h_x^1 + h_y^2 = 0, \quad h_y^1 - h_x^2 = 0. \quad (22)$$

Сделаем групповое расслоение системы уравнений (20), так же, как это описано выше, на подалгебре, порождаемой (21). Для этого продолжим операторы (22) на первые производные. Имеем

$$X = X + h_x^1 \partial_{u_x} + h_y^2 \partial_{v_y} + h_y^1 \partial_{u_y} + h_x^2 \partial_{v_x}, \quad (23)$$

Дифференциальные инварианты для (23), с учетом (21), имеют вид

$$I_1 = x, I_2 = y, I_3 = u_x + v_y, I_4 = u_y - v_x. \quad (24)$$

Тогда автоморфная система уравнений имеет вид

$$u_x + v_y = \theta(x, y), \quad u_y - v_x = \omega(x, y). \quad (25)$$

Напомним некоторые свойства автоморфных систем. Любое решение автоморфной системы может быть получено из одного решения этой системы с помощью преобразований, порождаемых оператором (21).

Подставляя (25) в (20) получаем разрешающую систему

$$F_1 = (\lambda + 2\mu)\theta_x - \mu\omega_y = 0, \quad F_2 = (\lambda + 2\mu)\theta_y + \mu\omega_x = 0, \quad (26)$$

Повторяя почти дословно рассуждения выше можно утверждать, что система (26) равносильна системе уравнений (20).

Поэтому построив решение системы (26) мы получим решение системы (20).

Пусть для системы (26) поставлена следующая краевая задача:

$$\theta|_L = \theta_0(x, y), \quad \omega|_L = \omega_0(x, y), \quad (27)$$

где L – некоторая гладкая замкнутая кривая, $\theta_0(x, y)$, $\omega_0(x, y)$ – известные гладкие функции.

Для решения этой задачи построим законы сохранения для системы уравнений (26).

Законы сохранения. В силу линейности системы (26) она будет иметь бесконечное число законов сохранения. В работе будут найдены только те законы сохранения, которые позволят решить краевую задачу (27).

Законом сохранения для системы уравнений (26) назовем выражение вида

$$A_x(x, y, \theta, \omega) + B_y(x, y, \theta, \omega) = \alpha F_1 + \beta F_2 = 0, \quad (28)$$

где α, β – некоторые функции, которые не равны тождественно нулю одновременно. A, B – компоненты сохраняющегося тока.

Предположим, что компоненты сохраняющегося тока имеют вид

$$A = a^1\theta + a^2\omega, \quad B = b^1\theta + b^2\omega, \quad (29)$$

где a^1, a^2, b^1, b^2 – некоторые функции от x, y .

Подставляя (29) в (28), после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} a^1 &= \alpha(\lambda + 2\mu), \quad a^2 = \beta\mu, \quad b^1 = \beta(\lambda + 2\mu), \quad a^2 = -\alpha\mu, \\ a_x^1 + b_y^1 &= 0, \quad a_x^2 + b_y^2 = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Отсюда имеем

$$\alpha_x + \beta_y = 0, \quad \alpha_y - \beta_x = 0. \quad (31)$$

Из (28) следует

$$\iint_S (A_x + B_y) dx dy = \oint_L -A dy + B dx. \quad (32)$$

Решение первой краевой задач. Пусть $(x_0, y_0) \in S$, такая точка, в которой компоненты сохраняющегося тока имеют особенности, тогда из (32) следует

$$\oint_L -A dy + B dx = -\oint_\varepsilon -A dy + B dx. \quad (33)$$

где $\varepsilon: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$ – окружность радиуса ε вокруг точки $(x_0, y_0) \in S$. Вычислим интеграл в правой части (33) для разных решений уравнений Коши–Римана. В качестве решений выберем такие, которые имеют особенность в точке $(x_0, y_0) \in S$.

Пусть

$$\alpha = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (34)$$

тогда из правой части (33) имеем

$$\oint_{\varepsilon} -A dy + B dx = \oint_{\varepsilon} -(\alpha(\lambda + 2\mu)\theta + \beta\mu\omega) dy + (\alpha\mu\omega + \beta(\lambda + 2\mu)\theta) dx. \quad (35)$$

Подставим (34) в (35) и сделаем замену переменных по формулам $x - x_0 = \varepsilon \cos \varphi$, $y - y_0 = \varepsilon \sin \varphi$, получаем

$$\begin{aligned} \oint_{\varepsilon} -A dy + B dx &= \int_0^{2\pi} [-((\lambda + 2\mu)\theta + \mu\omega) + 2 \sin \varphi \cos \varphi \mu\omega] d\varphi = \\ &= -2\pi[(\lambda + 2\mu)\theta(x_0, y_0) - \mu\omega(x_0, y_0)]. \end{aligned} \quad (36)$$

В формуле (36) устремили $\varepsilon \rightarrow 0$ и использовали теорему о среднем.

Теперь сделаем аналогичные вычисления, положив

$$\alpha = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

В результате получим

$$\oint_{\varepsilon} -A dy + B dx = -2\pi\mu\omega(x_0, y_0). \quad (37)$$

Формулы (36) и (37) позволяют, с учетом граничных условий (27) и равенства (15) определить значения функций θ и ω в произвольной точке $(x_0, y_0) \in S$. Они имеют следующий вид

$$\begin{aligned} 2\pi[(\lambda + 2\mu)\theta(x_0, y_0) - \mu\omega(x_0, y_0)] &= \\ &= \oint_L -\frac{(\lambda + 2\mu)(x - x_0)\theta_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dy + \frac{\mu(y - y_0)\omega_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dx, \\ 2\pi\mu\omega(x_0, y_0) &= \oint_L \frac{(\lambda + 2\mu)(y - y_0)\theta_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dy + \frac{\mu(x - x_0)\omega_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dx. \end{aligned}$$

Теперь после восстановления решений разрешающей системы, найдем решения автоморфной системы, т. е. решения исходной системы уравнений (20). Имеем

$$F_3 = u_x + v_y - \theta(x, y) = 0, \quad F_4 = u_y - v_x - \omega(x, y) = 0. \quad (38)$$

Здесь в правой части стоят известные функции, которые найдены в предыдущем пункте. Найдем законы сохранения уравнений (38) в следующем виде

$$A = a^3 u + a^4 v + c^1, \quad B = b^3 u + b^4 v + c^2, \quad (39)$$

где $a^3, a^4, b^3, b^4, c^1, c^2$ – некоторые функции от x, y .

Имеем

$$A_x(x, y, u, v) + B_y(x, y, u, v) = \alpha F_3 + \beta F_4 = 0, \quad (40)$$

Расщепляя систему уравнений (40), получаем

$$\begin{aligned} a^3 &= \alpha, \quad a^4 = -\beta, \quad b^3 = \beta, \quad b^4 = \alpha, \\ a_x^3 + b_y^3 &= 0, \quad a_x^4 + b_y^4 = 0, \quad c_x^1 + c_y^2 = -\alpha\theta - \beta\omega. \end{aligned} \quad (41)$$

Отсюда получаем

$$\alpha_x + \beta_y = 0, \quad \alpha_y - \beta_x = 0. \quad (42)$$

Пусть для системы (20) поставлена следующая краевая задача:

$$u|_L = u_0(x, y), \quad v|_L = v_0(x, y), \quad (43)$$

Рассмотрим закон сохранения в виде

$$\oint_L -A dy + B dx = -\oint_\varepsilon -A dy + B dx. \quad (44)$$

Пусть решение уравнений (42) имеет вид

$$\alpha = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (45)$$

Подставляем (45) в правую часть (44), получаем

$$\begin{aligned} \oint_\varepsilon -A dy + B dx &= \oint_\varepsilon -(\alpha u - \beta v + c^1) dy + (\beta u + \alpha v + c^2) dx = \\ &= \oint_\varepsilon -(\alpha \cos \varphi - \beta \sin \varphi + c^1) dy - (\beta \sin \varphi + \alpha \cos \varphi + c^2) dx = -2\pi u(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (46)$$

Пусть решение уравнений (42) имеет вид

$$\alpha = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (47)$$

Подставляем (47) в правую часть (44), получаем

$$\begin{aligned} \oint_\varepsilon -A dy + B dx &= \oint_\varepsilon -(\alpha u - \beta v + c^1) dy + (\beta u + \alpha v + c^2) dx = \\ &= \oint_\varepsilon -(-u \sin \varphi - v \cos \varphi + c^1) dy - (u \cos \varphi - v \sin \varphi + c^2) dx = -2\pi v(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (48)$$

В результате получаем формулы для вычисления компонент вектора деформации

$$2\pi u(x_0, y_0) = \oint_L -A dy + B dx, \quad 2\pi v(x_0, y_0) = \oint_L -A dy + B dx, \quad (49)$$

где $c^1 = \int \alpha \theta dx$, $c^2 = \int \beta \omega dx$.

Заключение. В работе построены законы сохранения для уравнений пространственной и двумерной теории упругости, которые позволили первую решить краевые задачи для этих систем. В статье продолжено решение краевых задач с помощью законов сохранения, начатое работами [8–11].

Библиографические ссылки

1. Новацкий В. Теория упругости. Москва : Мир, 1975. 870 с.
2. Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск : Наука, 1985.
3. Остросаблин Н. И., Сенашов С. И. Общие решения и симметрии уравнений линейной теории упругости // Докл. РАН. 1992. Т. 322, в. 3. С. 513–515.
4. Остросаблин Н. И. Общее решение и приведение системы уравнений линейной изотропной упругости к диагональному виду // Сиб. журн. индустр. матем. 2010. Т. 12, № 2. С. 79–83.
5. Остросаблин Н. И. Диагонализация системы статических уравнений Ламе линейной изотропной упругости // Сиб. журн. индустр. матем. 2012. Т. 15, № 3. С. 87–98.
6. Прудников В. Ю., Чиркунов Ю. А. Групповое расслоение уравнений Ламе. // ПММ. Т. 52, вып. 3. С. 471–477.
7. Бельмецов Н. Ф., Чиркунов Ю. А. Точные решения уравнений динамической асимметричной модели теории упругости // Сиб. журн. индустр. матем. 2012. Т. 15, № 4. С. 38–50.
8. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Использование законов сохранения для решения краевых задач системы Моисила–Теодореску // Сиб. журн. индустр. матем. 2022. Т. 25, № 4. С. 1–13.
9. Senashov S. I., Gomonova O. V. Construction of Elastoplastic Boundary in Problem of Tension of a Plate Weakened by Holes // Intern. J Non. lin Mech. 2019. Vol. 108. P. 7–10.
10. Gomonova O. V., Senashov S. I. Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial tension of a plate weakened by holes // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2021. Vol. 62, № 1. С. 179–186.
11. Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск, СО РАН. 201 с.
12. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений, Москва : Наука, 1978.

References

1. Novatsky V. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow. Mir. 1975. 870 p.

2. Annin B. D., Bytev V. O., Senashov S. I. *Gruppovye svoystva uravnenij uprugosti i plastichnosti* [Group properties of elasticity and plasticity equations]. Novosibirsk. Nauka, 1985.
3. Ostrosablin N. I., Senashov S. I. [General solutions and symmetries of equations of linear theory of elasticity] // *Dokl. RAS*, vol. 322, v. 3. 1992. pp. 513–515.
4. Ostrosablin N. I. [General solution and reduction of the system of equations of linear isotropic elasticity to a diagonal form] // *Sib. journal. industry. matem.* vol. 12. No. 2 (2010), pp. 79–83.
5. Ostrosablin N. I. [Diagonalization of the system of static Lamé equations of linear isotropic elasticity] // *Sib. journal. industry. matem.* vol. 15 No. 3 (2012), pp. 87–98.
6. Prudnikov V. Yu. Chirkunov Yu. A. [Group bundle of Lamé equations] // *PMM.*, vol. 52, v. 3, pp. 471–477.
7. Belmetsov N. F., Chirkunov Yu. A. [Exact solutions of the equations of the dynamic asymmetric model of elasticity theory] // *Sib. journal. industry. matem.* t. 15, No. 4 (2012), pp. 38–50.
8. Senashov S. I., Savostyanova I. L. [Using conservation laws to solve boundary value problems of the Moisil–Teodorescu system] // *Sib. journal. industry. matem.* vol. 25, No. 4 (2022), pp. 1–13.
9. Senashov S. I., Gomonova O. V. [Construction of Elastoplastic Boundary in Problem of Tension of a Plate Weakened by Holes] // *Intern. J Non. lin Mech.* 2019. V. 108. P. 7–10.
10. Gomonova O. V., Senashov S. I. [Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial tension of a plate weakened by holes] // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* 2021. v. 62, No. 1. pp. 179–186.
11. Kiryakov P. P., Senashov S. I., Yakhno A. N. *Prilozhenie simmetrij i zakonov sohraneniya k resheniyu differencial'nyh uravnenij* [Application of symmetries and conservation laws to the solution of differential equations] Novosibirsk, SB RAS, 201 p.
12. Ovsyannikov L. V. *Gruppovoj analiz differencial'nyh uravnenij* [Group analysis of differential equations] Moscow. Nauka, 1978.

ОПТИМАЛЬНАЯ СИСТЕМА ПОДАЛГЕБР ДО РАЗМЕРНОСТИ 3 АЛГЕБРЫ СИММЕТРИЙ УРАВНЕНИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ СРЕДЫ МИЗЕСА

Х. Д. Серрано Диас¹, А. Н. Яхно^{1*}

¹Университет Гвадалахары

Мексика, 44430, г. Гвадалахара, бульвар Марселино Гарсия Барраган, 1421

*E-mail: alexander.yakhno@academicos.udg.mx

В работе строится оптимальная система подалгебр размерности не больше трех для алгебры точечных симметрий системы трехмерных стационарных уравнений идеальной пластичности среды Мизеса. Полученные результаты могут быть использованы для построения инвариантных решений данной системы.

Ключевые слова: симметрии, подалгебры, оптимальная система, пластичность.

OPTIMAL SYSTEM OF SUBALGEBRAS UP TO 3-DIMENSION FOR SYMMETRY ALGEBRA OF PLASTICITY EQUATIONS WITH THE VON MISES YIELD CRITERION

J. D. Serrano Díaz¹, A. Yakhno^{1*}

¹University of Guadalajara

1421, Blvd. Marcelino García Barragán, Guadalajara, Jalisco, 44430, Mexico

*E-mail: alexander.yakhno@academicos.udg.mx

In this work, an optimal system of subalgebras up to the dimension three is constructed for the point symmetry algebra of the system of three-dimensional stationary ideal plasticity equations with the von Mises yield criterion. The obtained results can be used to construct invariant solutions of this system.

Keywords: symmetry, subalgebras, optimal system, plasticity.

Введение. Система стационарных уравнений идеальной пластичности среды Мизеса в трехмерном пространстве является классической системой механики деформируемых твердых тел, и представляет собой (в развернутом виде) систему четырех дифференциальных нелинейных уравнений второго порядка [1] для четырёх функций: гидростатическое давления p ,

и трех компонент вектора скоростей $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ от трех независимых переменных (x_1, x_2, x_3) :

$$p_{,i} = \frac{k_s}{2} \frac{\sqrt{2}}{A} \left(u_{i,jj} - \frac{2}{A^2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{nm} u_{n,mj} \right), \quad u_{i,i} = 0, \quad i, j, n, m = 1, 2, 3,$$

где $A^2 = \varepsilon_{mn} \varepsilon_{mn}$, $\varepsilon_{mn} = (u_{m,n} + u_{n,m}) / 2$, k_s – постоянная пластичности (предел текучести), по повторяющимся индексам производится суммирование, а нижний индекс через запятую означает частную производную по соответствующей переменной.

Исследование симметрий данной системы было начато в работах [2–4], и продолжено в [5–7]. Базис алгебры Ли L_{15} допускаемых точечных симметрий [2] состоит из 15 операторов:

$$\begin{aligned} X_i &= \partial_{x_i}, \quad Y_i = \partial_{u_i}, \quad N = x_i \partial_{x_i}, \quad M = u_i \partial_{u_i}, \quad S = \partial_p, \\ T_1 &= x_2 \partial_{u_3} - x_3 \partial_{u_2}, \quad T_2 = x_3 \partial_{u_1} - x_1 \partial_{u_3}, \quad T_3 = x_1 \partial_{u_2} - x_2 \partial_{u_1}, \\ Z_1 &= x_2 \partial_{x_3} - x_3 \partial_{x_2} + u_2 \partial_{u_3} - u_3 \partial_{u_2}, \\ Z_2 &= x_3 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_3} + u_3 \partial_{u_1} - u_1 \partial_{u_3}, \\ Z_3 &= x_1 \partial_{x_2} - x_2 \partial_{x_1} + u_1 \partial_{u_2} - u_2 \partial_{u_1}. \end{aligned}$$

Отметим структурные особенности этой алгебры Ли. Подалгебра $\Phi_3 = Z_1, Z_2, Z_3$ является неразрешимой и образует фактор Леви. Фактор алгебра L_{15} / Φ_3 образует радикал $\mathcal{R}$. Оператор S является центром.

В работах [2; 3] были классифицированы одномерные подалгебры и построены соответствующие инвариантные решения. В [7] классифицированы все неподобные подалгебры с ненулевым фактором Леви и найден вид инвариантных решений. В работе [6] приведена классификация подалгебр до размерности 3 для радикала $\mathcal{R}$. Стоит отметить, что вся проведенная классификация сделана без учета влияния центра, так как S дает автоморфизм тождественного действия. Однако для подалгебр размерности больше 1, центр влияет на условия подалгебры, что необходимо учитывать при классификации. В настоящей работе проанализированы предыдущие результаты и проведена полная классификация подалгебр размерностей 1, 2 и 3.

Неподобные подалгебры. Процесс классификации неподобных подалгебр связан с группой внутренних автоморфизмов данной алгебры Ли [8], [9]. Относительно этой группы все подалгебры разделяются на непересекающиеся классы эквивалентности. Для произвольного элемента $X \in L_{15}$, $X = x^i X_i$, $i = 1, \dots, 15$, $X_{4,5,6} = Y_{1,2,3}$, $X_7 = N$, $X_8 = M$, $X_{9,10,11} = T_{1,2,3}$, $X_{12,13,14} = Z_{1,2,3}$, $X_{15} = S$ рассматривается вектор общего положения

$(x^1, \dots, x^{15})$, $x^i \in \mathbb{R}$. Далее ищется действие присоединенной алгебры $\text{ad } L_{15}$ на произвольный элемент X по формуле $(\text{ad } X_i)X = [X_i, X]$. Для определения действия группы внутреннего автоморфизма $A_i(t_i) \in \text{Int } L_{15}$ решается система уравнений Ли вида

$$\frac{d\tilde{X}}{dt_i} = [X_i, \tilde{X}], \quad \tilde{X}|_{t_i=0} = X,$$

для каждой координаты x^j . Путем группирования координат

$$\vec{p}_1 := (x^1, x^2, x^3), \quad \vec{p}_2 := (x^4, x^5, x^6), \quad p_3 := x^7, \quad p_4 := x^8,$$

$$\vec{p}_5 := (x^9, x^{10}, x^{11}), \quad \vec{p}_6 := (x^{12}, x^{13}, x^{14}), \quad p_7 := x^{15},$$

и введения векторов для групповых параметров t_i группы внутренних автоморфизмов:

$$\vec{\alpha}_1 := (t_1, t_2, t_3), \quad \vec{\alpha}_2 := (t_4, t_5, t_6), \quad \alpha_3 := e^{-t_7}, \quad \alpha_4 := e^{-t_8},$$

$$\vec{\alpha}_5 := (t_9, t_{10}, t_{11}), \quad \vec{\alpha}_6 := (t_{12}, t_{13}, t_{14}),$$

действие этой группы на координаты вектора общего положения можно свести в табл. 1, где введены обозначения $\Pi = A_1 \circ A_2 \circ A_3$, $\Gamma = A_4 \circ A_5 \circ A_6$, $\Lambda = A_9 \circ A_{10} \circ A_{11}$, а R_i обозначает матрицу вращений относительно оси Ox^i . Из таблицы видно, что выражения p_3 , p_4 , $|\vec{p}_6|$ являются инвариантами группы $\text{Int } L_{15}$. Условие $|\vec{p}_6| \neq 0$ соответствует ненулевому фактору Леви. Случай $|\vec{p}_6| = 0$, $p_3 \neq 0$ или $p_4 \neq 0$ соответствует радикалу. В случае, когда все три инварианта нулевые, имеем подалгебры максимального абелева идеала $\langle X_1, \dots, X_6 \rangle$.

Таблица 1

	$\vec{p}_1$	$\vec{p}_2$	p_3	p_4	$\vec{p}_5$	$\vec{p}_6$
Π	$\vec{p}_1 + \vec{\alpha}_1 p_3 - \vec{\alpha}_1 \times \vec{p}_6$	$\vec{p}_2 - \vec{\alpha}_1 \times \vec{p}_5$	p_3	p_4	$\vec{p}_5$	$\vec{p}_6$
Γ	$\vec{p}_1$	$\vec{p}_2 + \vec{\alpha}_2 p_4 - \vec{\alpha}_2 \times \vec{p}_6$	p_3	p_4	$\vec{p}_5$	$\vec{p}_6$
A_7	$\vec{p}_1 \alpha_3$	$\vec{p}_2$	p_3	p_4	$\vec{p}_5 \alpha_3^{-1}$	$\vec{p}_6$
A_8	$\vec{p}_1$	$\vec{p}_2 \alpha_4$	p_3	p_4	$\vec{p}_5 \alpha_4$	$\vec{p}_6$
Λ	$\vec{p}_1$	$\vec{p}_2 - \vec{\alpha}_5 \times \vec{p}_1$	p_3	p_4	$\vec{p}_5 - \vec{\alpha}_5 (p_3 - p_4) - \vec{\alpha}_5 \times \vec{p}_6$	$\vec{p}_6$
Ω	$R_1 R_2 R_3 \vec{p}_1$	$R_1 R_2 R_3 \vec{p}_2$	p_3	p_4	$R_1 R_2 R_3 \vec{p}_5$	$R_1 R_2 R_3 \vec{p}_6$

Также при классификации учитываются действия внешних автоморфизмов, соответствующих дискретным симметриям системы пластичности при смене знаков независимых и зависимых переменных (см. табл. 2). Кроме этого, допускаются невырожденные замены базиса подалгебр для упрощения вида этих подалгебр. В одномерном случае таким заменам

соответствует преобразование умножение вектора на ненулевой скаляр. В двухмерном и трехмерном случаях замены базиса можно рассматривать как Гауссову редукцию матриц.

Таблица 2

	$\vec{p}_1$	$\vec{p}_2$	p_3	p_4	$\vec{p}_5$	$\vec{p}_6$	p_7
	$x^1 x^2 x^3$	$x^4 x^5 x^6$	x^7	x^8	$x^9 x^{10} x^{11}$	$x^{12} x^{13} x^{14}$	x^{15}
E_{12}^3	$-x^1 - x^2 x^3$	$x^4 x^5 - x^6$	x^7	x^8	$x^9 x^{10} - x^{11}$	$-x^{12} - x^{13} x^{14}$	$-x^{15}$
E_{13}^2	$-x^1 x^2 - x^3$	$x^4 - x^5 x^6$	x^7	x^8	$x^9 - x^{10} x^{11}$	$-x^{12} x^{13} - x^{14}$	$-x^{15}$
E_{23}^1	$x^1 - x^2 x^3$	$-x^4 x^5 x^6$	x^7	x^8	$-x^9 x^{10} x^{11}$	$x^{12} - x^{13} - x^{14}$	$-x^{15}$
E_1^{23}	$-x^1 x^2 x^3$	$x^4 - x^5 - x^6$	x^7	x^8	$-x^9 x^{10} x^{11}$	$x^{12} - x^{13} - x^{14}$	$-x^{15}$
E_2^{13}	$x^1 - x^2 x^3$	$-x^4 x^5 - x^6$	x^7	x^8	$x^9 - x^{10} x^{11}$	$-x^{12} x^{13} - x^{14}$	$-x^{15}$
E_3^{12}	$x^1 x^2 - x^3$	$-x^4 - x^5 x^6$	x^7	x^8	$x^9 x^{10} - x^{11}$	$-x^{12} - x^{13} x^{14}$	$-x^{15}$
E_1^1	$-x^1 x^2 x^3$	$-x^4 x^5 x^6$	x^7	x^8	$x^9 - x^{10} - x^{11}$	$x^{12} - x^{13} - x^{14}$	x^{15}
E_2^2	$x^1 - x^2 x^3$	$x^4 - x^5 x^6$	x^7	x^8	$-x^9 x^{10} - x^{11}$	$-x^{12} x^{13} - x^{14}$	x^{15}
E_3^3	$x^1 x^2 - x^3$	$x^4 x^5 - x^6$	x^7	x^8	$-x^9 - x^{10} x^{11}$	$-x^{12} - x^{13} x^{14}$	x^{15}
E_{12}^{12}	$-x^1 - x^2 x^3$	$-x^4 - x^5 x^6$	x^7	x^8	$-x^9 - x^{10} x^{11}$	$-x^{12} - x^{13} x^{14}$	x^{15}
E_{13}^{13}	$-x^1 x^2 - x^3$	$-x^4 x^5 - x^6$	x^7	x^8	$-x^9 x^{10} - x^{11}$	$-x^{12} x^{13} - x^{14}$	x^{15}
E_{23}^{23}	$x^1 - x^2 x^3$	$x^4 - x^5 - x^6$	x^7	x^8	$x^9 - x^{10} - x^{11}$	$x^{12} - x^{13} - x^{14}$	x^{15}
E_{123}	$-\vec{p}_1$	$\vec{p}_2$	p_3	p_4	$-\vec{p}_5$	$-\vec{p}_6$	$-p_7$
E^{123}	$\vec{p}_1$	$-\vec{p}_2$	p_3	p_4	$-\vec{p}_5$	$-\vec{p}_6$	$-p_7$

Основная цель классификации – получить как можно больше нулевых координат вектора общего положения, так как это соответствует наиболее простому представителю класса эквивалентных подалгебр. При получении одинакового количества нулевых компонент, предпочтение отдается представителю, у которого нулевые координаты имеют наибольший верхний индекс, так как это соответствует подалгебре с более простыми операторами, что позволяет строить более простой вид инвариантного решения. Набор таких представителей классов будем называть оптимальной системой подалгебр размерности k и обозначать θ^k .

Результат классификации одномерных подалгебр θ^1 приведен в табл. 3.

Таблица 3

1	$\langle X_1 + Y_1 + \alpha T_1 + Z_1 + \gamma S \rangle$
2	$\langle \delta_1 \delta_2 X_1 + (1 - \delta_1) \delta_2 Y_1 + \delta_3 T_1 + Z_1 + \gamma S \rangle$
3	$\langle \delta X_1 + \beta^0 M + Z_1 + \gamma S \rangle$
4	$\langle \delta Y_1 + \beta^0 N + Z_1 + \gamma S \rangle$

5	$\langle \beta_1^0 N + \beta_2^{0, \beta_1^0} M + Z_1 + \gamma S \rangle$
6	$\langle \beta^0 (N + M) + \delta T_1 + Z_1 + \gamma S \rangle$
7	$\langle N + M + \delta T_1 + \gamma S \rangle$
8	$\langle \beta^{0,1} N + M + \gamma S \rangle$
9	$\langle \delta X_1 + M + \gamma S \rangle$
10	$\langle \delta Y_1 + N + \gamma S \rangle$
11	$\langle X_1 + \alpha Y_1 + T_1 + \gamma S \rangle$
12	$\langle \alpha X_1 + X_2 + T_1 + \gamma S \rangle$
13	$\langle \delta_1 \delta_3 X_1 + \delta_2 Y_1 + (1 - \delta_1) \delta_3 T_1 + \delta_4 S \rangle$

В этой (и в таблицах Приложения) введены обозначения: $\alpha_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$. $\beta_i^0 \in \mathbb{R} \setminus 0$, $\delta_i \in \{0,1\}$. Первые 6 классов системы θ^1 содержат оператор Z_1 . Классы с 7 по 10 соответствуют радикалу, оставшиеся – максимальному абелеву идеалу.

При построении подалгебр размерностей больше 1 необходимо учитывать условия подалгебр. Пусть $\vec{e}_j = (e_j^1, \dots, e_j^{15})$ – векторы координат операторов $O_j = e_j^i X_i$, $O_j \in L_{15}$, $j = 1, 2, 3$. Векторы $\vec{e}_j$ образуют базис двумерной $\mathcal{S}^2 = O_1, O_2$ или трехмерной $\mathcal{S}^3 = \langle O_1, O_2, O_3 \rangle$ подалгебры, если ранг матрицы Ξ , составленной из координат векторов $\vec{e}_j$ (построчно) совпадает с размерностью подалгебр и выполняются условия $[O_i, O_j] = c_l^{ij} O_l$, $c_l^{ij} \in \mathbb{R}$, $l = 1, 2$ (или $l = 1, 2, 3$), т.е. для каждой пары операторов базиса подалгебры, её коммутатор должен быть равен некоторой линейной комбинации базисных операторов подалгебры.

Действие автоморфизмов влияет одновременно на все строки матрицы Ξ . Таким образом, при построении θ^2 можно считать, что первая строка приведена к одному из векторов из θ^1 . Далее, при выполнении условий подалгебр, происходит упрощение второй строки действиями автоморфизмов, не меняющих первую строку и Гауссовой редукцией. В результате получено 297 классов двумерных подалгебр (см. Приложение) обозначенных θ_1^2 для ненулевого фактора Леви (80 классов), θ_2^2 для радикала (29 классов) и θ_3^2 (188 классов) для максимального абелева идеала. В трехмерном случае считаем, что первые две строки матрицы Ξ приведены к одному из видов из θ^2 . При выполнении условий подалгебр производим упрощение третьей строки действиями автоморфизмов (не меняя первые две строки) и редукцией. Результаты представлены в Приложении. Отме-

тим, что таким методом расширения невозможно получить подалгебру $\langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle$, так как она не имеет двумерных действительных подалгебр. Поэтому она добавлена в θ_1^3 (соответствующей ненулевому фактору Леви) под номером 145. Всего получено 1512 классов трехмерных неподобных подалгебр. Ввиду большого размера таблиц Приложения, они расположены в GoogleDrive по адресу <https://bit.ly/3pK3pW6>.

Отметим, что процесс классификации был проведен с помощью программ, разработанных в системе алгебраических вычислений SageMath. Данные программы доступны в GoogleDrive по ссылке <https://bit.ly/3crzsqH>.

Авторы выражают благодарность С. И. Сенашову за обсуждение и ценные замечания.

Выводы. В работе проведена полная классификация неподобных подалгебр размерностей 1, 2 и 3 для алгебры Ли точечных симметрий системы уравнений пластичности среды Мизеса. Эта классификация позволяет построить представления инвариантных решений ранга 2, 1 и 0.

Библиографические ссылки

1. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М. : Мир, 1964. 308 с.
2. Сенашов С. И. Групповые свойства уравнений идеальной пластичности с условием текучести Мизеса // Динамика сплошной среды. Ин-т гидродинамики СО АН СССР. Новосибирск. 1977. № 28. С. 109–117.
3. Сенашов С. И. Инвариантные решения пространственной задачи идеальной пластичности // Прикладная механика и техническая физика. 1980. № 3. С. 159–163.
4. Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск : Наука, 1985. 140 с.
5. Киряков П. П., Лахин В. Н., Сенашов С. И. Оптимальная система одномерных подалгебр для уравнений среды Мизеса // Комплексный анализ и дифференциальные уравнения : межвузовский сборник. Красноярск : РИЦ КрасГУ, 1996. С. 79–84.
6. Яхно А. Н. Оптимальные системы подалгебр радикала алгебры Ли и вид инвариантных решений для пространственных уравнений пластичности среды Мизеса // Деп. в ВИНТИ 24.06.99. № 1999 (99). С. 197–214.
7. Kiriakov P. P. The Enumeration of Invariant Solutions of Equations of Plasticity // Proceedings of International Conference Modern Group Analysis VII. MARS Publishers. SYMMETRY Foundation, 1998.
8. Овсянников Л. В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.
9. Овсянников Л. В. Некоторые итоги выполнения программы ПОДМОДЕЛИ для уравнений газовой динамики // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63. № 3. С. 362–372.

References

1. Thomas T. Y. Plastic flow and fracture in solids. New York, Academic Press, 1961, 267 p.
2. Senashov S. I. [Group property of equations of perfect plasticity with the von Mises yield criterion] // *Dinamika sploshnoy sredy*. Novosibirsk. 1977, no. 28, p. 109–117 (In Russ.).
3. Senashov S. I. Invariant solutions of a three-dimensional ideal plasticity problem. *J Appl Mech Tech Phys.*, 1980, vol. 21, p. 417–420.
4. Annin B. D., Bytev V. O. Senashov S. I. [Group properties of elasticity and plasticity equations]. Novosibirsk, Nauka. 1985, 140 p. (In Russ.).
5. Kiryakov P. P., Lakhin V. N., Senashov S. I. [Optimal system of one-dimensional subalgebras for equations with Mises criterion] // *Kompleksnyy analiz i differentsial'nye uravneniya*. Krasnoyarsk. 1996, p. 79–84. (In Russ.).
6. Yakhno A. N. [Optimal systems of subalgebras for radical of Lie algebra and the form of invariant solutions for three-dimensional plasticity equations with Mises criterion] // VINITI. no. 1999 (99), p. 197–214.
7. Kiriakov P. P. The Enumeration of Invariant Solutions of Equations of Plasticity // Proceedings of International Conference Modern Group Analysis VII. MARS Publishers. SYMMETRY Foundation, 1998.
8. Ovsyannikov L. V. [PODMODELI program. Gas dynamics] // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1994. vol. 58, no. 4. p. 30–55.
9. Ovsyannikov L. V. [Some results of PODMODELI program implementation for gas dynamics equations] // Journal of Applied Mathematics and. 1999. vol. 63, no. 3. p. 362–372.

© Серрано Диас Х. Д., Яхно А. Н., 2022

ВЫВОД УСЛОВИЙ ПОРЯДКА ДЛЯ ЯВНЫХ m -СТАДИЙНЫХ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ РУНГЕ–КУТТЫ–НИСТРЕМА

В. Е. Шемарулин

Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский
научно-исследовательский институт экспериментальной физики
Российская Федерация, 607190, г. Саров Нижегородской обл.,
просп. Мира, 37
E-mail: VEShemarulin@vniief.ru

Предложен новый метод вывода условий порядка p для коэффициентов явных m -стадийных симплектических разностных схем Рунге–Кутты–Нистрема. По сравнению с методами, описанными в литературе, предложенный метод приводит к явному компактному представлению условий порядка для любых значений m и p .

Ключевые слова: молекулярная динамика, натуральные гамильтоновы системы, фазовый поток, m -стадийные симплектические разностные схемы, порядок аппроксимации, условия порядка.

DERIVATION OF ORDER CONDITIONS FOR EXPLICIT m -STAGE SYMPLECTIC RUNGE–KUTTA–NYSTROM DIFFERENCE SCHEMES

V. E. Shemarulin

Russian Federal Nuclear Center – All-Russia Institute of Experimental Physics
37, Mira prospect, Sarov, Nizhegorodskaya oblast, 607190, Russian Federation
E-mail: VEShemarulin@vniief.ru

The paper presents a new method of deriving the p -order conditions for the coefficients of explicit m -stage symplectic Runge–Kutta–Nystrom difference schemes. In comparison with the earlier reported methods, this method leads to an explicit reduced representation of the order conditions for any m and p values.

Keywords: molecular dynamics, natural Hamiltonian systems, phase flow, m -stage symplectic difference schemes, approximation order, order conditions.

Введение. Рассматриваются явные m -стадийные симплектические разностные схемы Рунге–Кутты–Нистрема (RKN), предназначенные для чис-

ленного решения натуральных гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с распадающимися (натуральными) гамильтонианами $H(r, p)$, в частности, для решения задач молекулярной динамики (МД), небесной механики и астрофизики. Натуральными называются гамильтонианы, представимые в виде суммы кинетической и потенциальной энергий [1].

Симплектические схемы сохраняют гамильтонову структуру исходных дифференциальных уравнений [2–4] и поэтому обладают оптимальными для МД-моделирования свойствами такими, как сохранение стандартных интегралов движения (импульса и момента импульса), сохранение дополнительных интегралов движения (одним из которых является фазовый объем), а также «сохранение» полной энергии с приемлемым уровнем осцилляций (отсутствие дрейфа). По этим причинам наибольшее распространение в задачах молекулярной динамики получила единственная в классе одностадийных симплектическая схема второго порядка – схема Verlet [5]. Для построения схем порядка выше второго требуется увеличение числа стадий, по крайней мере, до трех ($m \geq 3$) [4].

Первым шагом при построении симплектических схем является выполнение условий симплектичности для их коэффициентов. Следующий шаг при построении схем требуемого порядка аппроксимации состоит в выполнении условий порядка (определяющих уравнений) для этих коэффициентов. Эти условия получают приравниванием соответствующих коэффициентов разложений точного и численного решений исходной системы ОДУ по степеням временного шага Δt , что и обеспечивает нужный порядок аппроксимации. Для натуральных гамильтоновых систем альтернативным способом построения симплектических схем являются аналитически интегрируемые алгоритмы расщепления [6].

В настоящей работе предложен и разработан новый метод вывода условий произвольного порядка p для явных m -стадийных симплектических разностных схем RKN. Этот метод основан на предложенных и разработанных автором новых методах разложения в ряды точных решений уравнений молекулярной динамики (задачи о движении материальной точки в центральном силовом поле) и решений разностных уравнений схем RKN.

В отличие от методов, описанных в литературе, разработанный здесь метод приводит к явному компактному представлению определяющих уравнений для любых m и p . В дальнейшем это представление можно будет использовать для получения выводов общего характера о симплектических разностных схемах.

Ранее автором и В. Н. Софроновым для m -стадийных симплектических явных схем были получены (но не опубликованы) условия 1-го÷5-го порядков. Позднее ими же условия 1-го÷5-го порядков для явных трехстадийных схем были опубликованы в [7; 8] (см. также [9]). В данных работах проведено подробное исследование совместности этих условий,

в результате решена проблема описания многообразия явных трехстадийных симплектических схем: дана классификация схем 3-го порядка точности; доказано, что в классе трехстадийных существуют схемы 4-го порядка аппроксимации (их казалось семь), но нет схем более высоких порядков. Кроме того, перечислены схемы, обладающие улучшенными свойствами (обратимость, оптимальность по фазовой ошибке); представлены результаты численных расчетов, демонстрирующие качества симплектических схем, в частности, показывающие, что среди всех рассмотренных схем, только симплектические схемы обеспечивают отсутствие дрейфа полной энергии.

Ограничения на число стадий m при заданном порядке точности p называют барьерами Бутчера [10]. Для классических явных схем Рунге–Кутты, предназначенных для решения произвольных систем ОДУ, существуют четыре барьера Бутчера. В общем случае p -й порядок точности могут обеспечить только схемы с числом стадий $m \geq m^*$, где

$$m^* = \begin{cases} p, & p \leq 4, \\ p+1, & 4 < p \leq 6, \\ p+2, & p = 7, \\ p+3, & p \geq 8. \end{cases}$$

Таким образом, в работах [7; 8] показано, что для симплектических схем первый барьер Бутчера ($p \leq 4 \rightarrow m \geq p$) преодолевается: порядок $p = 4$ достигается при $m = 3$. В связи с этим возникает вопрос о нахождении ограничений, уточняющих барьеры Бутчера для явных симплектических схем. В настоящее время этот вопрос остается открытым.

Статья имеет методический характер. Изложение ограничивается описанием нового алгоритма вывода условий порядка. Проблема совместности и нахождения решений этих условий будет рассмотрена в следующих работах.

Натуральные гамильтоновы системы и условие симплектичности разностных схем. В методе классической молекулярной динамики (МД) микроскопическое состояние взаимодействующих частиц определяется набором обобщенных координат $r = (r_1, r_2, \dots, r_N)$ и импульсов $p = (p_1, p_2, \dots, p_N)$, $p_i = m_i u_i$, $i = 1, 2, \dots, N$. Динамические переменные $(r(t), p(t))$, изменяются со временем согласно уравнениям Гамильтона. МД-системы относятся к классу натуральных гамильтоновых систем со специфическими распадающимися (представимыми в виде суммы кинетической и потенциальной энергий) гамильтонианами

$$H = H(p, r) = K(p) + U(r) = \sum_i \frac{|p_i|^2}{2m_i} + U(r), \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

В случае парного взаимодействия потенциальная энергия

$$U(r) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} U(|r_i - r_j|),$$

соответственно этому уравнения Гамильтона имеют следующий вид:

$$u = \frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{\partial U(r)}{\partial r}, \quad \frac{du}{dt} = \psi,$$

$$\psi = \left(-\frac{1}{m_i} \sum_{j \neq i} \frac{r_i - r_j}{|r_i - r_j|} f(|r_i - r_j|), i = 1, 2, \dots, N \right), \quad f(r) = -\frac{dU(r)}{dr}. \quad (1)$$

Классическими интегральными следствиями дифференциальных уравнений (1) являются законы сохранения энергии, импульса и момента импульса системы материальных частиц. Кроме этих стандартных интегралов движения гамильтоновы системы (1) имеют дополнительные интегральные инварианты, одним из которых является фазовый объём.

Фазовый поток $G: \mathbb{R}^{6N}(r, p) \rightarrow \mathbb{R}^{6N}(r, p)$ гамильтоновой системы преобразует ее начальное состояние $(r(t=0), p(t=0))$ в текущее $(r(t), p(t))$, сохраняя симплектическую структуру на $\mathbb{R}^{6N}(r, p)$, заданную 2-формой [1]

$$\omega^2 = \sum_i dp_i \wedge dr_i, \quad dp_i \wedge dr_i = dp_{ix} \wedge dx_i + dp_{iy} \wedge dy_i + dp_{iz} \wedge dz_i,$$

Из сохранения симплектической структуры следует инвариантность интегралов $\int (\omega^2)^L$ по соответствующим $2L$ – многообразиям:

$$\int (\omega^2)^L = \text{const}, \quad (\omega^2)^L \equiv (\omega^2)^{\wedge L} \equiv \Lambda^L(\omega^2) = \omega^2 \wedge \omega^2 \dots \wedge \omega^2, \quad 1 \leq L \leq 3N.$$

Конструкция данных инвариантов состоит в последовательном применении операции внешнего умножения 2-форм. Последним в ряду перечисленных инвариантов стоит фазовый объём: $\int (\omega^2)^{3N} = \text{const}$.

Для симплектичности фазового потока G , определенного некоторой динамической системой, необходимо и достаточно, чтобы матрица Якоби D этого потока удовлетворяла соотношению [1]:

$$(D)^T J D = J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -E_{3N} \\ E_{3N} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где E_{3N} – единичная матрица порядка $3N$.

В соответствии с (2) одношаговый разностный метод называется симплектическим, если оператор $D^{n+1} = \partial(r^{n+1}, p^{n+1}) / \partial(r^n, p^n)$ перехода с n -го на $(n+1)$ -й временной слой осуществляет симплектическое преобразование динамических переменных [2; 3; 4]:

$$\left(D^{n+1}\right)^T J D^{n+1} = J. \quad (3)$$

Для систем с гамильтонианами общего вида не существует явных симплектических схем Рунге–Кутты [11]. В то же время такие схемы могут быть построены для систем с распадающимися гамильтонианами

$$H(r, p) = K(p) + U(r). \quad (4)$$

Для молекулярной динамики практический интерес представляют только явные схемы, как наиболее экономичные. Выводу условий порядка для таких схем и посвящена настоящая статья. При этом предполагается, что гамильтонианы имеют вид (4).

Семейство неявных симплектических трехстадийных методов Рунге–Кутты для систем общего вида исследовано в [11].

Симплектические схемы RKN. Для общих (неявных) m -стадийных разностных схем RKN для системы (1):

$$\begin{aligned} r^{n+1} &= r^n + \Delta t u^n + \Delta t^2 \sum_{j=1}^m \beta_j \psi(\xi_j), \quad u^{n+1} = u^n + \Delta t \sum_{j=1}^m \gamma_j \psi(\xi_j), \\ \xi_j &= r^n + \Delta t \alpha_j u^n + \Delta t^2 \sum_{l=1}^m a_{jl} \psi(\xi_l), \end{aligned} \quad (5)$$

условие симплектичности (3) выполняется при следующих ограничениях на их коэффициенты [2–4]:

$$\beta_j = \gamma_j (1 - \alpha_j), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

$$\gamma_j a_{jk} - \gamma_k a_{kj} + \gamma_j \gamma_k (\alpha_k - \alpha_j) = 0, \quad j, k = 1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

Таким образом, в общем случае m -стадийные симплектические схемы RKN полностью определяются заданием матрицы $A = \|a_{jk}\|_{j,k=1}^m$ и двух векторов $\alpha = (\alpha_j)$, $\gamma = (\gamma_j)$ размерности m , образованных коэффициентами данных схем.

Здесь рассматриваются только явные схемы, для которых матрица a_{jk} является нижнетреугольной. Для таких схем связь коэффициентов матрицы a_{jk} с параметрами α_j, γ_j устанавливается однозначным образом [4]:

$$a_{jk} = \begin{cases} 0, & 1 \leq j \leq k \leq m, \\ \gamma_k (\alpha_j - \alpha_k), & 1 \leq k < j \leq m. \end{cases} \quad (8)$$

Следовательно, явные m -стадийные симплектические схемы RKN вполне определяются векторами $\alpha = (\alpha_j)$, $\gamma = (\gamma_j)$ и семейства m -стадийных

схем можно отождествлять с соответствующими подмножествами в пространстве параметров $R^{2m}(\alpha_j, \gamma_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Симплектические схемы молекулярной динамики.

Скалярный вариант системы (1). Предварительные замечания об условиях порядка для симплектических схем RKN. Прежде, чем приступить к построению условий порядка для коэффициентов m -стадийных симплектических схем RKN (5), сделаем несколько предварительных замечаний.

Условия порядка не зависят от размерности N системы. Это следует из того, что в этих условиях отсутствует индекс, нумерующий компоненты векторов [10]. Поэтому для построения условий порядка достаточно ограничиться скалярным вариантом системы (1):

$$\frac{dr}{dt} = u, \quad \frac{du}{dt} = \varphi(r). \quad (9)$$

Далее рассматривается случай, когда $U(r)$ и, соответственно, $\varphi(r)$ достаточно гладкие дифференцируемые функции, имеющие столько производных, сколько необходимо для построения схем заданного порядка аппроксимации.

Для скалярных дифференциальных уравнений (9) m -стадийная разностная схема RKN (5) при выполнении условий (6)–(8) принимает вид

$$r(t + \Delta t) \approx r^{n+1} = r(t) + \Delta t u(t) + \Delta t^2 \sum_{j=1}^m \gamma_j (1 - \alpha_j) \varphi(\xi_j), \quad (10)$$

$$u(t + \Delta t) \approx u^{n+1} = u(t) + \Delta t \sum_{j=1}^m \gamma_j \varphi(\xi_j), \quad (11)$$

$$\xi_j(t + \Delta t) = r(t) + \Delta t \alpha_j u(t) + \Delta t^2 \sum_{l=1}^{j-1} \gamma_l (\alpha_j - \alpha_l) \varphi(\xi_l). \quad (12)$$

В схеме (10)–(12) $\xi_j = \xi_j(t + \Delta t)$, $\xi_j(\Delta t = 0) = r(t)$, $j = 1, 2, \dots, m$; величины $r(t)$, $u(t)$ и $r(t + \Delta t)$, $u(t + \Delta t)$ – значения точного решения системы (9) в моменты времени t и $(t + \Delta t)$, соответственно; $r(t)$ и $u(t)$ – это то же, что r^n и u^n в схеме (5), t и $(t + \Delta t)$ соответствуют n -му и $(n+1)$ -му временному шагу той же схемы (5).

Условия порядка для коэффициентов α_j , γ_j схемы, обеспечивающие нужный порядок аппроксимации, получаются приравниванием нулю коэффициентов разности степенных разложений по Δt точного и разностного решений задачи Коши (с начальными данными $r = r_0$ и $u = u_0 = r'_0$) для системы ОДУ (9) и, соответственно, схемы (10)–(12).

Нахождению этих разложений и выводу отвечающих им условий порядка посвящена оставшаяся часть статьи.

При этом разложения в ряды Тейлора рассматриваются как формальные, то есть, без исследования их на сходимость. Это вполне допустимо, поскольку для вывода условий порядка требуется только сравнение производных соответствующих порядков.

Тейлоровские разложения аналитического и разностного решений.

Тейлоровские разложения аналитического решения скалярной системы (9). Пусть $(r(t), u(t))$ – точное решение системы (9) и

$$\begin{aligned} r(t_0 + \Delta t) &= r + r' \cdot \Delta t + \frac{r''}{2!} \cdot \Delta t^2 + \frac{r'''}{3!} \cdot \Delta t^3 + \dots, \\ u(t_0 + \Delta t) &= u + u' \cdot \Delta t + \frac{u''}{2!} \cdot \Delta t^2 + \frac{u'''}{3!} \cdot \Delta t^3 + \dots, \\ r^{(n)} &= r^{(n)}(t_0), \quad u^{(n)} = u^{(n)}(t_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (13)$$

разложения функций $r(t_0 + \Delta t)$ и $u(t_0 + \Delta t)$ в ряды Тейлора в окрестности начальной точки t_0 , $\Delta t^n = (\Delta t)^n$, t_0 – фиксированный начальный момент времени.

Здесь и далее используются следующие обозначения для значений функций и их производных в точке $t = t_0$:

$$r^{(n)} = \left. \frac{d^n r(t)}{dt^n} \right|_{t=t_0}, \quad u^{(n)} = \left. \frac{d^n u(t)}{dt^n} \right|_{t=t_0}, \quad \varphi^{(n)} = \frac{d^n \varphi(r)}{dr^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для получения явных формул для коэффициентов разложений (13) используется хорошо известное решение задачи о движении материальной точки в центральном силовом поле притягивающего центра [1].

Задача интегрирования системы уравнений (9) – это частный случай (одномерный вариант, то есть с нулевым кинетическим моментом) задачи о движении точки единичной массы в центральном поле с потенциалом

$$U(r) = - \int \varphi(r) dr.$$

Общее решение этой задачи определяется квадратурой, являющейся непосредственным следствием сохранения полной энергии точки [1]:

$$\begin{aligned} \Delta t = t - t_0 &= \int_{r_0}^r \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{2(E - U(\tilde{r}))}}, \\ E = E_0 &= \frac{u_0^2}{2} + U(r_0) = \frac{(r'_0)^2}{2} + U(r_0) = \text{const}, \\ r_0 &= r(t_0), \quad r'_0 = r'(t_0), \quad r = r(t). \end{aligned} \quad (14)$$

t – текущее время, r_0 и $r'_0 = u_0$ – начальные положение и скорость точки, E – ее полная энергия. Поскольку потенциал определен с точностью до константы, положим $U(r) = -\int_{r_0}^r \varphi(r) dr$. Тогда $U(r_0) = 0$, $E = \frac{(r'_0)^2}{2} \geq 0$.

Здесь без ограничения общности рассматривается случай, когда параметр $r'_0 > 0$ и, следовательно, $E > 0$.

Общая схема вывода формул для коэффициентов разложений (13) заключается в следующем. Сначала из соотношения (14) находится разложение в ряд Тейлора по степеням $\Delta r = r - r_0$ функции $\Delta t = T(\Delta r)$:

$$\Delta t = b_1 \cdot \Delta r + b_2 \cdot \Delta r^2 + b_3 \cdot \Delta r^3 + \dots \quad r_0, \quad \Delta r^n = (\Delta r)^n.$$

Затем этот ряд обращается. В результате получается требуемое разложение в ряд Тейлора обратной функции $\Delta r = R(\Delta t) = T^{-1}(\Delta t)$:

$$\Delta r \equiv r' \cdot \Delta t + \frac{r''}{2!} \cdot \Delta t^2 + \frac{r'''}{3!} \cdot \Delta t^3 + \dots = c_1 \cdot \Delta t + c_2 \cdot \Delta t^2 + c_3 \cdot \Delta t^3 + \dots, \quad \Delta t^n = (\Delta t)^n.$$

Формальное разложение функции $\Delta t = T(\Delta r)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \sqrt{\frac{e}{2}} I = \sqrt{\frac{e}{2}} \left(\Delta r + \sum_{l=2}^{\infty} d_l (\Delta r)^l \right) = b_1 \cdot \Delta r + b_2 \cdot \Delta r^2 + b_3 \cdot \Delta r^3 + \dots, \\ b_1 &= \sqrt{\frac{e}{2}}, \quad b_l = d_l \sqrt{\frac{e}{2}}, \quad l = 2, 3, \dots \\ \sqrt{\frac{e}{2}} &= \sqrt{\frac{1}{2E}} = \frac{1}{r'_0} = \frac{1}{u_0}. \end{aligned} \tag{15}$$

$$d_l = \sum_{\substack{m_1+m_2+\dots+m_p=p-l-1 \\ m_i \geq 0, \quad p \geq 1}} (-1)^p \frac{(1/2)_p}{l \cdot p!} e^p \frac{\varphi^{(m_1)}}{(m_1+1)!} \frac{\varphi^{(m_2)}}{(m_2+1)!} \dots \frac{\varphi^{(m_p)}}{(m_p+1)!},$$

$$(1/2)_p = 2^{-2p} \frac{(2p)!}{p!}.$$

Обращение ряда (15) проводится по известной схеме [12]. Перепишем соотношение (15) для функции $\Delta t = T(\Delta r)$ в виде

$$\Delta t = \Delta r (b_1 + b_2 \cdot \Delta r + b_3 \cdot \Delta r^2 + \dots), \tag{16}$$

обозначим сумму ряда в скобках через $\psi_1(\Delta)$ и представим уравнение (16) в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} \Delta r &= \Delta t \cdot \frac{1}{\psi_1(\Delta r)}, \\ \psi_1(\Delta r) &= b_1 + b_2 \cdot \Delta r + b_3 \cdot \Delta r^2 + \dots \end{aligned} \tag{17}$$

В силу (15) и принятого ранее соглашения ($r'_0 > 0$) $b_1 = \frac{1}{r'_0} \neq 0$. Поэтому решение уравнения (17) относительно Δr – обращение ряда (15) может быть представлено рядом Лагранжа [12]:

$$\Delta r = \Delta t \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta t^{n-1}}{n!} \left(\frac{d^{n-1}}{d\rho^{n-1}} \psi^n(\rho) \right) \Bigg|_{\rho=0},$$

$$\psi^n(\rho) = (\psi(\rho))^n, \quad \psi(\rho) = \frac{1}{\psi_1(\rho)}, \quad \rho = \Delta r. \quad (18)$$

В прежних обозначениях

$$\Delta r \equiv r' \cdot \Delta t + \frac{r''}{2!} \cdot \Delta t^2 + \frac{r'''}{3!} \cdot \Delta t^3 + \dots = c_1 \cdot \Delta t + c_2 \cdot \Delta t^2 + c_3 \cdot \Delta t^3 + \dots \quad (19)$$

Следовательно,

$$c_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^{n-1}}{d\rho^{n-1}} \psi^n(\rho) \right) \Bigg|_{\rho=0}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (20)$$

Для $\psi(\Delta r)$ справедливо разложение

$$\psi(\Delta r) = u_0 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} D_m \Delta r^m,$$

$$D_0 = 1, \quad D_m = \sum_{\substack{m_1+m_2+\dots+m_k=m, \\ m_i \geq 1, \quad m \geq k \geq 1}} (-1)^k d_{m_1+1} d_{m_2+1} \dots d_{m_k+1}, \quad m > 0. \quad (21)$$

Из соотношений (20) и (21) следуют:

1. Очевидное равенство $c_1 = \psi(0) = u_0$.

$$2. \psi^n = (\psi(\Delta r))^n = u_0^n \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} D_m \Delta r^m \right)^n = u_0^n \cdot \sum_{\substack{m_1+m_2+\dots+m_n=m, \\ m_i \geq 0}} D_{m_1} D_{m_2} \dots D_{m_n} \Delta r^m.$$

$$3. \frac{d^{n-1}}{d\rho^{n-1}} \psi^n(\rho) = u_0^n \cdot \sum_{\substack{m_1+m_2+\dots+m_n=m \\ m_i \geq 0, \quad m \geq n-1}} m(m-1)\dots(m-(n-2)) D_{m_1} D_{m_2} \dots D_{m_n} \rho^{m-(n-1)}.$$

Отсюда согласно (20) находим

$$c_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^{n-1}}{d\rho^{n-1}} \psi^n(\rho) \right) \Bigg|_{\rho=0} = \frac{u_0^n (n-1)!}{n!} \sum_{\substack{m_1+m_2+\dots+m_n=n-1 \\ m_i \geq 0}} D_{m_1} D_{m_2} \dots D_{m_n} =$$

$$= \frac{u_0^n}{n} \sum_{\substack{m_1+m_2+\dots+m_n=n-1 \\ m_i \geq 0}} D_{m_1} D_{m_2} \dots D_{m_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Для производных $r^{(n)}$ получаем следующие представления (см. (19)):

$$r^{(n)} = n! \cdot c_n = (n-1)! u_0^n \cdot \sum_{\substack{m_1+m_2+\dots+m_n=n-1 \\ m_i \geq 0}} D_{m_1} D_{m_2} \dots D_{m_n}, \quad n=1,2,3,\dots \quad (22)$$

Соотношение (18) после этого принимает вид

$$\Delta r = \Delta t \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{u_0^n}{n} \sum_{\substack{m_1+m_2+\dots+m_n=n-1 \\ m_i \geq 0}} D_{m_1} D_{m_2} \dots D_{m_n} \right) \Delta t^{n-1}. \quad (23)$$

(23) является искомым явным представлением разложения функции $\Delta r = R(\Delta t)$.

Из (22) получаем представления для производных $u^{(n)}$:

$$\begin{aligned} u^{(n)} &= r^{(n+1)} = (n+1)! \cdot c_{n+1} = \\ &= n! u_0^{n+1} \cdot \sum_{\substack{m_1+m_2+\dots+m_{n+1}=n \\ m_i \geq 0}} D_{m_1} D_{m_2} \dots D_{m_{n+1}}, \quad n=0,1,2,\dots \end{aligned} \quad (24)$$

и разложение Тейлора для функции Δu по Δt в окрестности точки $t = t_0$

$$\Delta u = \Delta t \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_0^{n+1} \cdot \sum_{\substack{m_1+m_2+\dots+m_{n+1}=n \\ m_i \geq 0}} D_{m_1} D_{m_2} \dots D_{m_{n+1}} \right) \Delta t^{n-1}.$$

Далее для начальных значений используются безиндексные обозначения r и u .

Тейлоровские разложения разностного решения системы (10)–(12). Сначала найдем явные выражения для коэффициентов $c_{j,n}$ разложений

$$\Delta \xi_j = \xi_j(t + \Delta t) - r(t) = \sum_{n \geq 1} c_{j,n} \Delta t^n, \quad j=1,2,\dots,m. \quad (25)$$

Согласно (12)

$$\begin{aligned} \Delta \xi_j &= \Delta t \alpha_j u + \Delta t^2 \sum_{l=1}^{j-1} a_{jl} \psi(\Delta \xi_l), \quad j=1,2,3,\dots,m, \\ \psi(\Delta \xi_l) &\equiv \varphi(\xi_l) \equiv \varphi(r + \Delta \xi_l). \end{aligned} \quad (26)$$

В силу произвольности функции φ считаем, что $\psi(\Delta \xi_l)|_{\Delta \xi_l=0} = \varphi(r) \neq 0$.

Перепишем равенство (26) в следующем виде:

$$\Psi_j \Delta t^2 + \alpha_j u \cdot \Delta t - \Delta \xi_j = 0, \quad j=1,2,3,\dots,m,$$

$$\Psi_j \equiv \Psi_j(\Delta \xi) \equiv \sum_{l=1}^{j-1} a_{jl} \psi(\Delta \xi_l),$$

$$\Delta\xi = (\Delta\xi_1, \Delta\xi_2, \dots, \Delta\xi_m), \quad \Psi_j(\Delta\xi)\big|_{\Delta\xi=0} \neq 0. \quad (27)$$

В данном контексте a_{jl} являются формальными переменными (параметрами), следовательно, $\Psi_j(\Delta\xi)\big|_{\Delta\xi=0} \neq 0$ и для каждого $j=1,2,3,\dots,m$ из

уравнения (27) находим $\Delta t = \frac{-\alpha_j u \pm \sqrt{(\alpha_j u)^2 + 4\Psi_j \Delta\xi_j}}{2\Psi_j}$. Чтобы исключить

отрицательные значения Δt , перед радикалом оставим знак «+», тогда

$$\Delta t = \frac{2\Delta\xi_j}{\alpha_j u + \sqrt{(\alpha_j u)^2 + 4\Psi_j \Delta\xi_j}}. \quad \alpha_j \text{ параметры и, согласно предположению}$$

$u > 0$, Значит, без ограничения общности можно считать, что $\alpha_j u > 0$. Поэтому, полагая в последнем равенстве $\Delta t = \Delta t_j$, получаем

$$\Delta\xi_j = \Delta t_j \Phi_j(\Delta\xi), \quad \Phi_j(\Delta\xi) = \frac{\alpha_j u}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\Psi_j \Delta\xi_j}{(\alpha_j u)^2}} \right),$$

$$\Phi_j(\Delta\xi)\big|_{\Delta\xi=0} \neq 0, \quad j=1,2,3,\dots,m. \quad (28)$$

К системе (28) применима «многомерная теорема Лагранжа» о решении систем функциональных уравнений [13]. Согласно этой теореме из (28) получаем следующее представление для вектора $\Delta\xi$ как функции независимых переменных Δt_j , $j=1,2,\dots,m$:

$$\Delta\xi = \sum_{k>0} c_k (\Delta t)^k, \quad c_k = [\lambda^k] \left\{ \lambda \Phi^k(\lambda) \det \left\| \delta_{ij} - \frac{\lambda_j}{\Phi_i(\lambda)} \frac{\partial \Phi_i(\lambda)}{\partial \lambda_j} \right\| \right\}, \quad (29)$$

где

$$k = (k_1, k_2, \dots, k_m), \quad c_k = c_{k_1, k_2, \dots, k_m},$$

$$c_{k_1, k_2, \dots, k_m} = (c_{k_1, k_2, \dots, k_m}^{(1)}, c_{k_1, k_2, \dots, k_m}^{(2)}, \dots, c_{k_1, k_2, \dots, k_m}^{(m)}),$$

$$\Delta t = (\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_m), \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \quad \Phi(\lambda) = (\Phi_1(\lambda), \Phi_2(\lambda), \dots, \Phi_m(\lambda)),$$

$$(\Delta t)^k = (\Delta t_1)^{k_1} (\Delta t_2)^{k_2} \dots (\Delta t_m)^{k_m}, \quad \lambda^k = (\lambda_1)^{k_1} (\lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda_m)^{k_m},$$

$$\Phi^k(\lambda) = (\Phi_1(\lambda))^{k_1} (\Phi_2(\lambda))^{k_2} \dots (\Phi_m(\lambda))^{k_m},$$

δ_{ij} – символ Кронекера; $[\lambda^k]$ – коэффициентный оператор, определенный на кольце $R[[\lambda]]$ формальных степенных рядов от переменных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, $[\lambda^k]: R[[\lambda]] \rightarrow R$, для степенного ряда $f(\lambda) = \sum_{i \geq 0} c_i \lambda^i \in R[[\lambda]]$,

$i = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ значение $[\lambda^k](f(\lambda)) = c_k$.

Из формулы (29) находим представления компонент $\Delta\xi_j$ вектора $\Delta\xi$ в виде рядов по степеням переменных Δt_i , $i = 1, 2, 3, \dots, m$:

$$\Delta\xi_j = \sum_{k>\bar{0}} c_k^{(j)} (\Delta t)^k = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_m) > \bar{0}} c_{k_1, k_2, \dots, k_m}^{(j)} (\Delta t_1)^{k_1} (\Delta t_2)^{k_2} \dots (\Delta t_m)^{k_m}. \quad (30)$$

Полагая в (29) и (30) $\Delta t_j = \Delta t$, $j = 1, 2, 3, \dots, m$, получаем искомые ряды по степеням переменной Δt для $\Delta\xi$ и $\Delta\xi_j$:

$$\begin{aligned} \Delta\xi &= \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_m) > \bar{0}} c_{k_1, k_2, \dots, k_m} \Delta t^{k_1 + k_2 + \dots + k_m} = \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} c_{k_1, k_2, \dots, k_m} \right) \Delta t^n, \\ \Delta\xi_j &= \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_m) > \bar{0}} c_{k_1, k_2, \dots, k_m}^{(j)} \Delta t^{k_1 + k_2 + \dots + k_m} = \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} c_{k_1, k_2, \dots, k_m}^{(j)} \right) \Delta t^n. \end{aligned} \quad (31)$$

Согласно (25) и (31)

$$\begin{aligned} c_{j,n} &= \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} c_{k_1, k_2, \dots, k_m}^{(j)} = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} \left[(\lambda_1)^{k_1} (\lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda_m)^{k_m} \right] \times \\ &\times \left\{ \lambda_j (\Phi_1(\lambda))^{k_1} \dots (\Phi_m(\lambda))^{k_m} \det \left\| \delta_{ij} - \frac{\lambda_j}{\Phi_i(\lambda)} \frac{\partial \Phi_i(\lambda)}{\partial \lambda_j} \right\| \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Полученное выражение для $c_{j,n}$ можно представить в явном виде:

$$\begin{aligned} c_{j,n} &= \frac{1}{2^m} \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_m!} \frac{\partial^{k_1}}{\partial \lambda_1^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial \lambda_2^{k_2}} \dots \frac{\partial^{k_m}}{\partial \lambda_m^{k_m}} \times \\ &\times \left\{ \Pi_{k_1}(\lambda) \Pi_{k_2}(\lambda) \dots \lambda_j \Pi_{k_j}(\lambda) \dots \Pi_{k_m}(\lambda) \right\} \Big|_{\substack{\lambda_i=0, \\ i=1, 2, \dots, m}}, \\ \Pi_{k_i}(\lambda) &\equiv f_i(\lambda) (\Phi_i(\lambda))^{k_i}, \quad f_i(\lambda) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - 4\eta_i}}, \quad \eta_i = -\frac{\Psi_i \lambda_i}{(\alpha_i u)^2}. \end{aligned}$$

Теперь можно найти разложения в ряды по Δt функций $\varphi(\xi_j)$:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi_j) &= \varphi(r + \Delta\xi_j) = \sum_{q \geq 0} \frac{\varphi^{(q)}(r)}{q!} (\Delta\xi_j)^q = \sum_{q \geq 0} \frac{\varphi^{(q)}}{q!} \left(\sum_{n \geq 1} c_{j,n} \Delta t^n \right)^q = \\ &= \sum_{n \geq q} \left(\sum_{q \geq 0} \left(\frac{\varphi^{(q)}}{q!} \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_q = n} c_{j,n_1} c_{j,n_2} \dots c_{j,n_q} \right) \right) \Delta t^n, \end{aligned} \quad (33)$$

а после этого и разложения (10), (11) решений r^{n+1} и r^{n+1} , но они в явном виде здесь не используются.

Из (33) получаем следующие представления для производных:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\Delta t}^{(\nu)}(\xi_j) &= \frac{d^\nu \varphi(\xi_j)}{d(\Delta t)^\nu} \Big|_{\Delta t=0} = \\
&= \sum_{n \geq \nu} \frac{n!}{(n-\nu)!} \left(\sum_{q \geq 0} \left(\frac{\varphi^{(q)}}{q!} \sum_{n_1+n_2+\dots+n_q=n} c_{j,n_1} c_{j,n_2} \dots c_{j,n_q} \right) \right) \Delta t^{n-\nu} \Big|_{\Delta t=0}, \\
\varphi_{\Delta t}^{(\nu)}(\xi_j) &= \frac{d^\nu \varphi(\xi_j)}{d(\Delta t)^\nu} \Big|_{\Delta t=0} = \nu! \sum_{q \geq 0} \left(\frac{\varphi^{(q)}}{q!} \sum_{n_1+n_2+\dots+n_q=\nu} c_{j,n_1} c_{j,n_2} \dots c_{j,n_q} \right), \quad \nu \geq 0. \quad (34)
\end{aligned}$$

Условия p -го порядка для m -стадийных симплектических схем RKN. Как уже отмечалось выше, для скалярных дифференциальных уравнений (9) m -стадийная разностная схема RKN (5) при выполнении условий (6)–(8) принимает вид (10)–(12). Для вывода условий порядка для разностной схемы (10)–(12), прежде всего, необходимо остаточные члены этой схемы разложить в ряды по степеням временного шага:

$$F_r(t + \Delta t) = r(t + \Delta t) - r(t) - \Delta t u(t) - \Delta t^2 \sum_{j=1}^m \gamma_j (1 - \alpha_j) \varphi(\xi_j) = \sum_{k \geq 2} \frac{F_r^{(k)} \Delta t^k}{k!}, \quad (35)$$

$$F_u(t + \Delta t) = u(t + \Delta t) - u(t) - \Delta t \sum_{j=1}^m \gamma_j \varphi(\xi_j) = \sum_{k \geq 1} \frac{F_u^{(k)} \Delta t^k}{k!}, \quad (36)$$

Для производных по Δt имеем следующие формулы:

$$F_r^{(k)}(\Delta t = 0) = r^{(k)} - k(k-1) \sum_{j=1}^m \gamma_j (1 - \alpha_j) \varphi_{\Delta t}^{(k-2)}(\xi_j), \quad k = 2, 3, \dots, p, \quad (37)$$

$$F_u^{(k)}(\Delta t = 0) = u^{(k)} - k \sum_{j=1}^m \gamma_j \varphi_{\Delta t}^{(k-1)}(\xi_j), \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad (38)$$

p -й порядок аппроксимации разностной схемы достигается при обращении в нуль соответствующих коэффициентов (37) и (38) степенных разложений (35) и (36):

$$F_r^{(k)}(\Delta t = 0) = 0, \quad k = 2, 3, \dots, p, \quad F_u^{(k)}(\Delta t = 0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Полагая $\nu = k - 2$ и $\nu = k - 1$ в (34), находим

$$\begin{aligned}
\varphi_{\Delta t}^{(k-2)}(\xi_j) &= (k-2)! \left(\sum_{q \geq 0} \left(\frac{\varphi^{(q)}}{q!} \sum_{n_1+n_2+\dots+n_q=k-2} c_{j,n_1} c_{j,n_2} \dots c_{j,n_q} \right) \right), \\
\varphi_{\Delta t}^{(k-1)}(\xi_j) &= (k-1)! \left(\sum_{q \geq 0} \left(\frac{\varphi^{(q)}}{q!} \sum_{n_1+n_2+\dots+n_q=k-1} c_{j,n_1} c_{j,n_2} \dots c_{j,n_q} \right) \right).
\end{aligned}$$

После этого согласно (37) и (38) получаем условия порядка в следующем виде:

$$F_r^{(k)}(\Delta t = 0) = r^{(k)} - k! \sum_{j=1}^m \gamma_j (1 - \alpha_j) \left(\sum_{q \geq 0} \left(\frac{\varphi^{(q)}}{q!} \sum_{n_1+n_2+\dots+n_q=k-2} c_{j,n_1} c_{j,n_2} \dots c_{j,n_q} \right) \right) = 0, \\ k = 2, 3, \dots, p, \quad (39)$$

$$F_u^{(k)}(\Delta t = 0) = u^{(k)} - k! \sum_{j=1}^m \gamma_j \left(\sum_{q \geq 0} \left(\frac{\varphi^{(q)}}{q!} \sum_{n_1+n_2+\dots+n_q=k-1} c_{j,n_1} c_{j,n_2} \dots c_{j,n_q} \right) \right) = 0, \\ k = 1, 2, \dots, p. \quad (40)$$

В формулах (39) и (40) $r^{(k)}$ и $u^{(k)}$ определяются соотношениями (22) и (24) соответственно.

Чтобы от (39) и (40) прийти к уравнениям, содержащим только коэффициенты схемы α_j и γ_j , необходимо, в первую очередь, $r^{(k)}$, $u^{(k)}$ и $c_{j,ni}$ выразить через параметры u и r , параметр r входит в $r^{(k)}$, $u^{(k)}$ и $c_{j,ni}$ неявно через $\varphi = \varphi(r)$ и ее производные $\varphi^{(l)}$, $\varphi^{(0)} = u$. В результате уравнения (39) и (40) примут вид

$$F_r^{(k)}(\Delta t = 0) = f_r^{(k)}(r^{(k)}, u^{(k)}, \alpha_j, \gamma_j) = \\ = p_r^{(k)}(\varphi^{(l)}, \alpha_j, \gamma_j) = \sum_s p_{r,s}^{(k)}(\alpha_j, \gamma_j) \varphi^{(s)} = 0, \\ F_u^{(k)}(\Delta t = 0) = f_u^{(k)}(r^{(k)}, u^{(k)}, \alpha_j, \gamma_j) = \\ = p_u^{(k)}(\varphi^{(l)}, \alpha_j, \gamma_j) = \sum_s p_{u,s}^{(k)}(\alpha_j, \gamma_j) \varphi^{(s)} = 0,$$

$s = (s_1, \dots, s_n)$, $\varphi^{(s)} = \varphi^{(s_1)} \varphi^{(s_2)} \dots \varphi^{(s_n)}$, $p_{r,s}^{(k)}$ и $p_{u,s}^{(k)}$ — полиномы от переменных α_j, γ_j .

Из предыдущих уравнений в силу произвольности функции φ и начальных значений r и u получаем окончательный вид условий порядка, в который входят только коэффициенты α_j и γ_j :

$$p_{r,s}^{(k)}(\alpha_j, \gamma_j) = 0, \quad p_{u,s}^{(k)}(\alpha_j, \gamma_j) = 0.$$

В качестве примеров приведем несколько первых выражений для $r^{(k)}$, $u^{(k)}$, $c_{j,ni}$ и первых условий порядка, полученных согласно изложенному здесь алгоритму:

$$r' = u, \quad r^{(2)} = \varphi, \quad r^{(3)} = \varphi' u, \quad r^{(4)} = \varphi'' u^2 + \varphi' \varphi,$$

$$\begin{aligned}
r^{(5)} &= \varphi''' u^3 + 3\varphi'' \varphi u + (\varphi')^2 u, \\
r^{(6)} &= \varphi^{(4)} u^4 + 6\varphi''' \varphi u^2 + 3\varphi'' \varphi^2 + 5\varphi'' \varphi' u^2 + (\varphi')^2 \varphi, \\
u^{(k)} &= r^{(k+1)}, \\
c_{j,1} &= \alpha_j u, \quad c_{j,2} = \varphi^{(0)} \sum_{l=1}^j a_{jl}, \quad c_{j,3} = u \varphi^{(1)} \sum_{l=1}^j a_{jl} \alpha_l, \\
c_{j,4} &= \sum_{l=1}^j a_{jl} \left(\frac{\varphi^{(2)}}{2} (\alpha_l u)^2 + \varphi^{(1)} \varphi^{(0)} \sum_{p=1}^l a_{lp} \right);
\end{aligned}$$

условие 1-го порядка:

$$1 - \sum_{j=1}^m \gamma_j = 0;$$

условия 2-го порядка:

$$1 - 2 \sum_{j=1}^m \gamma_j (1 - \alpha_j) = 0, \quad 1 - 2 \sum_{j=1}^m \gamma_j \alpha_j = 0; \quad (41)$$

условия 3-го порядка – к условиям 2-го порядка добавляются три уравнения

$$\begin{aligned}
1 - 6 \sum_{j=1}^m \gamma_j (1 - \alpha_j) \alpha_j &= 0, \quad 1 - 3 \sum_{j=1}^m \gamma_j \alpha_j^2 = 0, \\
1 - 6 \sum_{j=1}^m \gamma_j \left(\sum_{l=1}^j \gamma_l (\alpha_j - \alpha_l) \right) &= 0;
\end{aligned} \quad (42)$$

условия 4-го порядка – к системе (41), (42) добавляются пять уравнений:

$$\begin{aligned}
1 - 12 \sum_{j=1}^m \gamma_j (1 - \alpha_j) \alpha_j^2 &= 0, \quad 1 - 4! \sum_{j=1}^m \gamma_j (1 - \alpha_j) \sum_{l=1}^j \gamma_l (\alpha_j - \alpha_l) = 0, \\
1 - 4 \sum_{j=1}^m \gamma_j \alpha_j^3 &= 0, \quad 1 - 8 \sum_{j=1}^m \gamma_j \alpha_j \sum_{l=1}^j \gamma_l (\alpha_j - \alpha_l) = 0, \\
1 - 4! \sum_{j=1}^m \gamma_j \left(\sum_{l=1}^j \gamma_l (\alpha_j - \alpha_l) \alpha_l \right) &= 0;
\end{aligned} \quad (43)$$

условия 5-го порядка – к системе (41)–(43) добавляются восемь уравнений:

$$1 - 20 \sum_{j=1}^m \gamma_j (1 - \alpha_j) \alpha_j^3 = 0, \quad 1 - 40 \sum_{j=1}^m \gamma_j (1 - \alpha_j) \alpha_j \sum_{l=1}^j \gamma_l (\alpha_j - \alpha_l) = 0,$$

$$1 - 5! \sum_{j=1}^m \gamma_j (1 - \alpha_j) \sum_{l=1}^j \gamma_l (\alpha_j - \alpha_l) \alpha_l = 0, \quad (44)$$

$$1 - 5 \sum_{j=1}^m \gamma_j \alpha_j^4 = 0, \quad 1 - 10 \sum_{j=1}^m \gamma_j \alpha_j^2 \sum_{l=1}^j \gamma_l (\alpha_j - \alpha_l) = 0,$$

$$1 - 20 \sum_{j=1}^m \gamma_j \left(\sum_{l=1}^j \gamma_l (\alpha_j - \alpha_l) \right)^2 = 0,$$

$$1 - 4! \sum_{j=1}^m \gamma_j \left(\alpha_j \sum_{l=1}^j \gamma_l (\alpha_j - \alpha_l) \alpha_l + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^j \gamma_l (\alpha_j - \alpha_l) \alpha_l^2 \right) = 0,$$

$$1 - 5! \sum_{j=1}^m \gamma_j \sum_{l=1}^j \gamma_l (\alpha_j - \alpha_l) \sum_{p=1}^l \gamma_p (\alpha_l - \alpha_p) = 0. \quad (45)$$

Следует отметить, что при $k > 2$ между условиями k -го порядка существуют нетривиальные алгебраические зависимости. Например, одно из условий 3-го порядка является следствием четырех других, а из десяти условий 4-го порядка независимыми являются только шесть.

Как уже говорилось во введении, для трехстадийных схем условия 1-го÷5-го порядков были опубликованы и подробно исследованы в [7; 8].

Для классических явных схем Рунге–Кутты число условий порядка для $p \leq 10$ приведено в таблице [10].

Число условий порядка

Порядок p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число условий	1	2	4	8	17	37	85	200	486	1205

Из табл. 1 следует, что конструирование формул Рунге–Кутты высоких порядков – чрезвычайно трудная задача.

Заключение. Предложен и разработан новый метод вывода условий произвольного порядка p для коэффициентов m -стадийных симплектических разностных схем Рунге–Кутты–Нистрема (RKN), предназначенных для численного решения натуральных гамильтоновых систем ОДУ, в частности, для решения задач молекулярной динамики, небесной механики и астрофизики.

Метод основан на предложенных и разработанных автором новых методах разложения в ряды точных решений уравнений движения материальной точки в центральном силовом поле и решений разностных уравнений схем RKN.

В отличие от методов, описанных в литературе, новый метод приводит к явному компактному представлению условий порядка для любых значений параметров m и p . Проблема совместности и нахождения решений этих условий будет рассмотрена в следующих работах.

В силу технической сложности метода для его практической реализации потребуется привлечение систем компьютерной алгебры (Maple, Mathematica).

Библиографические ссылки

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М. : Наука, 1989. 472 с.
2. Сурис Ю. Б. О сохранении симплектической структуры при численном решении гамильтоновых систем // Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : ИПМ. АН СССР. 1988. С. 148–160.
3. Sanz-Serna J. M. Runge–Kutta schemes for Hamiltonian system // BIT. 1988. Vol. 28. P. 877–883.
4. Сурис Ю. Б. О каноничности отображений, порождаемых методами типа Рунге–Кутты при интегрировании систем $x'' = -\partial U / \partial x$ // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 2. С. 202–211.
5. Verlet L. Computer «experiments» on classical fluids. Thermodynamical properties of Lennard–Jones molecules // Phys. Rev. 1967. Vol. 159, No. 1. P. 98–103.
6. Omelyan I. P., Mryglod I. M., Folk R. Symplectic analytically integrable decomposition algorithms: classification, derivation and application to molecular dynamics, quantum and celestial mechanics simulations // Computer Physics Communications. 2003. Vol. 151. P. 272–314.
7. Shemarulin V. E., Sofronov V. N. Three-stage symplectic difference schemes for molecular dynamics. Description, classification, analytical and numerical investigation // Proc. of the 10th International Conference on New Models and Hydrocodes for Shock Processes in Condensed Matter. Pardubice, Czech Republic, 27 July – 01 August, 2014.
8. Софронов В. Н., Шемарулин В. Е. Классификация явных трехстадийных симплектических разностных схем численного решения натуральных гамильтоновых систем. Сравнительное исследование точности схем высокого порядка на задачах молекулярной динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56, № 4. С. 551–571 (English Translation: Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2016. Vol. 56, No. 4. P. 541–560).
9. Sofronov V. N., Shemarulin V. E., Vetchinnikov M. V. High-Order Symplectic Difference Schemes for Numerical Solution of Natural Hamiltonian Systems. Applications to Molecular Dynamics and Continuum Mechanics Problems // Horizons in World Physics, vol. 301. Editor: Albert Reimer. Nova Science Publishers, Inc., New York, USA. 2019. Chapter 1. P. 1–78.

10. Хайпер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М. : Мир, 1990. 512 с.
11. Еленин Г. Г., Шляхов П. И. Геометрическая структура пространства параметров трехстадийных симплектических методов Рунге–Кутты // Матем. моделирование. 2011. Т. 23, № 5. С. 16–34.
12. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 2. 8-е изд. М. : Физматлит, 2003. 864 с.
13. Гульден Я., Джексон Д. Перечислительная комбинаторика : пер. с англ. / под ред. В. Е. Тараканова. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 504 с.

References

1. Arnol'd V. I., Mathematical Methods of Classical Mechanics. Nauka Publ., Moscow, 1989. 472 p. (Springer, New York, 1989).
2. Suris Yu. B. On the conservation of the symplectic structure in the numerical solution of Hamiltonian systems // Numerical Solution of Ordinary Differential Equations. Institut Prikladnoi Matematiki, Ross. Akad. Nauk. Moscow, 1988. P. 148–160.
3. Sanz-Serna J. M. Runge–Kutta schemes for Hamiltonian system // BIT. 1988. V. 28. P. 877–883.
4. Suris Yu. B. On the canonicity of maps generated by Runge–Kutts type methods in the integration of systems $x'' = -\partial U / \partial x$ // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1989. Vol. 29, No. 2. P. 202–211.
5. Verlet L. Computer «experiments» on classical fluids. Thermodynamical properties of Lennard–Jones molecules // Phys. Rev. 1967. Vol. 159, No. 1. P. 98–103.
6. Omelyan I. P., Mryglod I. M., Folk R. Symplectic analytically integrable decomposition algorithms: classification, derivation and application to molecular dynamics, quantum and celestial mechanics simulations // Computer Physics Communications. 2003. Vol. 151. P. 272–314.
7. Shemarulin V. E., Sofronov V. N. Three-stage symplectic difference schemes for molecular dynamics. Description, classification, analytical and numerical investigation // Proc. of the 10th International Conference on New Models and Hydrocodes for Shock Processes in Condensed Matter. Pardubice, Czech Republic, 27 July – 01 August, 2014.
8. Sofronov V. N., Shemarulin V. E. Classification of explicit three-stage symplectic difference schemes for the numerical solution of natural Hamiltonian systems: a comparative study of the accuracy of high–order schemes on molecular dynamics problem // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2016. Vol. 56, No. 4. P. 541–560.
9. Sofronov V. N., Shemarulin V. E., Vetchinnikov M. V. High-Order Symplectic Difference Schemes for Numerical Solution of Natural Hamiltonian Systems. Applications to Molecular Dynamics and Continuum Mechanics

Problems // Horizons in World Physics, Vol. 301. Editor: Albert Reimer. Nova Science Publishers, Inc., New York, USA. 2019. Chapter 1. P. 1–78.

10. Hairer E., Norsett S., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations. Nonstiff Problems. Mir, Moscow, 1990. 512 p. (Springer, Berlin. 1987–1991).

11. Elenin G. G., Shlyakhov P. I. The geometric structure of the parameter space of the three stage symplectic Runge–Kutta methods // Math. Models Comput. Simul. 2011. Vol. 23, No. 5. P. 16–34.

12. Fichtenholz G. M. The Course of Differential and Integral Calculus. In 3 volumes. Vol. 2. 8th edition. Fizmatlit, Moscow, 2003. 864 p.

13. Goulden I., Jackson D. Combinatorial Enumeration. Translated from English. Ed. V. E. Tarakanov. Nauka, Main Office for Physics and Mathematics Literature, Moscow, 1990. 504 p.

© Шемарулин В. Е., 2022

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ПРОЦЕССА ОБТЯЖКИ ЛИСТОВЫХ ДЕТАЛЕЙ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ НА ОБТЯЖНОМ ПРЕССЕ FET С ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ*

А. А. Буренин¹, А. А. Кривенко^{2*}

¹Хабаровский Федеральный исследовательский центр ДВО РАН
Российская Федерация, 680000, г. Хабаровск, ул. Тургенева, 51

²Филиал ПАО «ОАК» – КнААЗ им. Ю. А. Гагарина
Российская Федерация, 681018, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Советская, 1
*E-mail: baikal-190@yandex.ru

В работе описывается проблематика расчета управляющих программ для обтяжного пресса FET с параллельной кинематической структурой, который используется для формообразования листовых деталей летательных аппаратов сложной формы.

Ключевые слова: формообразование обтяжкой, пресс обтяжной, FET, параллельная кинематика, прямая и обратная задачи кинематики.

PECULIARITIES OF CALCULATION OF THE STRETCHING PROCESS OF COMPLEX GEOMETRIC SHEET PARTS ON THE FET STRETCHING PRESS WITH PARALLEL KINEMATICS STRUCTURE

А. А. Burenin¹, А. А. Krivenok^{2*}

¹Khabarovsk Federal Research Centre of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences

51, Turgeneva str., Khabarovsk, 680000, Russian Federation

²Branch of PJSC UAC – KoAAP named after Yury Gagarin
1, Sovetskaya str., Komsomolsk-on-Amur, 681018, Russian Federation
*E-mail: baikal-190@yandex.ru

This paper describes the problematic of calculating control programs for the FET stretching press with a parallel kinematic structure, which is used for forming sheet metal parts of aircraft with a complex geometric shape.

Keywords: stretch forming, stretching press, FET, parallel kinematics, forward and inverse kinematics problems.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Russian Science Foundation (грант № 21-11-00165).

Введение. Повышение функциональных качеств планеров современных летательных аппаратов неразрывно связано с ужесточением требований к их аэродинамическим формам при одновременном повышении прочностных свойств элементов их конструкций. Соответствия предъявляемым требованиям в процессе производства добиваются главным образом [1], за счёт необратимого деформирования неразъёмных, крупногабаритных заготовок с помощью технологических операций формовки и обтяжки. В расчётах необратимого деформирования при формовке тонкостенных элементов конструкции, несмотря на значительные перемещения и повороты в заготовке, приемлемыми остаются методы теории малых деформаций [2]. В технологической операции обтяжки эти методы оказываются неприменимыми. Заготовка не является тонкостенной, срединную её поверхность нельзя полагать нерастяжимой. Следовательно, все расчёты необходимо проводить в рамках теории больших деформаций [3; 4], что значительно их усложняет. До настоящего времени для этого имеем только фундаментальные предпосылки [4; 5]. Процесс производства больших деформаций в рамках операций обтяжки заготовки, одновременно за счёт вязких свойств материала (ползучесть) и его пластических свойств (течение), предметно не изучался. Результаты математического моделирования данного процесса существенно помогли бы в создании управляющих программ (УП) и выбора режимов работы обтяжного оборудования.

В производстве летательных аппаратов, для выполнения процесса обтяжки заготовок, широко применяются специализированные обтяжные прессы имеющие различные кинематические схемы. Большой интерес вызывает линейка гидравлических прессов поперечной обтяжки типа FET с их параллельной кинематической структурой, которая обеспечивает высокую подвижность зажимных устройств при высоких нагрузках (рис. 1, *a*). Пресс имеет два прямолинейных зажимных устройства, движение которых обеспечивает формообразование заготовки по обтяжному пуансону. Такая конструкция обтяжных прессов и используемая на них система управления обеспечивает получение оболочковых деталей сложной пространственной формы.

Для поиска оптимального режима формообразования применяют комплекс различных программных инструментов, которые нацелены на решение следующих задач [8–10]:

- расчет УП производится с использованием математической модели, описывающей кинематику прессы по заданной стратегии деформирования заготовки;
- проверка рассчитанной траектории движения рабочих органов прессы производится по кинематической модели в CAD системе, где проверяется возможность коллизий элементов прессы и технологической оснастки;
- анализ процесса деформирования заготовки производится в CAE системе, где определяется напряженно-деформированное состояние материала заготовки при её контакте с пуансоном и зажимными устройствами прессы.

При формообразовании деталей с одинарной кривизной и симметрией в направлении обтяжки, кинематику пресса описывают в виде плоского механизма [6; 7]. При обтяжке заготовки двойной кривизны по несимметричному пуансону необходимо учитывать особенности параллельной кинематикой обтяжного оборудования. На рис. 2 приведена схема смещения узлов зажимного устройства по оси Y при его поворотах по осям Z и X .

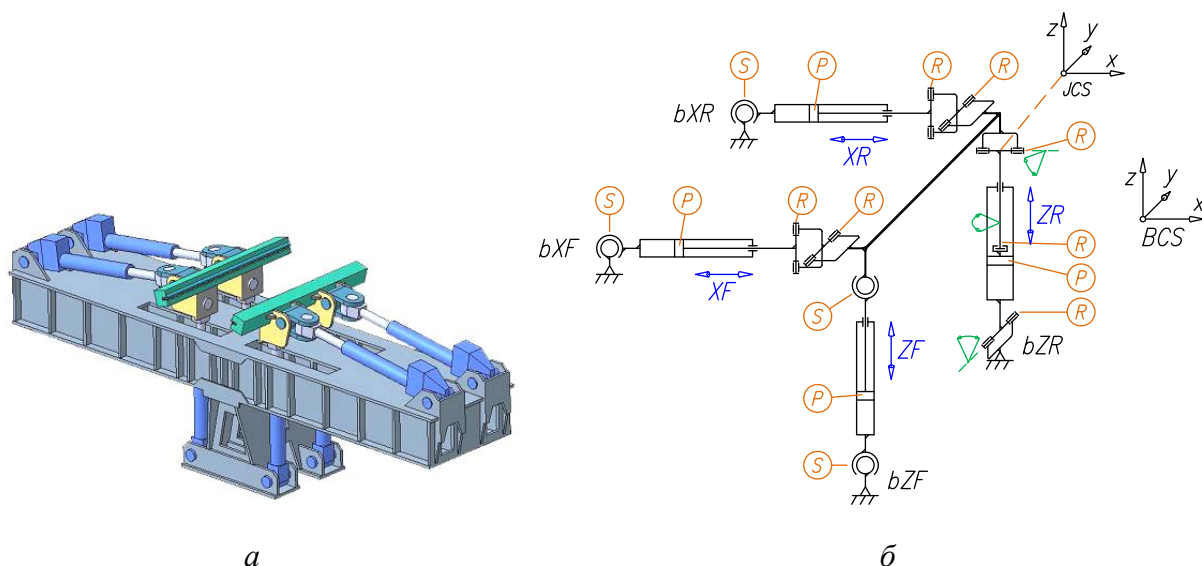


Рис. 1. Обтяжной пресс поперечного действия типа FET (а) и кинематическая схема его зажимного устройства (б)

Fig. 1. Cross-stretching press FET type (a) and kinematic scheme of this jaw device (b)

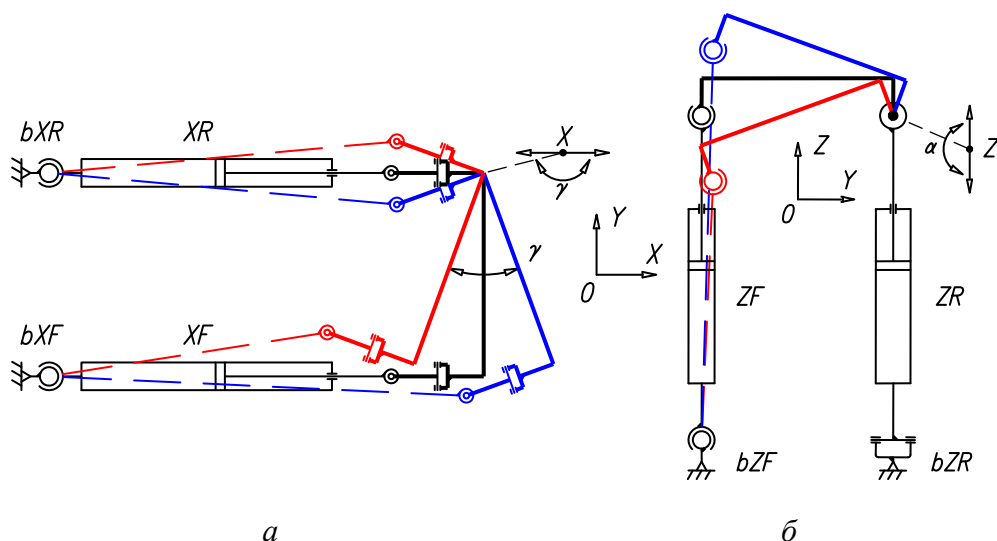


Рис. 2. Смещение узлов зажимного устройства по оси Y при его поворотах по осям Z и X :

a – вид сверху (поворот по оси Z); b – вид справа (поворот по оси X)

Fig. 2. Displacement of the jaw nodes along the Y axis when it is rotation around the Z and X axes: a – top view (rotation around the Z axis); b – right view (rotation around the X axis)

Смещение зажатой заготовки по оси Y относительно исходного положения может приводить, с одной стороны, к прослаблению заготовки, с другой – к перенатягу, при этом заготовка может сползать с обтяжного пуансона, на заготовке могут образоваться гофры или произойти её разрыв [11].

С целью обеспечения возможности расчета УП для формования несимметричных деталей сложной пространственной формы, имеющих двойную кривизну, проведен кинематический анализ механизмов параллельной структуры обтяжного пресса FET и разработана математическая модель, описывающая его кинематику.

Конструкция обтяжного пресса FET. Компоновка зажимного устройства пресса FET (рис. 1, б) построена по типу пространственного механизма с замкнутой кинематической цепью [12]. Перемещение узла зажимного устройства по двум линейным осям (x, z) и двум поворотным (α, γ) осуществляется путем согласованного изменения длин 4-х гидроцилиндров (XF, ZF, XR, ZR) (рис. 3). Для изменения длины цилиндров применены гидроприводы с системой прецизионной гидравлики. Угол β зависит от координат (x, z) позиции начала системы координат зажимного устройства. При управлении механизмом параллельной структуры необходимо решать прямую и обратную задачи кинематики. Прямая задача кинематики определяет положение исполнительного звена (зажимного устройства пресса) в пространстве при заданном значении обобщённых координат (длина гидроцилиндра), а обратная кинематическая задача определяет значение обобщённых координат при заданном положении зажимного устройства в пространстве.

Решение обратной задачи кинематики зажимного устройства пресса FET. В качестве начала системы координат зажимного устройства (JCS) принят шарнир M (рис. 3), который перемещается в плоскости вращения цилиндра ZR и зависит от следующих параметров $[x, z, \alpha, \gamma]$, где:

x и z – координаты шарнира M в базовой системе координат (СК) стола пресса (BCS);

α и γ – углы поворота зажимного устройства вокруг шарнира M .

За обобщенные координаты приняты длины поступательных пар – гидроцилиндров $Q = [XR, XF, ZR, ZF]^T$.

Для определения вектора длин гидроцилиндров Q для заданного положения зажимного устройства шарнира M и его углов поворота необходимо определить положение всех шарниров зажимного устройства в СК BCS. Для этого необходимо произвести перенос координат шарниров P зажимного устройства из СК JCS в СК BCS с последующим поворотом на углы $[\alpha, \beta, \gamma]$ вокруг шарнира M .

При разработке математической модели пресса FET предлагается использовать матричный аппарат однородных преобразований, предложенный Ж. Денавитом и Р. Хартенбергом [13; 14].

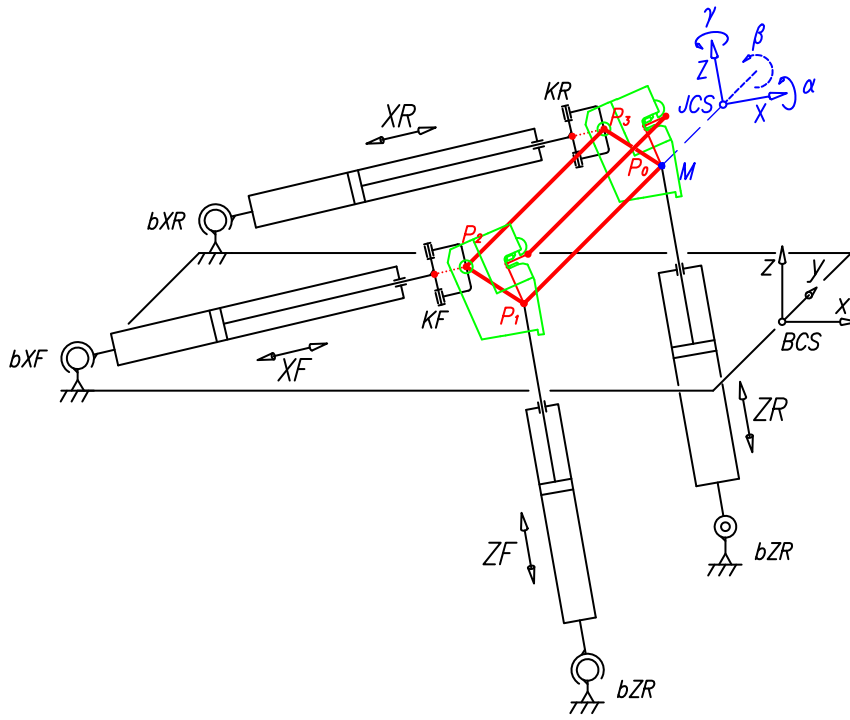


Рис. 3. Схема определения узлов зажимного устройства

Fig. 3. Scheme for defining the press jaw nodes

Координаты шарниров зажимного устройства в СК стола прессы BCS можно определить по следующей формуле:

$$P' = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot T, \quad (1)$$

где P – матрица с набором координат шарниров зажимного устройства в СК зажимного устройства (JCS):

$$P = \begin{pmatrix} P0_x & P0_y & P0_z & 1 \\ P1_x & P1_y & P1_z & 1 \\ P2_x & P2_y & P2_z & 1 \\ P3_x & P3_y & P3_z & 1 \end{pmatrix},$$

T – матрица переноса начала зажимного устройства СК JCS в СК BCS:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ M_x & M_y & M_z & 1 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{M}$ – координаты шарнира в BCS соответствующего началу JCS, которые задаются на основе требуемого положения зажимного устройства (x, z) в плоскости вращения гидроцилиндра ZR вокруг шарнира bZR :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} x & bZR_y & z \end{pmatrix}^T.$$

Углы α и γ задаются в зависимости от требуемого положения зажимного устройства, угол β зависит от положения шарнира $\mathbf{M}$ и определяется по следующей формуле:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{M_x - bZR_x}{ZR}\right),$$

где ZR – длина гидроцилиндра, которая определяется расстоянием между координатами шарниров стола пресса bZR и зажимного устройства $\mathbf{M}$ в BCS. Аналогично определяется длина гидроцилиндра ZF – расстояние между шарнирами bZF и $P1'$ в СК BCS:

$$ZR = \sqrt{\sum_{i=0}^2 (bZR_i - M_i)^2} \quad \text{и} \quad ZF = \sqrt{\sum_{i=0}^2 (bZF_i - P1'_i)^2}. \quad (2)$$

Для определения длины гидроцилиндров XR и XF необходимо определить координаты шарниров промежуточных звеньев KR и KF (рис. 4):

$$KR = P3' + \frac{LR}{|LR|} \cdot Lv \quad \text{и} \quad KF = P2' + \frac{LF}{|LF|} \cdot Lv, \quad (3)$$

где $P2'$ и $P3'$ – координаты шарниров закрепления промежуточных звеньев к зажимному устройству в СК BCS; Lv – длина звена определяется как расстояние между шарнирами промежуточного звена.

Векторы LR и LF являются проекцией векторов BR и BF на плоскость с нормалью CS , соответствующей оси вращения промежуточных звеньев в шарнирах $P3'$ и $P2'$. Один из способов определения векторов LR и LF имеет следующий вид:

$$LR = \frac{CS \times \frac{BR \times CS}{|CS|}}{|CS|} \quad \text{и} \quad LF = \frac{CS \times \frac{BF \times CS}{|CS|}}{|CS|},$$

где BR и BF – векторы от шарниров зажимного устройства $P3'$ и $P2'$ к шарнирам закрепления горизонтальных гидроцилиндров bXR и bXF , определяются следующим образом:

$$BR = bXR - P3', \quad BF = bXF - P2', \quad CS = P3' - P2'.$$

Тогда длина гидроцилиндров XF и XR определяется расстоянием между координатами шарниров стола пресса bXF , bXR и промежуточных звеньев KF , KR в BCS

$$XF = \sqrt{\sum_{i=0}^2 (bXF_i - KF_i)^2} \text{ и } XR = \sqrt{\sum_{i=0}^2 (bXR_i - KR_i)^2}. \quad (4)$$

Таким образом, в уравнениях (1)–(4) получены кинематические зависимости, определяющие обобщенные координаты $\mathbf{Q}$ по заданной позиции зажимного устройства $\mathbf{M} = [x, z, \alpha, \gamma]^T$.

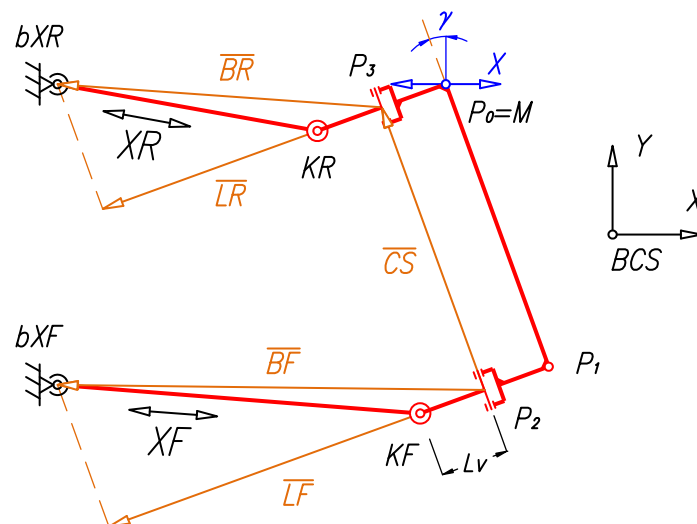


Рис. 4. Схема определения шарниров промежуточных звеньев

Fig. 4. Scheme for defining the intermediate link joints

Решение прямой задачи кинематики зажимного устройства пресса ФЕТ. Определить положения зажимного устройства $\mathbf{M} = [x, z, \alpha, \gamma]^T$ по обобщенным координатам длины гидроцилиндров $\mathbf{Q} = [XR, XF, ZR, ZF]^T$ можно при решении прямой задачи кинематики [14] в виде:

$$\mathbf{M} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{Q}, \quad (5)$$

где $\mathbf{J}$ – прямая матрица Якоби, которая имеет вид:

$$J_{i,j} = \frac{\partial f_i(\mathbf{Q})}{\partial Q_j}, \quad i = 0, \dots, 3, \quad j = 0, \dots, 3.$$

В связи с тем, что в данной постановке задачи определить частные производные функции $f(\mathbf{Q})$ затруднительно, поэтому решение прямой задачи можно реализовать итерационным методом Ньютона, который состоит из следующих этапов:

- 1) задается начальное положение $\mathbf{M}^{[k]}$, где $k = 0$ – номер итерации;
- 2) определяется вектор обобщенных координат $\mathbf{q}^{[k]} = F(\mathbf{M}^{[k]})$. Функция $F(\mathbf{M})$ является решением обратной задачи кинематики преобразования JCS в BCS представленным в уравнениях (1)–(4);

3) определяются отклонения $\Delta \mathbf{q}^{[k]} = \mathbf{Q} - \mathbf{q}^{[k]}$ текущих обобщенных координат $\mathbf{q}^{[k]}$ от заданных $\mathbf{Q}$;

4) определяются отклонения положения зажимного устройства $\Delta \mathbf{M}^{[k]}$. Для этого необходимо определить матрицу Якоби для решения обратной задачи кинематики по уравнению (5)

$$\mathbf{q} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{M} \text{ или } \mathbf{q} = \mathbf{Jr} \cdot \mathbf{M}.$$

Для текущей позиции $\mathbf{M}^{[k]}$ элементы матрицы $\mathbf{Jr}^{[k]}$ определяются методом численного дифференцирования и имеют вид

$$Jr_{i,j}^{[k]} = \frac{\partial F_i(\mathbf{M}^{[k]})}{\partial M_j} = \frac{F_i(\mathbf{M}^{[k]} + \Delta \mathbf{M}_j) - F_i(\mathbf{M}^{[k]})}{\Delta M_j};$$

$$\mathbf{Jr} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{XR}(x, z, \alpha, \gamma)}{\partial x} & \frac{\partial F_{XR}(x, z, \alpha, \gamma)}{\partial z} & \frac{\partial F_{XR}(x, z, \alpha, \gamma)}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_{XR}(x, z, \alpha, \gamma)}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_{XF}(x, z, \alpha, \gamma)}{\partial x} & \frac{\partial F_{XF}(x, z, \alpha, \gamma)}{\partial z} & \frac{\partial F_{XF}(x, z, \alpha, \gamma)}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_{XF}(x, z, \alpha, \gamma)}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_{ZR}(x, z, \alpha, \gamma)}{\partial x} & \frac{\partial F_{ZR}(x, z, \alpha, \gamma)}{\partial z} & \frac{\partial F_{ZR}(x, z, \alpha, \gamma)}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_{ZR}(x, z, \alpha, \gamma)}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_{ZF}(x, z, \alpha, \gamma)}{\partial x} & \frac{\partial F_{ZF}(x, z, \alpha, \gamma)}{\partial z} & \frac{\partial F_{ZF}(x, z, \alpha, \gamma)}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_{ZF}(x, z, \alpha, \gamma)}{\partial \gamma} \end{pmatrix}.$$

Тогда отклонения положения зажимного устройства $\Delta \mathbf{M}^{[k]}$ имеет вид

$$\Delta \mathbf{M}^{[k]} = \mathbf{Jr}^{-1[k]} \cdot \Delta \mathbf{q}^{[k]};$$

5) если отклонение текущих обобщенных координат больше допустимой погрешности $|\Delta \mathbf{q}^{[k]}| > \varepsilon_i$, то определяется текущее положение $\mathbf{M}^{[k+1]} = \mathbf{M}^{[k]} + \Delta \mathbf{M}^{[k]}$, $k = k + 1$, и переходим к шагу 2 для определения вектора обобщенных координат $\mathbf{q}^{[k]}$ для новой позиции $\mathbf{M}^{[k]}$.

Данный подход позволяет с заданной точностью ε определить позицию зажимного устройства $\mathbf{M}$ по заданным длинам гидроцилиндров $\mathbf{Q}$.

Заключение. На основе полученных кинематических зависимостей для определения положения рабочих органов обтяжного пресса FET и разработанных решений прямой и обратной задач кинематики разработана программа для ПЭВМ с реализованной математической моделью системы управления зажимами пресса. Программа позволяет визуализировать этапы работы обтяжного пресса FET по УП, производить редактирование УП изменяя положение зажима или параметры гидроцилиндров. Разработанная программа также позволяет создавать УП по заданной траектории движения зажимов пресса, в которой могут быть заложены различные схемы деформирования листовой заготовки методом обтяжки.

Библиографические ссылки

1. Олейник А. И., Пекарш А. И. Интегрированное проектирование изготовления монолитных панелей. М. : Эком, 2009. 109 с.
2. Аннин Б. Д., Олейников А. И., Бормотин К. С. Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 // Прикладная механика и техническая физика. 2010. Т. 51, № 4. С. 155–165.
3. Bruhns O.T. Grosse plastische Formänderungen // Mitt. Inst. Mech. / Ruhr-Univ., Bochum. 1991. № 78. С. 1–149.
4. О последовательной сменяемости в механизмах производства больших необратимых деформаций / А. С. Бегун, А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. Н. Прокудин // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 1. С. 106–120. DOI: 10.31857/S003282352006003X.
5. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток : Дальнаука, 2013. 312 с.
6. Моделирование кинематики движения рабочих элементов обтяжного прессы FET / Р. Ф. Крупский, А. А. Кривенок, А. В. Станкевич и др. // Вестник ИрГТУ. Механика и машиностроение. 2014. № 9 (92). С. 40–45.
7. Кинематический метод обеспечения подготовки управляющих программ ЧПУ обтяжных прессов фирмы ACB-ALSTHOM / В. А. Михеев, С. В. Сурудин, И. В. Науменко, Е. В. Назайкинский // Наука, теория, практика авиационно-промышленного кластера современной России. II Всероссийская научно-производственная конференция, приуроченная ко Дню науки (Россия, г. Ульяновск, 8–9 февраля 2017 г.) : сборник научных трудов. Ульяновск : УлГТУ. 2017. С. 35–49.
8. Вепрев А. А., Завьялова В. И. Выбор схемы нагружения и скорости ведения процесса поперечной обтяжки // Авиационная промышленность. 1984. № 12.
9. Формообразование профильных заготовок с помощью листового обтяжного прессы / А. А. Кривенок, А. В. Станкевич, С. И. Феоктистов и др. // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. 2013. № II-1(14). С. 4–8.
10. Сурудин С. В. Сочетание конечно-элементного моделирования и расчета по аналитическим формулам процессов формообразования обтяжкой // Национальная ассоциация ученых (НАУ) : ежемесячный научный журнал. 2015. № 3 (8). Ч. 3. С. 139–141.
11. Михеев В. А. Устойчивость оболочек двойной кривизны в процессе формообразования обтяжкой // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2004. Т. 6. № 2. С. 408–413.
12. Merlet J.-P. Parallel Robots. 2nd ed., Springer Dordrecht, The Netherlands, 2006.
13. Denavit J., Hartenberg R.S. Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices, J. Appl. Mech., 77, p. 215–221. 1955.

14. Sommese A. J. Numerical Solutions of Polynomial Systems Arising in Engineering and Science [Text] / Andrew J. Sommese, Charles W. Wampler, II – Singapoure: World Scientific, 2005. 401+XXII p. ISBN 981-256-184-6.

References

1. Oleinik A. I., Pekarsh A. I. *Integrirovannoye proyektirovaniye izgotovleniya monolitnykh paneley* [Integrated design of monolithic panel fabrication]. Moscow : Ecom. 2009. 109 p.

2. Annin B. D., Oleynikov A. I., Bormotin K. S. *Modelirovaniye protsessov formoobrazovaniya paneley kryla samoleta SSJ-100* [Modelling of wing panel forming processes of SSJ-100 aircraft] // Applied Mechanics and Technical Physics. 2010. T. 51, № 4. P. 155–165.

3. Bruhns O. T. Grosse plastische Formänderungen // Mitt. Inst. Mech. / Ruhr-Univ., Bochum. 1991. № 78. P. 1–149.

4. Begun A. S., Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Prokudin A. N. [On Consistent Shiftability in Mechanisms of Large Irreversible Deformation Production]. *PMM*. 2021. T. 85. Vol. 1. P. 106–120. DOI: 10.31857/S003282352006003X.

5. Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. *Bol'shiye neobratimyye deformatsii i uprugoye posledeystviye* [Large irreversible deformations and elastic aftereffects]. Vladivostok : Dalnauka, 2013. 312 p.

6. Krupsky R. F., Krivenok A. A., Stankevich A. V. [Modeling of kinetics of motion of working elements of FET embossing press]. (In Russ.) *MPEI Vestnik. Mechanics and Mechanical Engineering*. 2014. № 9 (92). P. 40–45.

7. Mikheev V. A., Surudin S. V., Naumenko I. V., Nazaikinsky E. V. [Kinematic method for ensuring preparation of CNC control programs of tightening presses ASV-ALSTHOM]. *Science, theory, practice of aircraft-industrial cluster of modern Russia. II All-Russian Scientific and Production Conference, timed to the Day of Science* (Russia, Ulyanovsk, February 8–9, 2017) : collection of scientific papers. Ulyanovsk : Ulyanovsk State Technical University. 2017. P. 35–49.

8. Veprev A. A., Zavyalova V. I. *Vybor skhemy nagruzheniya i skorosti vedeniya protsessa poperechnoy obtyazhki* [Selection of loading scheme and speed of cross-straightening process]. Aviation Industry. 1984. № 12.

9. Krivenok A. A., Stankevich A. V., Feoktistov S. I. [Shaping of profile billets with sheet stretching press]. *Scientists' notes of Komsomolsk-on-Amur state technical university. Sciences of Nature and Technology*. 2013. No. II-1(14). P. 4–8.

10. Surudin S. V. *Sochetaniye konechno-elementnogo modelirovaniya i rascheta po analiticheskim formulam protsessov formoobrazovaniya obtyazhkoy* [The combination of finite-element modelling and calculation by analytical formulas of the processes of forming a tightening]. National association of scientists (NAU), Monthly Scientific Journal. 2015. No. 3 (8). P. 3. P. 139–141.

11. Mikheev V. A. *Ustoychivost' obolochek dvoynoy krivizny v protsesse formoobrazovaniya obtyazhkoy* [Stability of double curvature shells in the process of shaping by tightening]. Izvestiya Samara Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences. 2004. T. 6. № 2. P. 408–413.
12. Merlet J.-P. *Parallel Robots*. 2nd ed., Springer Dordrecht, The Netherlands, 2006.
13. Denavit J., Hartenberg R. S. Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices, *J. Appl. Mech.*, 77, p. 215–221. 1955.
14. Sommese A. J. *Numerical Solutions of Polynomial Systems Arising in Engineering and Science [Text]* / Andrew J. Sommese, Charles W. Wampler, II – Singapoure: World Scientific, 2005. 401+XXII p. ISBN 981-256-184-6.

© Буренин А. А., Кривенок А. А., 2022

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВАНДЕРМОНДА И ФОРМУЛЫ СУММИРОВАНИЯ КОНЕЧНЫХ СУММ

Т. А. Ширяева^{1,2}, А. К. Шлепкин^{2*}, К. А. Филиппов^{1,3}, А. А. Шлепкин²

¹Красноярский государственный аграрный университет
Российская Федерация, 660049, г. Красноярск, просп. Мира, 90

²Сибирский государственный университет науки и технологий
имени академика М. Ф. Решетнева

Российская Федерация, 660037, г. Красноярск,
просп. им. газеты «Красноярский рабочий», 31

³Сибирский федеральный университет
Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, просп. Свободный, 79

*E-mail: ak_kgau@mail.ru

В данной статье предложен метод получения формул суммирования k -х степеней первых n членов натурального ряда основанный на свойствах вычисления определителей Вандермонда.

Ключевые слова: конечные суммы, определители.

VANDERMONDE DETERMINANT AND FINITE SUM SUMMATION FORMULAS

T. A. Shiryaeva^{1,2}, A. K. Shlepin^{2*}, K. A. Filippov^{1,3}, A. A. Shlyapkin²

¹Krasnoyarsk State Agrarian University

90, Mira prospekt, Krasnoyarsk, 660049, Russian Federation

²Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

³Siberian Federal University
79, Svobodny prospect, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation

*E-mail: ak-gau@yandex.ru

We have proposed a method for obtaining formulas for summing the k -th powers of the first n terms of a natural series based on the properties of calculating the Vandermonde determinants in this article.

Keywords: finite sums, determinants.

Введение. Продолжены исследования авторов начатые в [1]. В работе предложен метод суммирования k -х степеней первых n членов натурального ряда основанный на свойствах определителей Вандермонда. Данный метод

отличен от рассматриваемых ранее [2–7]. Он позволяет вычислять рассматриваемые суммы не используя числа Фибоначи.

Теорема о формуле суммирования. Пусть n, k – фиксированные натуральные числа $\left[\frac{k}{2} \right]$ – целая часть числа $\frac{k}{2}$, $1 \leq i, j \leq l$. Положим

$$S_n^{(k)} = 1^k + \dots + n^k = \sum_{m=1}^n m^k.$$

Тогда

$$S_n^{(k)} = \frac{1}{k+1} n^{k+1} + \frac{1}{2} n^k + \sum_{j=1}^l a_j n^{k+1-2*j}, \text{ где } a_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1^{((k+1)-2*1)} & \dots & 1^{((k+1)-2*j)} & \dots & 1^{((k+1)-2*l)} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ i^{((k+1)-2*1)} & \dots & i^{((k+1)-2*j)} & \dots & i^{((k+1)-2*l)} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ l^{((k+1)-2*1)} & \dots & l^{((k+1)-2*j)} & \dots & l^{((k+1)-2*l)} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} 1^{((k+1)-2*1)} & \dots & \left\{ S_1^k - \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \right) \right\} & \dots & 1^{((k+1)-2*l)} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ i^{((k+1)-2*1)} & \dots & \left\{ S_i^k - \left(\frac{1}{k+1} * i^{k+1} + \frac{1}{2} * i^k \right) \right\} & \dots & i^{((k+1)-2*l)} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ l^{((k+1)-2*1)} & \dots & \left\{ S_l^k - \left(\frac{1}{k+1} * l^{k+1} + \frac{1}{2} * l^k \right) \right\} & \dots & l^{((k+1)-2*l)} \end{vmatrix}.$$

Доказательство теоремы. Воспользуемся индукцией по n . Несложно проверяется что для $n \geq 1$ теорема верна при любом k . Пусть теорема верна для $n \geq 1$ при любом k . Докажем, что теорема верна для $n+1$ при любом k .

$$S_{n+1}^{(k)} = \frac{1}{k+1} (n+1)^{k+1} + \frac{1}{2} (n+1)^k + \sum_{j=1}^l a_j (n+1)^{k+1-2*j},$$

Тогда

$$S_{n+1}^{(k)} = \frac{1}{k+1} \left(\sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m n^{k+1-m} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{m=0}^k C_k^m n^{k-m} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^l a_j \left(\sum_{m=0}^{k+1-2j} C_{k+1-2j}^m n^{k+1-2j-m} \right) = \\
& = \frac{1}{k+1} \left(n^{k+1} + (k+1)n^k + \sum_{m=2}^{k+1} C_{k+1}^m n^{k+1-m} \right) + \frac{1}{2} \left(n^k + \sum_{m=1}^k C_k^m n^{k-m} \right) + \\
& + \sum_{j=1}^l a_j \left(n^{k-1} + \sum_{m=1}^{k+1-2j} C_{k+1-m}^m n^{k+1-2j-m} \right) = \left(\frac{1}{k+1} n^{k+1} + \frac{1}{2} n^k + \sum_{j=1}^l a_j n^{k+1-2j} \right) + \\
& + \left(n^k + \frac{1}{k+1} \sum_{m=2}^k C_{k+1}^m n^{k+1-m} + \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^{k-1} C_k^m n^{k-m} \right) + \frac{1}{2} + \\
& + \sum_{j=1}^l a_j \left(n^{k-1} + \sum_{m=1}^{k+1-2j} C_{k+1-2j}^m n^{k+1-2j-m} \right) = \\
& = S_n^{(k)} + \left(n^k + \frac{1}{k+1} \sum_{m=2}^k C_{k+1}^m n^{k+1-m} + \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^{k-1} C_k^m n^{k-m} \right) + \frac{1}{2} + \\
& + \sum_{j=1}^l a_j \left(n^{k-1} + \sum_{m=1}^{k+1-2j} C_{k+1-2j}^m n^{k+1-2j-m} \right) = \\
& = S_n^{(k)} + (n+1)^k = 1^k + \dots + n^k + (n+1)^k = \sum_{m=1}^{n+1} m^k = S_{n+1}^{(k)}.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Реализация теоремы для $S_n^{(8)}$, $S_n^{(9)}$. На основе утверждения теоремы были получены следующие формулы

$$\begin{aligned}
S_n^{(8)} &= 1^8 + \dots + n^8 = \sum_{m=1}^n m^8 = \frac{1}{9} n^9 + \frac{1}{2} n^8 + \frac{2}{3} n^7 - \frac{7}{15} n^5 + \frac{2}{9} n^3 - \frac{1}{30}. \\
S_n^{(9)} &= 1^9 + \dots + n^9 = \sum_{m=1}^n m^9 = \frac{n(10n^8 + 45n^7 + 60n^6 - 42n^4 + 20n^2 - 3)}{90} = \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)(5n^6 + 15n^5 + 5n^4 - 15n^3 - n^2 + 9n - 3)}{90} = \\
&= \frac{1}{10} n^{10} + \frac{1}{2} n^9 + \frac{3}{4} n^8 - \frac{7}{10} n^6 + \frac{1}{2} n^4 - \frac{3}{20} n^2.
\end{aligned}$$

Заключение. С учетом формул полученных в [1] имеют место следующие формулы для вычисления k -х степеней первых n членов натурального ряда при условии, что $k \leq 8$.

$$\begin{aligned}
 S_n^{(1)} &= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n, \\
 S_n^{(2)} &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n, \\
 S_n^{(3)} &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2, \\
 S_n^{(4)} &= n(n+1)(2n+1) \frac{(3n^2+3n-1)}{30} = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n. \quad (4) \\
 S_n^{(5)} &= \frac{n^2(2n^4+6n^3+5n^2-1)}{12} = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2, \\
 S_n^{(6)} &= \frac{n(6n^6+21n^5+21n^4-7n^2+1)}{42} = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n, \\
 S_n^{(7)} &= \frac{n^2(6n^6+24n^5+28n^4-14n^2+4)}{48} = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2, \\
 S_n^{(8)} &= 1^8 + \dots + n^8 = \sum_{m=1}^n m^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}, \\
 S_n^{(9)} &= 1^9 + \dots + n^9 = \sum_{m=1}^n m^9, \\
 &= \frac{n(10n^8+45n^7+60n^6-42n^4+20n^2-3)}{90} = \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)}{90} = \\
 &= \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2.
 \end{aligned}$$

Библиографические ссылки

1. О конечных суммах и системах линейных уравнений / Т. А. Ширяева, А. К. Шлепкин, К. А. Филиппов, А. А. Шлепкин, У. С. Рыбакова // Информационные технологии и математическое моделирование. Избранные

статьи Научной интернет-конференции с международным участием / СибГУ им. М. Ф. Решетнева. Красноярск, 2021. С. 49–55.

2. Бернштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. Москва : Наука, 1983. 48 с.

3. Маркушевич А. И. Вовратные последовательности. Москва : Наука, 1986.

4. Абрамович В. Суммы одинаковых степеней натуральных чисел // Журнал «Квант». 1973. № 5. С. 22–25.

5. Суконник Я. Суммы одинаковых степеней натуральных чисел // Журнал «Квант». 1975. № 1. С. 36–39.

6. Бундукидзе А. Сулаквелидзе А. Вычисление сумм // Журнал «Квант». 1970. № 9. С. 37–40.

7. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. Москва : Наука, 1974.

References

1. Shiryaeva T. A., Shlepkin A. K., Filippov K. A., Shlepkin A. A., Rybakova U. S. [On finite sums and systems of linear equations] // *Information technologies and mathematical modeling. Selected articles of the Scientific Internet Conference with international participation*. SibGU. Krasnoyarsk, 2021. Pp. 49–55.

2. Bernstein I. N., Semendyaev K. A. *Handbook of Mathematics*. Moscow, Science, 1983. 48 p.

3. Markushevich A. I. *Return sequences*. Moscow, Nauka, 1986.

4. Abramovich V. [Sums of identical powers of natural numbers] // *Kvant Magazine*. 1973. No. 5. Pp. 22–25.

5. Sukonnik Ya. [Sums of identical powers of natural numbers] // *Kvant Magazine*. 1975. No. 1. Pp. 36–39.

6. Bundukidze A. Sulakvelidze A. [Calculation of sums] // *Kvant Magazine*. 1970. No. 9. Pp. 37–40.

7. Proskuryakov I. V. *Collection of problems in linear algebra*. Moscow, Science, 1974.

© Ширяева Т. А., Шлепкин А. К.,
Филиппов К. А., Шлепкин А. А., 2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Альдо Альварес-Гутьеррес – аспирант, математический факультет университетского центра CUCEI Университета Гвадалахары, Мексика.

E-mail: A.A. Gutierrez @academicos.udg.mx

Бормотин Константин Сергеевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Авиастроение», Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на Амуре, Российская Федерация.

E-mail: cvmi@knastu.ru

Буренин Анатолий Александрович – доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор, Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук Федерального государственного бюджетного учреждения науки Хабаровского Федерального исследовательского центра Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Комсомольск-на Амуре, Российская Федерация.

E-mail: burenin@iacp.dvo.ru

Диаз Хуан Серрано – аспирант математического факультета университетского центра CUCEI Университета Гвадалахары, Мексика.

E-mail: J.S.Diaz @academicos.udg.mx

Ковтанюк Лариса Валентиновна – доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Российская Федерация.

E-mail: lk@iacp.dvo.ru

Кривенок Антон Александрович – кандидат технических наук, программист научно-производственного отдела филиала ОАО «Компания «Сухой» «КНААЗ им. Ю. А. Гагарина», г. Комсомольск-на-Амуре, Российская Федерация.

E-mail: baikal-190@yandex.ru

Лычагин Валентин Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, институт математики и статистики, университет г. Тромсо, Норвегия.

E-mail: postmottak@uit.no

Мин Ко Хлайнг – аспирант кафедры «Материаловедение и технология новых материалов», Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на Амуре, Российская Федерация.

E-mail: minkohlaing53@gmail.com

Морено Клаудия – аспирант, Технологический институт Монтеррея, Мексика.

E-mail: claudia.moreno@cucei.udg.mx

Панченко Галина Леонидовна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток, Российская Федерация.

E-mail: panchenko.21@yandex.ru

Потянихин Дмитрий Андреевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Авиастроение», Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Российская Федерация.

Савостьянова Ирина Леонидовна – кандидат педагогических наук, доцент, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, Российская Федерация.

E-mail: rupra@inbox.ru

Сенашов Владимир Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт вычислительного моделирования СО РАН; профессор кафедры алгебры и математической логики, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Российская Федерация.

E-mail: sen1112home@mail.ru

Сенашов Сергей Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, Российская Федерация.

E-mail: sen@sibsau.ru

Синельщиков Александр Андреевич – студент, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на Амуре, Российская Федерация.

Ткачева Анастасия Валерьевна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлур-

гии Дальневосточного отделения Российской академии наук Федерального государственного бюджетного учреждения науки Хабаровского Федерального исследовательского центра Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Комсомольск-на Амуре, Российская Федерация.

E-mail: 4nansi4@mail.ru

Шемарулин Валерий Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, г. Саров, Российская Федерация.

E-mail: VEShemarulin@vniief.ru

Филиппов Константин Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор, Красноярский государственный аграрный университет, г. Красноярск, Российская Федерация.

E-mail: ak_kgau@mail.ru

Ширяева Тамара Алексеевна – кандидат физико-математических наук, доцент, Красноярский государственный аграрный университет, г. Красноярск, Российская Федерация.

E-mail: tas_sfu@mail.ru

Шлепкин Анатолий Константинович – доктор физико-математических наук, профессор, Красноярский государственный аграрный университет, г. Красноярск, Российская Федерация.

E-mail: ak_kgau@mail.ru

Юмагужин Валерий Афтахович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Исследовательский центр Системного анализа Института программных систем Российской академии наук, г. Переславль-Залесский, Российская Федерация.

E-mail: yuma@diffiety.botik.ru

Яхно Александр Николаевич – кандидат физико-математических наук, профессор математического факультета университетского центра CUCEI Университета Гвадалахары, Мексика.

E-mail: alexander.yakhno@cucei.udg.mx

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Aldo Alvarez-Gutierrez – PhD Student, Faculty of Mathematics, CUCEI University Center, University of Guadalajara, Mexico.

E-mail: A.A. Gutierrez @academicos.udg.mx

Bormotin Konstantin Sergeevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Aircraft Engineering, Komsomolsk-on-Amur State University, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation.

E-mail: cvmi@knastu.ru

Burenin Anatoly Aleksandrovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Professor, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences of the Federal State Budgetary Institution of Science of the Khabarovsk Federal Research Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation.

E-mail: burenin@iacp.dvo.ru

Diaz Juan Serrano – PhD student of the Faculty of Mathematics at the CUCEI University Center of the University of Guadalajara, Mexico.

E-mail: J.S.Diaz @academicos.udg.mx

Filippov Konstantin Anatolyevich – doctor of physical and mathematical sciences, professor, Krasnoyarsk State Agrarian University, Russian Federation, Krasnoyarsk.

E-mail: ak_kgau@mail.ru

Krivenok Anton Aleksandrovich – Candidate of Technical Sciences, Programmer of the Scientific and Production Department of the branch of JSC Sukhoi Company «KnAAZ named after Yu. A. Gagarin», Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation.

E-mail: baikal-190@yandex.ru

Kovtanyuk Larisa Valentinovna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, Institute of Automation and Control Processes of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russian Federation.

E-mail: lk@iacp.dvo.ru

Lychagin Valentin Vasilyevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute of Mathematics and Statistics, University of Tromsø, Norway.

E-mail: postmottak@uit.no

Min Ko Hlaing – Postgraduate Student of the Department of Materials Science and Technology of New Materials, Komsomolsk-on-Amur State University, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation.

E-mail: minkohlaing53@gmail.com

Moreno Claudia – PhD Student, Monterey Institute of Technology, Mexico.

E-mail: claudia.moreno@cucei.udg.mx

Panchenko Galina Leonidovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Institute of Automation and Control Processes of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russian Federation.

E-mail: panchenko.21@yandex.ru

Potyanikhin Dmitry Andreevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Aircraft Engineering, Komsomolsk-on-Amur State University, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation.

Savostyanova Irina Leonidovna – candidate of pedagogical, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russian Federation.

E-mail: ruppa@inbox.ru

Sinelshchikov Alexander Andreevich – student, Komsomolsk-on-Amur State University, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation

Senashov Sergei Ivanovich – doctor of physical and mathematical sciences, professor, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russian Federation.

E-mail: sen@sibsau.ru

Senashov Vladimir Ivanovich – doctor of physics and mathematics sciences, professor, leader researcher of Institute of Computational Modelling of Siberian Branch of RAS, professor of algebra and logic department of Siberian Federal University, Russian Federation, Krasnoyarsk.

E-mail: sen1112home@mail.ru

Shemarulin Valery Evgenievich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics, Sarov, Russian Federation.

E-mail: VEShemarulin@vniief.ru

Shiryaeva Tamara Alekseevna – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Krasnoyarsk State Agrarian University, Russian Federation, Krasnoyarsk.

E-mail: tas_sfu@mail.ru

Shleppin Anatoly Konstantinovich – doctor of physical and mathematical sciences, professor, Krasnoyarsk State Agrarian University, Russian Federation, Krasnoyarsk.

E-mail: ak_kgau@mail.ru

Tkacheva Anastasia Valeryevna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences of the Federal State Budgetary Institution of Science of the Khabarovsk Federal Research Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Komso-molsk-on-Amur, Russian Federation.

E-mail: 4nansi4@mail.ru

Yakhno Alexander Nikolaevich – candidate of physical and mathematical sciences, professor Departamento de Matemáticas, CUCEI, Universidad de Guadalajara, México.

E-mail: alexander.yakhno@cucei.udg.mx

Yumaguzhin Valery Aftakhovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher at the Research Center for System Analysis of the Institute of Software Systems of the Russian Academy of Sciences, Pereslavl-Zalessky, Russian Federation.

E-mail: yuma@diffiety.botik.ru

Научное издание

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

*Избранные статьи XV Международной научной
интернет-конференции*

Под редакцией С. И. Сенашова

Корректурa, оригинал-макет и верстка *П. С. Бороздова*

Подписано в печать 10.02.2023. Сдано в производство 23.05.2023.

Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Печать плоская.

Усл. печ. л. 7,0. Уч.-изд. л. 9,0. Тираж 100 экз.

Заказ С 722/23.

Редакционно-издательский отдел СибГУ им. М. Ф. Решетнева.
660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31.
E-mail: rio@mail.sibsau.ru. Тел. (391) 291-90-96.

Отпечатано в редакционно-издательском центре
СибГУ им. М. Ф. Решетнева.
660049, г. Красноярск, просп. Мира, 82. Тел. (391) 222-73-28.